

高等学校教学用书

解析几何学

第二卷

裘光明編

高等教育出版社

1.52
7/8
:2

高等学校教学用书



解析几何学

第二卷

裘光明編

高等数学出版社



本书是按前高等教育部 1954 年 10 月批准的綜合大学数学、力学、天文等专业解析几何学教学大纲(初稿)来编写的,全书共分两卷,第一卷包含緒論和前八章(已出版),供一年級上学期使用,第二卷包含后四章,供下学期使用。

本书第二卷的内容是:第九章講述平面和空間的移动和仿射变换的理論,第十和十一兩章分別講述平面上的二阶曲綫和空間中的二阶曲面的一般理論,第十二章介紹射影平面(和射影空間)的解析几何学的初步知識。

本书可以作为綜合大学的数学、力学和天文等专业的解析几何課程的教学用书。

解 析 几 何 学

第 二 卷

凌光明編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市书刊出版业营业許可證出字第 034 号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·725 开本 850×1168 1/32 印張 8 11/16
字數 206,000 印數 1—15,000 定价(4) 半 0.85
1960 年 3 月第 1 版 1960 年 3 月上海第 1 次印刷

序 言

本书第二卷包含全书的后四章，是供綜合大学数学等专业解析几何課程的第二学期使用的。在編写本书的时候，編者是在讀者的代数知識較少，几何观念也不够丰富的估計下，来安排教材的次序和講述的方法的。实际情况很可能与編者的估計有較大的出入，特別当讀者同时学习高等代数时更是如此。因此編者在这第二卷中特別留下一些余地，以便采用本书作为教材的同志在必要时可以改变教材的次序和講述的方法。

譬如說，在本书第二卷中可以采用的另一个次序是这样：在講完第九章移动和仿射变換的理論以后，接着先講第十二章的§§1—5和§8第1—3段的内容，直到講完了射影变換的理論，再回过头來講第十和第十一章的二阶曲綫和二阶曲面的理論。这时候我們自然可以把第十二章的§§6—7和§8第4段分別插入前两章的适当的地方了。

編者在本书中采用的講述方法，常常是从几何直观出发，尽量利用几何的結果和几何的方法来展开书中的理論。这种講述方法虽然有要求讀者的代数知識較少和便于加强讀者的几何观念的优点，但是終究比較費时。特別对于同时学习高等代数的讀者，他們在第二学期时已經具有了不少代数知識，應該考虑在本課程中利用这些代数知識的問題。因此，接着本书第一卷的四节附录之后，編者在第二卷中又添上了三节附录。在附录中，編者扼要叙述了与本书内容有密切联系的代数理論（例如关于向量空間，矩陣代数，綫性变換和二次齐式的理論），特別着重在闡明这些代数理論如何可以用来簡化正文中的某些几何理論。这种尽量利用讀者已

有的代数知識的講法，可以大大加强解析几何和高等代数兩門課程之間的連系，优点是极为显著的。

其次，由于解析几何課程的內容既多又杂，編者在本书的叙述中尽量遵循“該詳則詳，能簡則簡”的原則。在引入一种新的理論的开头，例如在介紹变換的概念和射影平面的概念时，尽可能闡述得詳細些。相反地，对于某些理論的重复部分，就力求叙述得簡洁些。例如移动和仿射变換的共同性質部分，在讲述移动的时候說得足够詳尽了，在讲述仿射变換时就說得簡單些。又例如在讲述二阶曲面的理論时，与二阶曲綫的理論不同的部分說得詳細些，相同的部分就說得簡單些。至于射影空間的解析几何的部分，在同样的原則下，在书中甚至于只写出主要的結果而很少进行論証了。因为編者認為，只要讀者把前面的理論真正學好了，这一部分理論是并不困难地可以接受的。至于附录中的各节，书上更是尽量簡化叙述，因此在附录 §6 和 §7 中，很多結果的代数証明都沒有写出，留給讀者自己去查閱适当的代数书了。

最后，由于編者的学識和教学經驗不足，本书一定存在很多缺点。这在已經出版的第一卷中編者自己也发现了一些。因此，編者热忱希望讀者提出宝贵的意見，而且特別期待采用本书作为教材的同志的指正。

裘光明 1959年9月

目 录

序 言	7
第九章 移动和仿射变换	1
§1 变换	1
§2 移动和仿射变换的定义和基本性质	6
1. 移动的定义和基本性质(5) 2. 仿射变换的定义和基本性质(11)	
§3 移动和仿射变换的公式和例子	14
1. 仿射变换的公式(14) 2. 移动的公式(16) 3. 仿射变换和移动的例子(17) 4. 仿射变换的变积系数(28)	
§4 变换群和几何学	27
1. 变换的乘积(27) 2. 逆变换和恒同变换(28) 3. 变换群(30) 4. 仿射变换群和它的主要子群(30) 5. 几何性质和几何学(31) 6. 图形的等价和分类(32)	
第十章 二阶曲线的一般理论	36
§1 二阶曲线的仿射性质	37
1. 记号(37) 2. 二阶曲线和直线的相交(39) 3. 二阶曲线的渐近方向(41) 4. 二阶曲线的中心(43) 5. 二阶曲线的直径(49) 6. 二阶曲线的切线和奇异点(54)	
§2 二阶曲线的仿射分类	61
1. 中心曲线的方程的简化(61) 2. 无心曲线的方程的简化(64) 3. 多心曲线的方程的简化(66) 4. 用配平方法化简二阶曲线的方程(68) 5. 二阶曲线的八个仿射类(71)	
§3 二阶曲线的度量性质和度量分类	72
1. 二阶曲线的主直径和主方向(73) 2. 二阶曲线的标准方程和度量分类(77) 3. 关于仿射变换的一个应用(82)	
§4 二元二次多项式的正交不变量和正交半不变量	84
1. 二元二次多项式的三种简化多项式(85) 2. 正交不变量和正交半不变量(86) 3. 通过正交不变量和正交半不变量来求简化多项式(93)	
第十一章 二阶曲面的一般理论	99
§1 二阶曲面的仿射性质	99
1. 记号(99) 2. 二阶曲面和直线的相交(101) 3. 二阶曲面的渐近方	

向和渐近方向的锥面(103)	4. 二阶曲面的中心(104)	5. 二阶曲面的 径平面和奇异方向(107)	6. 二阶曲面的切线、切平面和奇异点(110)
§ 2 二阶曲面的仿射分类	114	1. 二阶曲面的方程的简化(114)	2. 用配方法化简二阶曲面的方 程(117)
3. 二阶曲面的十五个仿射类(120)			
§ 3 二阶曲面的度量性质和度量分类	123	1. 二阶曲面的主径平面和主方向(123)	2. 二阶曲面的特征方程和特 征根(124)
3. 二阶曲面的标准方程和度量分类(130)		4. 二阶曲面的 标准直角坐标系的求法(132)	
§ 4 三元二次多项式的正交不变量和正交半不变量	143	1. 三元二次多项式的五种简化多项式(143)	2. 正交不变量和正交半 不变量(144)
3. 通过正交不变量和正交半不变量求简化多项式(148)			
第十二章 射影几何初步	151		
§ 1 射影平面	151	1. 相交平面间的中心投射(151)	2. 射影平面的概念(154)
§ 2 扩大平面的齐次坐标	158	1. 齐次坐标(158)	2. 直线在齐次坐标里的方程, 三条直线共点的条 件(161)
3. 三个点共线的条件, 通过两个点的直线的方程(163)			
§ 3 射影平面的射影坐标	165	1. 射影坐标的定义(165)	2. 射影坐标变换的公式(171)
3. 在射影坐 标里的点和直线(176)		4. 射影平面的直线的坐标, 对偶原则, 代沙葛 定理(178)	
§ 4 二重比值	184	1. 共直线的四个点的二重比值(184)	2. 共直线的四个普通点的二重 比值(186)
3. 调和点列(187)			
§ 5 射影平面的射影变换	189	1. 射影变换的定义和基本性质(189)	2. 射影变换的公式(191)
3. 射 影变换群(193)		4. 射影性质和射影几何学(195)	
§ 6 二阶曲线的射影分类	196	1. 射影平面上的二阶曲线(196)	2. 二阶曲线的射影分类(199)
3. 五 个点决定一条二阶曲线(202)			
§ 7 二阶曲线的射影性质	203	1. 记号(203)	2. 二阶曲线和直线的相交(205)
3. 二阶曲线的切线和 奇异点(207)		4. 从已知点作不可分解的二阶曲线的切线(211)	5. 二 阶曲线的极线和极点(212)
6. 二阶曲线的自配极三角形(216)		7. 二 阶曲线的中心、直径和渐近线作为极点和极线的特例(218)	
§ 8 射影空间的解析几何简述	221		

1. 射影空间和齐次坐标(221)	2. 射影坐标(223)	3. 射影变换(224)	
4. 二阶曲面的射影分类(225)			
附录 线性代数初步(續)			228
§5 矩阵代数			228
1. 矩阵的加法和数乘矩阵的乘法(228)	2. 矩阵的乘法(229)	3. 逆矩阵(237)	
4. 转置矩阵(239)	5. 矩阵运算的应用(242)		
§6 线性变换和正交变换			246
1. n 数列的线性变换(246)	2. 逆变换和变换的乘积(248)	3. 线性群(249)	
4. 正交变换(251)			
§7 二次齐式			252
1. 二次齐式和双线性齐式(252)	2. 用线性变换化简二次齐式(254)		
3. 二次齐式的正交不变量(257)	4. 用正交变换化简二次齐式(261)		
习题答案			264

第九章 移动和仿射变换

§1 变换

我們曾經說過,在几何学中常常把图形看做是由点组成的(点的集合)。因此,当我们研究两个图形之间的关系时,我們常常需要考虑在它们的点之間有什么确定的关系。例如給了两个相等的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ (图 1)。如果 A 和 A' 、 B 和 B' 、 C 和 C' 是对应的頂点,則我們有

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'.$$

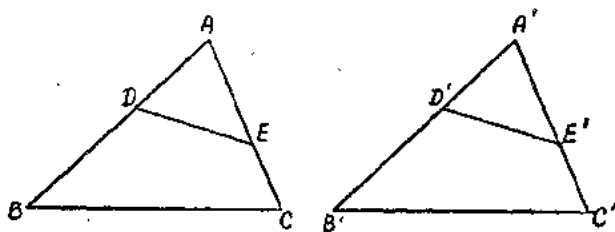


图 1

不仅如此,对于三角形 ABC 中的任何点 D ,在三角形 $A'B'C'$ 中总存在它的唯一的对应点 D' ,而且对于三角形 ABC 中的任何两个点 D 和 E ,它们的对应点 D' 和 E' 还具有使綫段 DE 和 $D'E'$ 相等的性質: $DE = D'E'$ 。又例如給了两个相似的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ (图 2)。我們也可以得出类似的結果,只是必須把相等关系改成比例关系。那就是說,如果 A 和 A' 、 B 和 B' 是对应的頂点,則对于三角形 ABC 中的任何两点 D 和 E ,在三角形 $A'B'C'$ 中存在唯一的对应点 D' 和 E' ,使得 $DE : D'E' = AB : A'B'$ 。总

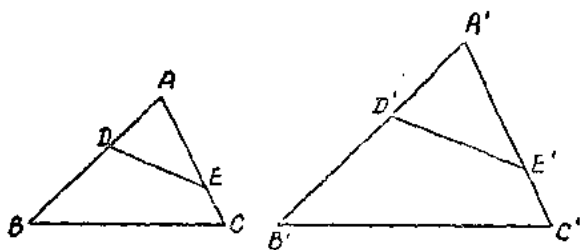


图 2

之,如果一个图形 Φ 与另一个图形 Φ' 相等,则对于 Φ 中的每个点 M ,在 Φ' 中存在唯一的对应点 M' ,使得图形 Φ 中的每一对点 M_1, M_2 所决定的线段等于图形 Φ' 中的对应点 M'_1, M'_2 所决定的线段 $M_1M_2 = M'_1M'_2$ 。至于相似的情形则是 $M'_1M'_2 : M_1M_2 = \text{常数}$ 。

可以换一种方式来表述上面的结果。我们可以把图形 Φ 与图形 Φ' 的相等(或相似)的关系看做一种所谓“变换”,说这种“变换”把图形 Φ 的每个点 M 变成图形 Φ' 的唯一确定的点 M' ,同时要求这个“变换”不改变任何两点之间的距离,即图形 Φ 的两个点 M_1, M_2 之间的距离总等于由它们变成的图形 Φ' 的点 M'_1, M'_2 之间的距离(在相似的情形是任何两点之间的距离总乘上同一个固定的比例因子——所谓相似系数)。我们以后将会指出,这种“变换”叫做移动(在相似图形的情形叫做相似变换)。

在自然现象中我们经常可以看到物体形状的各种“变换”,我们举出极为常见的以下两个例子。

在放映电影的时候,灯光把电影胶片上的图形变成银幕上的图形。这时我们在理论上把电灯(光源)看做一个点 S ,把从电灯(点 S)发出的光看做是沿直线行进的,因此当光线照在胶片上的点 M 上时,在银幕上就有这个点的唯一的一个“象”点 M' ,而且点 S, M 和 M' 总在同一条直线上(图 3)。再看一下电灯、胶片和银幕的位置,通常胶片所在的平面 π 和银幕所在的平面 π' 是平行

的,而且电灯(点 S)不在这两个平面中的任何一个上。总之,放映电影时所发生的自然现象在几何学上可以这样来描述:给了两

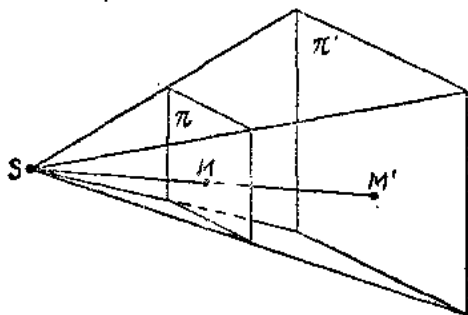


图 3

个平行的平面 π 、 π' 和不在这两个平面中的任何一个上的点 S 。于是对于平面 π 上的任何点 M ,直线 SM 总与平面 π' 相交于唯一的点 M' ,我们就说点 M' 是点 M 的对应点。按照这样的规律,对于平面 π 上的一个图形 Φ ,在平面 π' 上可以找到由图形 Φ 的点的对应点所组成的图形 Φ' 。因此,我们有了一个从平面 π 到平行的平面 π' 、把点 M 变成点 M' (和把图形 Φ 变成图形 Φ')的“变换”,这种变换叫做平行平面间的中心投射,因为这时有一个特殊的点 S ,它就叫做投射中心。容易根据立体几何的知识证明,平行平面间的中心投射把一个图形变成与这图形相似的图形,因而它是相似变换。相似系数是线段 SM' 与 SM 的比值: $SM':SM$ 。

太阳光照在窗玻璃上,在地面投下一个影子,假定地面很平,我们看到长方形的窗子的影子是平行四边形。在这种自然现象中图形的形状要改变,所以它不是相似变换。我们从几何方面来描述一下这种自然现象。窗玻璃所在的平面 π 和假定的地平面 π' 是两个相交的平面,太阳光线假定是平行的直线(因面是有固定方向的直线),这些直线同时与平面 π 和 π' 相交。因此,对于窗玻璃(平面 π)上的每个点 M ,照在这个点 M 上的光线在地面(平

π') 上投下唯一的一个影子点 M' , 点 M' 实质上就是通过点 M 而且有固定方向(太阳光方向)的直线与平面 π' 的交点(图4), 我們

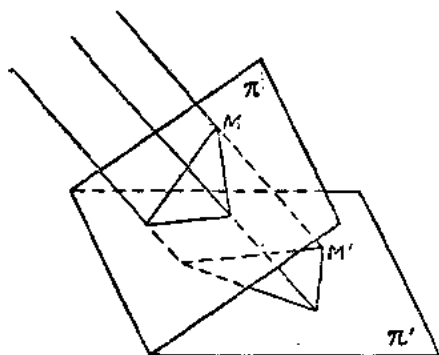


图 4

把这个点 M' 看做点 M 的对应点。这种由固定方向的直线(平行直线)所产生的、从平面 π 到与它相交的平面 π' 的“变换”叫做相交平面间的平行投射。正如我們所說过的, 这种变换会改变图形的形状。但是我們可以用几何方法証

明它还具有一些有趣的性质, 例如它总把直线变成直线, 把平行直线变成平行直线, 而且不会改变平行线段的比值。

我們在本章中将要讨论一类常见的变换, 它包括以上所谈的各个例子作为其特殊情形。在讨论中, 我們將不局限于研究图形的变换, 而首先研究图形所在的整个平面或空间的变换。因为这样可以更便于研究变换本身的性质而不至于受到图形的性质的限制。此外, 在本节中, 为了使定义更具有普遍性, 我們提出的将是从点集到点集的变换, 因为不論是什么几何图形, 或者是整个的平面和空间, 都可以看做是点集的特例。

定义 1 假如对于一个点集 M 的每个点 M , 在另一个(或同一个)点集 M' 内按照确定的法则存在唯一的对应点 M' , 則我們就把从集合 M 到集合 M' 使点 M 有对应点 M' 的这种确定的法则叫做从集合 M 到集合 M' 的一个点变换。当集合 M 和集合 M' 是同一个集合时, 我們說它是从集合 M 到自己的一个点变换。

設在变换 F 下, 点 M 的对应点是点 M' , 我們常常說成是变

换 F 把点 M 变成点 M' , 而且使用記号

$$M' = F(M).$$

这时我們把点 M' 叫做点 M 在变换 F 下的象, 而且反过来把点 M 叫做点 M' 在变换 F 下的原象。

定义 2 假如在从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的变换 F 下, 集合 $\mathfrak{M}'$ 的每个点 M' 都有原象, 即在集合 $\mathfrak{M}$ 內总存在某个点 M , 使得 $M' = F(M)$, 則变换 F 叫做从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 上的变换, 简单叫做在上的变换。

定义 3 假如在从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的变换 F 下, 集合 $\mathfrak{M}$ 的任何两个不同的点 M_1 和 M_2 的象总是不同的, 即当 $M_1 \neq M_2$ 时, $F(M_1) \neq F(M_2)$, 則变换 F 叫做从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的一一变换。

在变换理論中討論得最多的是在上的一一变换。我們在本章中也只限于討論一类特殊的在上的一一变换。从集合 $\mathfrak{M}$ 到自己的在上的一一变换我們簡單叫做集合 $\mathfrak{M}$ 的变换。

§ 2 移动和仿射变换的定义和基本性质

1. 移动的定义和基本性质

定义 4 从平面到平面 (或者从空間到自身) 的一个在上的变换 F , 假如不改变任何两个点之間的距离, 即当 $M'_1 = F(M_1)$ 和 $M'_2 = F(M_2)$ 时, 总有 $M'_1 M'_2 = M_1 M_2$, 則变换 F 叫做一个移动。

从定义知道, 移动是在上的变换。我們还可以証明, 移动是一一变换。因为根据定义, $M'_1 M'_2 = M_1 M_2$, 所以当 M_1 和 M_2 是不同的点时, M'_1 和 M'_2 也必須是不同的点。

为了証明移动的种种性质, 需要用到可以从中学几何知識得到的下列結果: 1) 三个点 A, B, C 不共綫, 即 A, B, C 是一个三角形的三个頂点, 必要而且只要綫段 AB, BC, CA 中任何两个

之和都大于第三个; 2) 三个点 A, B, C 共线, 而且点 B 在点 A 和 C 之间, 必要而且只要 $AB+BC=AC$ 。

定理 1 移动把共线的点变成共线的点, 把不共线的点变成不共线的点。

证明 设一个移动把点 A, B, C 分别变成点 A', B', C' 。那末当点 A, B, C 共线而且点 B 在点 A 和 C 之间时, 就有 $AB+BC=AC$ 。然而根据移动的定义, $AB=A'B', BC=B'C', AC=A'C'$, 所以还有 $A'B'+B'C'=A'C'$ 。因此点 A', B', C' 也共线。其次, 当点 A, B, C 不共线时, 线段 AB, BC, AC 中任何两个之和都大于第三个, 因而线段 $A'B', B'C', A'C'$ 中任何两个之和也都大于第三个, 即点 A', B', C' 也不共线。

定理 2 在移动下, 直线的象是直线, 直线的原象也是直线。

证明 设一个移动 F 把点 A 变成点 A' , 把点 B 变成点 B' 。因为移动是一一变换, 所以当点 A, B 决定一条直线 AB (即点 A, B 是不同的点) 时, 点 A', B' 也决定一条直线。然后根据定理 1, 我们可以断定, 移动 F 把直线 AB 上的点变成直线 $A'B'$ 上的点, 把直线 AB 外的点变成直线 $A'B'$ 外的点。最后, 因为移动是在上的变换, 直线 $A'B'$ 上的每个点都有原象, 根据定理 1, 这些原象必须都在直线 AB 上。因此, 直线 AB 的象是整条直线 $A'B'$ 。同理可以证明, 由点 A', B' 决定的直线的原象是由点 A, B 决定的直线。

定理 3 在空间的移动下, 平面的象是平面, 平面的原象也是平面。

证明 根据定理 1, 一个平面 π 上的三个不共线的点 A, B, C 在一个移动 F 下变成也不共线的三个点 A', B', C' , 我们先来证明平面 π 的象是由点 A', B', C' 决定的整个平面 π' (图 5)。

设 M 是平面 π 上与点 A 不同的任意点, 通过点 M 引一条直

綫与直綫 AB 和 AC 分別相交于点 P 和 Q (参看图 5)。因为直綫 AB 和 AC 的象分別是直綫 $A'B'$ 和 $A'C'$ ，所以点 P 和 Q 的象 P'

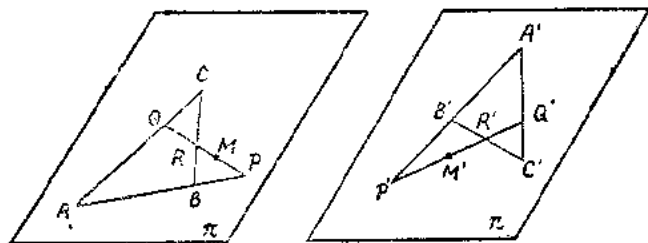


图 5

和 Q' 分別在直綫 $A'B'$ 和 $A'C'$ 上。同理，直綫 PQ 上的点 M 的象 M' 在直綫 $P'Q'$ 上。因此点 M' 在平面 π' 上，这就証明了平面 π 上的点都变成平面 π' 上的点。然后，因为移动是在上的变换，所以平面 π' 上的点 M' 都有原象。在平面 π' 上对于点 M' 进行同样的作图 (参看图 5)，而且使用与上面相类的論証，就可以証明点 M' 的原象 M 在平面 π 上。

同理可以証明，由点 A' 、 B' 、 C' 决定的平面的原象是由点 A' 、 B' 、 C' 的原象 A 、 B 、 C 决定的平面。

定理 4 移动把平行的直綫变成平行的直綫，空間的移动把平行的平面变成平行的平面。

証明 首先，两条平行的直綫处在同一个平面上，因此根据定理 2 和 3，它們变成仍然处在同一个平面上的两条直綫。其次，假如一个移动把两条平行直綫变成两条相交直綫，則就要違背移动不改变距离的定义。因为两条平行直綫的点之間的最短距离不等于零，而两条相交直綫的点之間的最短距离是零。这是不可能的，所以定理的前一部分証明了。至于第二部分則可以同样地来証明。

定理 5 移动在把一个綫段的两个端点变成一个相等的綫段

的两个端点的同时,还把分前一个线段成已知比值的点变成分后一个线段成同一比值的点。

证明 设点 A, B, C 变成点 A', B', C' 。那末由于 $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$, 同时点 A', B', C' 的相对位置也与点 A, B, C 的相对位置相同, 因此点 C' 分线段 $A'B'$ 的比值等于点 C 分线段 AB 的比值: $\overrightarrow{A'C'} : \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB}$ 。

推论 移动把线段变成线段, 把射线变成射线。

定理 6 移动不改变角度。

证明 考虑组成一个角的两条射线 OA 和 OB 。设一个移动把它们变成也组成一个角的两条射线 $O'A'$ 和 $O'B'$ (图 6)。在射

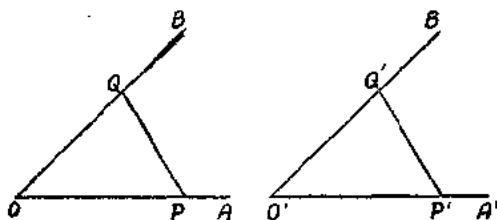


图 6

线 OA 和 OB 上分别取点 P 和 Q , 设它们在同一个移动下变成射线 $O'A'$ 和 $O'B'$ 上的点 P' 和 Q' 。于是因为根据移动的定义, $O'P' = OP, O'Q' = OQ, P'Q' = PQ$, 三角形 OPQ 和 $O'P'Q'$ 相等。因此 $\angle POQ = \angle P'O'Q'$ 。定理也就证明了。

利用以上所证明的一系列定理, 我们现在可以来证明关于移动的下列基本定理。

定理 7 移动把标架变成同度量的标架, 而且把对于前一个标架有坐标 $x, y(z)$ 的点变成对于后一个标架有同样坐标 $x, y(z)$ 的点。

附注 1 定理里的“同度量”是说后一个标架的度量参数分别

等于前一个标架的度量参数(参看第一卷第二章 § 2 第 66 页)。

证明 为了叙述简单起见,我们只考虑平面的情形。首先,平面上的一个标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 由坐标原点 O 和一对不共线的向量(有向线段) e_1, e_2 组成。在移动下,它们变成一个点 O' 和一对不共线的向量 e'_1, e'_2 , 即还组成一个标架 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 。其次,因为移动不改变长度和角度,所以我们有

$$|e'_1| = |e_1|, \quad |e'_2| = |e_2|, \quad \angle(e'_1, e'_2) = \angle(e_1, e_2)。$$

然而一个标架的度量参数就由坐标向量的长度和坐标向量之间的角度决定,因此标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 和 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 同度量。

为了证明定理的第二部分,我们重新画出第一卷第 41 页上决定平面上的点的坐标的图 28 (图 7), 只是现在在图上用点 E_1, E_2 、

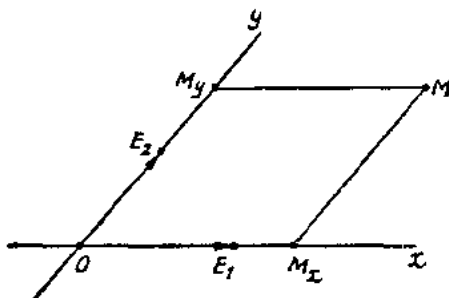


图 7

E'_1, E'_2 分别表示坐标向量 e_1, e_2, e'_1, e'_2 的终点。于是根据坐标的定义,点 M 的坐标是

$$x = \frac{\overrightarrow{OM_x}}{\overrightarrow{OE_1}} = -\frac{\overrightarrow{M_xO}}{\overrightarrow{OE_1}}, \quad y = \frac{\overrightarrow{OM_y}}{\overrightarrow{OE_2}} = -\frac{\overrightarrow{M_yO}}{\overrightarrow{OE_2}},$$

即 x 等于点 O 分线段 M_xE_1 的比值的负数, y 等于点 O 分线段 M_yE_2 的比值的负数。同理,点 M' 的坐标也具有相同的性质。然而点分线段的比值在移动下不变,因此点 M' 对于标架 $\{O'; e'_1, e'_2\}$ 的坐标与点 M 对于标架 $\{O; e_1, e_2\}$ 的坐标相同。