高等学校教学用書

解析几何学

第二卷

裘光明編

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析几何学

第二卷

裘光明編

高等教育出版社

本书是按前高等教育部1954年10月批准的综合大学数学、力学、天文等专业解析几何学教学大綱(初稿)来編写的,全书共分两卷,第一卷包含緒論和前八章(已出版),供一年級上学期使用,第二卷包含后四章,供下学期使用。

本书第二卷的内容是:第九章闡述平面和空間的移动和仿射变换的理論,第十和十一两章分别討述平面上的二阶曲綫和空間中的二阶曲面的一般理論,第十二章介紹射影平面(和射影空間)的解析几何学的初步知識。

本书可以作为综合大学的数学、力学和天文等专业的解析几何課程的教学用书。

解　析　几　何　学

第二卷

梁光明編

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷　新华书店发行

統一书号13010·725　开本850×1168 1/32　印張8 11/16
字数206,000　印数1—15,000　定价(4)¥0.85
1960年3月第1版　1960年3月上海第1次印刷

序　言

本书第二卷包含全书的后四章，是供綜合大学数学等专业解析几何課程的第二学期使用的。在編写本书的时候，編者是在讀者的代数知識較少，几何观念也不够丰富的估計下，来安排教材的次序和講述的方法的。实际情况很可能与編者的估計有較大的出入，特别当讀者同时学习高等代数时更是如此。因此編者在这第二卷中特别留下一些余地，以便采用本书作为教材的同志在必要时可以改变教材的次序和講述的方法。

譬如說，在本书第二卷中可以采用的另一个次序是这样：在講完第九章移动和仿射变換的理論以后，接着先講第十二章的§§1—5和§8第1—3段的內容，直到講完了射影变換的理論，再回过来講第十和第十一章的二阶曲綫和二阶曲面的理論。这时候我們自然可以把第十二章的§§6—7和§8第4段分别插入前两章的适当的地方了。

編者在本书中采用的講述方法，常常是从几何直观出发，尽量利用几何的結果和几何的方法来展开书中的理論。这种講述方法虽然有要求讀者的代数知識較少和便于加强讀者的几何观念的优点，但是終究比較費时。特别对于同时学习高等代数的讀者，他們在第二学期时已經具有了不少代数知識，应該考虑在本課程中利用这些代数知識的問題。因此，接着本书第一卷的四节附录之后，編者在第二卷中又添上了三节附录。在附录中，編者扼要叙述了与本书內容有密切联系的代数理論（例如关于向量空間，矩陣代数，綫性变換和二次齐式的理論），特别着重在闡明这些代数理論如何可以用来簡化正文中的某些几何理論。这种尽量利用讀者已

有的代数知識的講法，可以大大加强解析几何和高等代数两門課程之間的連系，优点是极为显著的。

其次，由于解析几何課程的內容既多又杂，編者在本书的叙述中尽量遵循"該詳則詳，能簡則簡"的原則。在引入一种新的理論的开头，例如在介紹变換的概念和射影平面的概念时，尽可能闡述得詳細些。相反地，对于某些理論的重复部分，就力求叙述得簡洁些。例如移动和仿射变換的共同性質部分，在講述移动的时候說得足够詳尽了，在講述仿射变換时就說得簡单些。又例如在講述二阶曲面的理論时，与二阶曲綫的理論不同的部分說得詳細些，相同的部分就說得簡单些。至于射影空間的解析几何的部分，在同样的原則下，在书中甚至于只写出主要的結果而很少进行論証了。因为編者認为，只要讀者把前面的理論眞正学好了，这一部分理論是并不困难地可以接受的。至于附录中的各节，书上更是尽量簡化叙述，因此在附录 §6 和 §7 中，很多結果的代数証明都沒有写出，留給讀者自己去查閱适当的代数书了。

最后，由于編者的学識和教学經驗不足，本书一定存在很多缺点。这在已經出版的第一卷中編者自己也发現了一些。因此，編者热忱希望讀者提出宝貴的意見，而且特別期待采用本书作为教材的同志的指正。

娄光明　1959 年 9 月

目 录

第九章　移动和仿射变换

§1　变换

我們曾經說过，在几何学中常常把图形看做是由点組成的(点的集合)。因此，当我們研究两个图形之間的关系时，我們常常需要考虑在它們的点之間有什么确定的关系。例如給了两个相等的三角形 ABC 和 $A'B'C'$（图 1）。如果 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 是对应的頂点，則我們有

$$AB=A'B',\quad AC=A'C',\quad BC=B'C'。$$

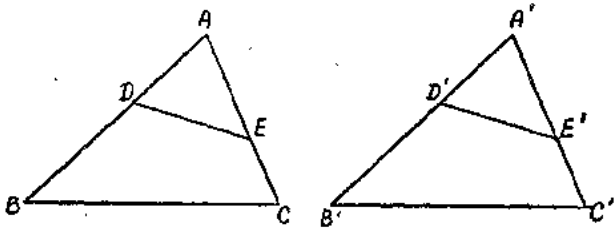

图 1

不仅如此，对于三角形 ABC 中的任何点 D，在三角形 $A'B'C'$ 中总存在它的唯一的对应点 D'，而且对于三角形 ABC 中的任何两个点 D 和 E，它們的对应点 D' 和 E' 还具有使綫段 DE 和 $D'E'$ 相等的性質：$DE=D'E'$。又例如給了两个相似的三角形 ABC 和 $A'B'C'$（图 2）。我們也可以得出类似的結果，只是必須把相等关系改成比例关系。那就是說，如果 A 和 A'、B 和 B' 是对应的頂点，則对于三角形 ABC 中的任何两点 D 和 E，在三角形 $A'B'C'$ 中存在唯一的对应点 D' 和 E'，使得 $DE:D'E'=AB:A'B'$。总

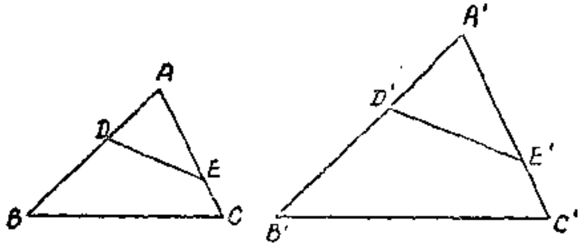

图 2

之，如果一个图形 Φ 与另一个图形 Φ' 相等，則对于 Φ 中的每个点 M，在 Φ' 中存在唯一的对应点 M'，使得图形 Φ 中的每一对点 M_1、M_2 所决定的綫段等于图形 Φ' 中的对应点 M_1'、M_2' 所决定的綫段 $M_1M_2=M_1'M_2'$。至于相似的情形則是 $M_1'M_2':M_1M_2=$常数。

可以換一种方式来表述上面的結果。我們可以把图形 Φ 与图形 Φ' 的相等(或相似)的关系看做一种所謂"变換"，說这种"变換"把图形 Φ 的每个点 M 变成图形 Φ' 的唯一确定的点 M'，同时要求这个"变換"不改变任何两点之間的距离，即图形 Φ 的两个点 M_1、M_2 之間的距离总等于由它們变成的图形 Φ' 的点 M_1'、M_2' 之間的距离(在相似的情形是任何两点之間的距离总乘上同一个固定的比例因子——所謂相似系数)。我們以后將会指出，这种"变換"叫做移动(在相似图形的情形叫做相似变換)。

在自然現象中我們經常可以看到物体形状的各种"变換"，我們举出极为常見的以下两个例子。

在放映电影的时候，灯光把电影胶片上的图形变成銀幕上的图形。这时我們在理論上把电灯(光源)看做一个点 S，把从电灯(点 S) 发出的光看做是沿直綫行进的，因此当光綫照在胶片上的点 M 上时，在銀幕上就有这个点的唯一的一个"象"点 M'，而且点 S、M 和 M' 总在一条直綫上(图 3)。再看一下电灯、胶片和銀幕的位置，通常胶片所在的平面 π 和銀幕所在的平面 π' 是平行

的，而且电灯（点 S）不在这两个平面中的任何一个上。总之，放映电影时所发生的自然现象在几何学上可以这样来描述：給了两

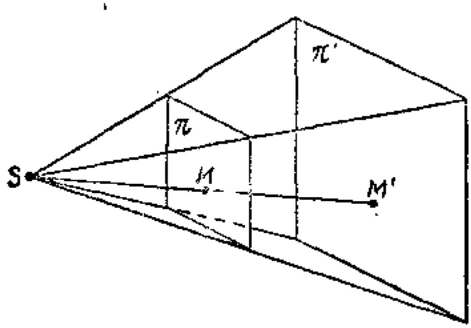

图 3

个平行的平面 π、π' 和不在这两个平面中的任何一个上的点 S。于是对于平面 π 上的任何点 M，直綫 SM 总与平面 π' 相交于唯一的点 M'，我們就說点 M' 是点 M 的对应点。按照这样的規律，对于平面 π 上的一个图形 Φ，在平面 π' 上可以找到由图形 Φ 的点的对应点所組成的图形 Φ'。因此，我們有了一个从平面 π 到平行的平面 π'、把点 M 变成点 M'（和把图形 Φ 变成图形 Φ'）的“变换”，这种变换叫做平行平面間的中心投射，因为这时有一个特殊的点 S，它就叫做投射中心。容易根据立体几何的知識証明，平行平面間的中心投射把一个图形变成与这图形相似的图形，因而它是相似变换。相似系数是綫段 SM' 与 SM 的比值：$SM':SM$。

太阳光照在窗玻璃上，在地面投下一个影子，假定地面很平，我們看到长方形的窗子的影子是平行四边形。在这种自然现象中图形的形狀要改变，所以它不是相似变换。我們从几何方面来描述一下这种自然現象。窗玻璃所在的平面 π 和假定的地平面 π' 是两个相交的平面，太阳光綫假定是平行的直綫（因而是有固定方向的直綫），这些直綫同时与平面 π 和 π' 相交。因此，对于窗玻璃（平面 π）上的每个点 M，照在这个点 M 上的光綫在地面（平面

π')上投下唯一的一个影子点 M'，点 M' 实质上就是通过点 M 而且有固定方向(太阳光方向)的直綫与平面 π' 的交点(图 4)，我們把这个点 M' 看做点 M 的对应点。这种由固定方向的直綫(平行直綫)所产生的、从平面 π 到与它相交的平面 π' 的"变换"叫做相交平面間的平行投射。正如我們所說过的，这种变换会改变图形的形状。但是我們可以用几何方法証明它还具有一些有趣的性質，例如它总把直綫变成直綫，把平行直綫变成平行直綫，而且不会改变平行綫段的比值。

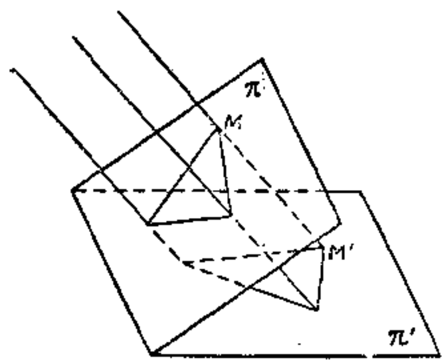

图 4

我們在本章中将要討論一类常見的变換，它包括以上所談的各个例子作为其特殊情形。在討論中，我們将不局限于研究图形的变換，而首先研究图形所在的整个平面或空間的变換。因为这样可以更便于研究变換本身的性質而不至于受到图形的性質的限制。此外，在本节中，为了使定义更具有普遍性，我們提出的将是从点集合到点集合的变換，因为不論是任何几何图形，或者是整个的平面和空間，都可以看做是点集合的特例。

定义 1 假如对于一个点集合 $\mathfrak{M}$ 的每个点 M，在另一个(或同一个)点集合 $\mathfrak{M}'$ 内按照确定的法則存在唯一的对应点 M'，则我們就把从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 使点 M 有对应点 M' 的这种确定的法則叫做从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的一个点变換。当集合 $\mathfrak{M}$ 和集合 $\mathfrak{M}'$ 是同一个集合时，我們說它是从集合 $\mathfrak{M}$ 到自己的一个点变換。

設在变換 F 下，点 M 的对应点是点 M'，我們常常說成是变

换 F 把点 M 变成点 M'，而且使用記号

$$M' = F(M)。$$

这时我們把点 M' 叫做点 M 在变换 F 下的象，而且反过来把点 M 叫做点 M' 在变换 F 下的原象。

定义 2　假如在从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的变换 F 下，集合 $\mathfrak{M}'$ 的每个点 M' 都有原象，即在集合 $\mathfrak{M}$ 內总存在某个点 M，使得 $M' = F(M)$，則变换 F 叫做从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 上的变换，簡单叫做在上的变换。

定义 3　假如在从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的变换 F 下，集合 $\mathfrak{M}$ 的任何两个不同的点 M_1 和 M_2 的象总是不同的，即当 $M_1 \neq M_2$ 时，$F(M_1) \neq F(M_2)$，則变换 F 叫做从集合 $\mathfrak{M}$ 到集合 $\mathfrak{M}'$ 的一一变换。

在变换理論中討論得最多的是在上的一一变换。我們在本章中也只限于討論一类特殊的在上的一一变换。从集合 $\mathfrak{M}$ 到自己的在上的一一变换我們簡单叫做集合 $\mathfrak{M}$ 的变换。

§2　移动和仿射变换的定义和基本性质

1. 移动的定义和基本性質

定义 4　从平面到平面（或者从空間到自身）的一个在上的变换 F，假如不改变任何两个点之間的距离，即当 $M_1' = F(M_1)$ 和 $M_2' = F(M_2)$ 时，总有 $M_1'M_2' = M_1M_2$，則变换 F 叫做一个移动。

从定义知道，移动是在上的变换。我們还可以証明，移动是一一变换。因为根据定义，$M_1'M_2' = M_1M_2$，所以当 M_1 和 M_2 是不同的点时，M_1' 和 M_2' 也必須是不同的点。

为了証明移动的种种性質，需要用到可以从中学几何知識得到的下列結果：1）三个点 A、B、C 不共綫，即 A、B、C 是一个三角形的三个頂点，必要而且只要綫段 AB、BC、CA 中任何两个

之和都大于第三个；2) 三个点 A、B、C 共綫，而且点 B 在点 A 和 C 之間，必要而且只要 $AB+BC=AC$。

定理 1 移动把共綫的点变成共綫的点，把不共綫的点变成不共綫的点。

証明 設一个移动把点 A、B、C 分別变成点 A'、B'、C'。那末当点 A、B、C 共綫而且点 B 在点 A 和 C 之間时，就有 $AB+BC=$ $=AC$。然而根据移动的定义，$AB=A'B'$、$BC=B'C'$、$AC=A'C'$，所以还有 $A'B'+B'C'=A'C'$。因此点 A'、B'、C' 也共綫。其次，当点 A、B、C 不共綫时，綫段 AB、BC、AC 中任何两个之和都大于第三个，因而綫段 $A'B'$、$B'C'$、$A'C'$ 中任何两个之和也都大于第三个，即点 A'、B'、C' 也不共綫。

定理 2 在移动下，直綫的象是直綫，直綫的原象也是直綫。

証明 設一个移动 F 把点 A 变成点 A'，把点 B 变成点 B'。因为移动是一一变换，所以当点 A、B 决定一条直綫 AB（即点 A、B 是不同的点）时，点 A'、B' 也决定一条直綫。然后根据定理 1，我們可以断定，移动 F 把直綫 AB 上的点变成直綫 $A'B'$ 上的点，把直綫 AB 外的点变成直綫 $A'B'$ 外的点。最后，因为移动是在上的变换，直綫 $A'B'$ 上的每个点都有原象，根据定理 1，这些原象必須都在直綫 AB 上。因此，直綫 AB 的象是整条直綫 $A'B'$。同理可以証明，由点 A'、B' 决定的直綫的原象是由点 A'、B' 的原象 A、B 决定的直綫。

定理 3 在空間的移动下，平面的象是平面，平面的原象也是平面。

証明 根据定理 1，一个平面 π 上的三个不共綫的点 A、B、C 在一个移动 F 下变成也不共綫的三个点 A'、B'、C'，我們先来証明平面 π 的象是由点 A'、B'、C' 决定的整个平面 π'（图 5）。

設 M 是平面 π 上与点 A 不同的任意点，通过点 M 引一条直

綫与直綫 AB 和 AC 分别相交于点 P 和 Q(参看图 5)。因为直綫 AB 和 AC 的象分别是直綫 $A'B'$ 和 $A'C'$，所以点 P 和 Q 的象 P'

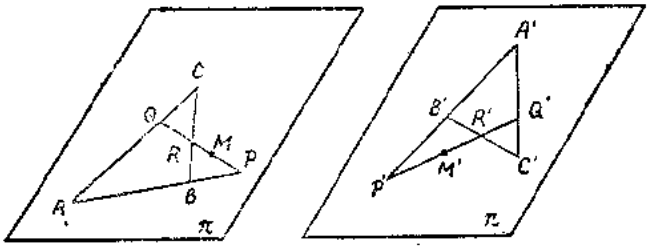

图 5

和 Q' 分别在直綫 $A'B'$ 和 $A'C'$ 上。同理，直綫 PQ 上的点 M 的象 M' 在直綫 PQ 的象 $P'Q'$ 上。因此点 M' 在平面 π' 上，这就証明了平面 π 上的点都变成平面 π' 上的点。然后，因为移动是在上的变换，所以平面 π' 上的点 M' 都有原象。在平面 π' 上对于点 M' 进行同样的作图(参看图 5)，而且使用与上面相类的論証，就可以証明点 M' 的原象 M 在平面 π 上。

同理可以証明，由点 A'、B'、C' 决定的平面的原象是由点 A'、B'、C' 的原象 A、B、C 决定的平面。

定理 4 移动把平行的直綫变成平行的直綫，空間的移动把平行的平面变成平行的平面。

証明 首先，两条平行的直綫处在同一个平面上，因此根据定理 2 和 3，它們变成仍然处在同一个平面上的两条直綫。其次，假如一个移动把两条平行直綫变成两条相交直綫，則就要違背移动不改变距离的定义。因为两条平行直綫的点之間的最短距离不等于零，而两条相交直綫的点之間的最短距离是零。这是不可能的，所以定理的前一部分証明了。至于第二部分則可以同样地来証明。

定理 5 移动在把一个綫段的两个端点变成一个相等的綫段

的两个端点的同时，还把分前一个綫段成已知比值的点变成分后一个綫段成同一比值的点。

証明 設点 A、B、C 变成点 A'、B'、C'。那末由于 $AB=A'B'$、$AC=A'C'$、$BC=B'C'$，同时点 A'、B'、C' 的相对位置也与点 A、B、C 的相对位置相同，因此点 C' 分綫段 $A'B'$ 的比值等于点 C 分綫段 AB 的比值：$\overrightarrow{A'C'}:\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}$。

推論 移动把綫段变成綫段，把射綫变成射綫。

定理 6 移动不改变角度。

証明 考虑組成一个角的两条射綫 OA 和 OB。設一个移动把它們变成也組成一个角的两条射綫 $O'A'$ 和 $O'B'$（图 6）。在射

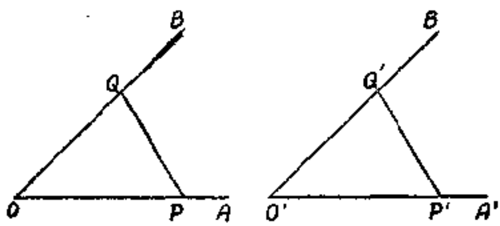

图 6

綫 OA 和 OB 上分别取点 P 和 Q，設它們在同一个移动下变成射綫 $O'A'$ 和 $O'B'$ 上的点 P' 和 Q'。于是因为根据移动的定义，$O'P'=OP$，$O'Q'=OQ$，$P'Q'=PQ$，三角形 OPQ 和 $O'P'Q'$ 相等。因此 $\angle POQ=\angle P'O'Q'$。定理也就証明了。

利用以上所証明的一系列的定理，我們現在可以来証明关于移动的下列基本定理。

定理 7 移动把标架变成同度量的标架，而且把对于前一个标架有坐标 $x, y(z)$ 的点变成对于后一个标架有同样坐标 $x, y(z)$ 的点。

附注 1 定理里的"同度量"是說后一个标架的度量参数分别

等于前一个标架的度量参数(参看第一卷第二章 § 2 第 66 頁)。

証明　为了叙述簡单起見，我們只考慮平面的情形。首先，平面上的一个标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 由坐标原点 O 和一对不共綫的向量(有向綫段) $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 組成。在移动下，它們变成一个点 O' 和一对不共綫的向量 $\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$，即还組成一个标架 $\{O';\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$。其次，因为移动不改变长度和角度，所以我們有

$$|\boldsymbol{e}'_1| = |\boldsymbol{e}_1|,\quad |\boldsymbol{e}'_2| = |\boldsymbol{e}_2|,\ \angle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = \angle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)。$$

然而一个标架的度量参数就由坐标向量的长度和坐标向量之間的角度决定，因此标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 和 $\{O';\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ 同度量。

为了証明定理的第二部分，我們重新画出第一卷第 41 頁上决定平面上的点的坐标的图 28 (图 7)，只是现在在图上用点 E_1、E_2、

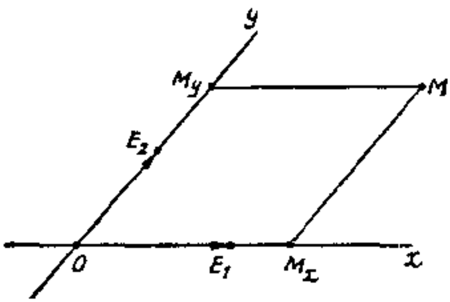

图　7

E'_1、E'_2 分别表示坐标向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}'_1$、$\boldsymbol{e}'_2$ 的終点。于是根据坐标的定义，点 M 的坐标是

$$x=\frac{\overrightarrow{OM_x}}{\overrightarrow{OE_1}}=-\frac{\overrightarrow{M_xO}}{\overrightarrow{OE_1}},\quad y=\frac{\overrightarrow{OM_y}}{\overrightarrow{OE_2}}=-\frac{\overrightarrow{M_yO}}{\overrightarrow{OE_2}},$$

即 x 等于点 O 分綫段 M_xE_1 的比值的負数，y 等于点 O 分綫段 M_yE_2 的比值的負数。同理，点 M' 的坐标也具有相同的性質。然而点分綫段的比值在移动下不变，因此点 M' 对于标架 $\{O';\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ 的坐标与点 M 对于标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 的坐标相同。