

科學圖書大庫

0144

集合、關係與函數

譯者 趙少鐵 黃德華

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧鏗 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十二年五月十二日初版

集合、關係與函數

定價 新台幣 60 元 港幣 9 元

譯者 趙少鐵 國立成功大學數學系教授 **改訂為基價3.10元**
黃德華 美國克拉克大學數學碩士

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱53-2號 電話783686號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鏗 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者

校閱小言

58年暑期接徐氏基金會來函邀本人譯書及校閱譯稿，過去對於徐氏基金會僅有所聞，後蒙基金會創辦人徐氏在台北邀約面談，始悉基金會乃致力發展國家科學，並輔導一般失學青年能在工作之餘自修科學新知，甚為欽佩。

本人執教大學四十餘年，僅從事正規化教育，對失學青年之輔助教育甚少涉及，因之乃欣然同意接受此一工作，並邀學子黃德華、須忠中、柳賢諸君共同效力，期望能藉徐氏基金會之力，對於發展國家科學及輔導失學青年求知之心，略盡一份心力。

本書內容大致分為集合，關係與函數三大部份，這些材料的編排是經過教育專家與心理專家共同研商設計的，不但能增加閱讀速率，且能有效的了解教材。此種程式化自修叢書是為具有中學數學知識和熱望了解數學的“為什麼”而設計的，故本書實為修習傳統數學或現代數學的良好補充讀物。

趙少鐵

民國六十一年八月

原序

吾人所生存的這個世紀是個進步與革命的世紀——尤其是知識方面的進步與革命。而數學更是社會與自然科學革命的重心。數學不但參與了科學的革命工作，同時其本身也在革命。數學教師很快地體會到數學課程——如一般所熟習的代數，幾何，三角，和微積分——都在做適度的改變。由於受到“學校數學研究會”(School Mathematics Study Group)，“大學入學考試委員會”(Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board)，“伊利諾州大學學校數學委員會”(University of Illinois Committee on School Mathematics)，和一些類似的團體所激勵，在過去十餘年裡，中學的近世數學教材及大學的課程均有了改進。

本書編排是綜合了近世數學的材料與最新教育技術的改良成果，此項技術乃提供讀者前所未有地更多且有效的教材。此種為發展最新教材的方法是由本書——集合，關係和函數：程式化的近世數學單元——作為導論。

對於接受傳統數學的教師與學生時常問起下列問題：“近世”數學到底是什麼？它與傳統的數學有何不同？我們為什麼要學習它？它能做些什麼？雖然要確切地解答這些一般性的廣泛問題不是一件容易的事，但是也值得給個較詳盡的解釋。許多近世數學的材料並不是全新的。事實上，只有極少數才是新近創立的，近世數學裡許許多多很重要的概念——諸如集合，關係和函數等的觀念——很可能比人類的有史時期還來得久遠。且十九和二十世紀的許多完整的和介紹性的數學概念，則已是經過三百年研究才得來的，故對吾人而言，“近世”一辭實際上已是十六，十七或十八世紀的發明罷了！“新”數學之所以為近世的，實因其重要性只有本世紀的數學家才普遍予以公認。“新”數學的內涵被廣泛地體認乃由於(1)本世紀在數學與科學上大量驚人的研究成果和(2)層出不窮的技術革新環境，所促使。

具創見的數學家的重要工作是能創立定理並給予證明，為達此目的，很顯然地必須研究許多語言以先給名辭訂下適切的定義。在近代的數學史上，

吾人發現對嚴格邏輯的推理方法的重要性已被日漸重視，那種應用公設，定理與證明的步驟已被廣泛地採用於各類數學上，而不再僅限於使用在歐氏幾何學上了。

邏輯系統應用到代數學上的成果最為豐碩，因其將更多的注意力集中在代數的結構上，有助於減少人們把代數學只視為是解方程式的錯誤觀念，因而改正了對運算發展的過份重視。但此並非對解方程式和數系的運算的技巧視為不重要，相反地，若對解題能力和運算能力的應用能徹底地了解，則它們還是非常有效用的。倘不能了解這些解題與運算的個中道理，則人們便會誤認數學是一套深奧不可解的怪把戲。因為數學在技術上革新的重要發展，使得對自動化理論和數位電子計算機（電腦）不再具有任何新奇之感。想把數學大量地應用到經濟學，生物學，社會學和心理學上，並非只單純地將舊“把戲”移植到新的事物上可以得到的。

如前文所述，由於要求進步，許許多多新觀念應運而生且也被廣泛地採用。在數學裡可能沒有任何其他的概念能比“集合”的概念用來了解許多數學部門的結構更為有價值也更為重視。使用此種概念不但有助於吾人對數學結構有深切的了解；同時對數學的全貌及其效用也有深入的領悟。簡言之，集合的概念對簡化和統一數學的工作均大有助益。雖然本書對集合的觀念，所使用的符號和其一些代數關係僅作介紹性的論述，但須牢記這些概念已足夠應用到其他的數學部門上——諸如幾何學，微積分學，或然率等等。由於在理論上吾人可使用集合和其相關的屬性（或成員性）能定義出其他數學上必要的概念*，即可見此概念的重要性了。

當讀者對集合的語法和記法有了認識，本書才用漸進的方法介紹一些數學所特有的推理程序，進而利用集合語法對一般已知的關係和函數概念訂出嚴密的定義。由於大學裡的數學漸漸地要求必先具有三、四年之中學數學基礎，且能了解集合、函數和關係之知識，故本書乃盡力用整體性的方法來介紹這些題材。

要想很成功地讀完這種程式化的教本，需要讀者具有（1）求得了解數學上“為什麼”的慾望和（2）二年中學代數的知識。

本書各類圖表的製作只需使用作圖紙，直尺和圓規。繪製文氏圖用平面圖即可。

*參閱 T. S. Botts and L. Pikaart, "Mathematics from the Modern Viewpoint", The Mathematics Teacher, LIV, No. 7, 1961, 498-504.

本書使用法

本書是為讀者自修而編著的，全書內容分為許多程式單元或題號，讀者如能逐次按題研究和解答，當可達到預期的有效學習效果。

本書內容將按下列形式編排：

-
- 1 為幫助讀者能更有效地學習數學，吾人把新的知識內容按自修程式分題予以介紹。這些知識內容是按問題與答案的形式分成許多題號排出，以使讀者對其更加容易_____。

學習

-
- 2 如此每個程式單元或_____將為讀者提供仔細地閱讀和用筆寫下答案來的機會，然後讀者可以用該題號下的標準答案核驗自做答案的正誤。

題號

通常讀此類自修程式書籍的最有效方法是先用張紙，把題號下答案部分遮蓋起來，再仔細地閱讀和研究該題號的內容。在學習每個定義和公式時如能完全了解，再依本書的安排逐題研讀下去，終必能獲取許多新知識。

每當讀完題號的問題立即將其答案很完整地寫在另外一張紙上，然後將所用遮蓋的紙往下移動，一直到下一題號的答案前，用露出的本題號正確的解答核驗自做答案的正誤。因後面的題號內容多用到前面各節的材料，是以讀者在答錯每一題號時，必須重新仔細研讀該題號一遍。

本書所設“任選題號”乃提供讀者對某概念有更多的經驗或較困難的問題與應用，若無充裕時間可以省略不讀，如讀者興趣央然，最好還是試試。

牢記下列諸項重要原則

1. 首先細讀各題號的問題。
2. 寫出很完整地的答案。

3. 用書上的答案核驗自做答案的正誤。
4. 若有錯誤發生，先改正過來再研讀下一個題號的問題。
5. 學習必須主動，在閱讀書上的答案之前，讀者必須先寫下自己的答案來，用以回答該題號的問題。

複習

爲使讀者能有機會複習此種程式化教本的材料，著者特地做了下列的準備工作：(1) 在適當的段落裡加上複習題號，此“複習”二字是在題號前加“*”號表明的、這些複習題號也被收在目錄裡。若讀者不能正確地解答某複習題號，則必須先重新細讀此複習題號前的相關材料，直到完全了解後才可繼續讀下一組的題號。(2) 每節之後都設有自我測驗習題，其答案附於書後。要等做完全部習題才可繼續研讀下面的材料。倘不能正確地解答出大部份的習題，則必須重新細讀與這些被答錯的習題有關的材料。(3) 每個具有主要概念的題號內容均收於書後的索引內。

自修性程式化教本的發展與考驗

自修性程式化教本之所以與一般教本不同乃因前者爲求發揮最大教學功能而設計的，若程式化結構正當，則讀者不需任何其他借助，只要能按其使用說明仔細閱讀，即可學習到其全部內容。

集合、關係與函數這本書在編寫期中，曾邀約全美好幾所中學和大學的三百多位學生接受測驗，著者曾參考這些學生們對題號問題的解答三度修改此程式化教本的原稿。是以本書至少可說是由學生來編寫的，因本書完全是依據學生的測驗結果而編訂的。

這些“學生著者”可分爲下列諸組：

1. 參加暑假近世代數講習班的中學數學教師；
2. 大學先修班的中學學生；
3. 參加暑假班的中學學生；
4. 參加每週二小時的程式化數學加強班的中學學生；
5. 初入大學主修數學的學生；
6. 參加一般數學課程的大學學生。

讀完本書究竟需時多久？上述一般學生大約需時 34 小時；較聰慧的學生大約需時 17 小時；較遲鈍的學生大約需時 52 小時。以上所說時間包含做完全部自我測驗問題所需時數。

下表列舉會使用過本程式教本的五組人員的平均測驗成績和答錯的平均百分比率。

表

人員分類	平均測驗成績	答錯的平均百分比率
1. 中學數學教師	88	6
2. 大學學生	90	5 (大約數)
3. 學近世數學的都市 裡中學學生	90	2
4. 學傳統數學的都市 裡中學學生	86	6
5. 自願參加特別班的 鄉間中學學生	93	4

這些參加測驗的學生很少從前學習過集合論，而能有如此好的成績表現，這說明本程式化教本是位相當成功的教師並不為過份。

Wendell I. Smith
J. William Moore

數的解說

1. 複素數包含所有實數與虛數，並可以 $a + bi$ 形式表示之，其中 a 和 b 是實數而 i 為具有 $i^2 = -1$, ($i = \sqrt{-1}$) 的數。當 $b = 0$ 時，此即為實數，否則為虛數。
2. 實數包含所有有理數及無理數。
3. 有理數含有所有整數與分數。有理數乃一能表為 p/q 形式的數，其中 p 和 q 為二整數且 $q \neq 0$ (但 q 可以為 1)。有理數包含循環小數及有限小數。

例： $4, 2/3, -7/8, 5/1, 12/6, 123, .444 \dots$

4. 無理數乃非有理數的實數[▲]。

例： $\sqrt[3]{2}, \sqrt{5}, \pi, \frac{1}{\sqrt{3+1}}$

5. 有理數包含所有整數與分數。
6. 分數乃可表為 p/q 的有理數，其中 $q \neq 0$ 。
7. 整數可為負的也可為非負的：

$\{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$ 。

8. 負整數乃是 $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ 。
9. 非負整數包含零及正整數：

$\{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$ 。

10. 零是即不為正也不為負的整數。
11. 正整數乃自然數，計物數，或除零以外的全體算術數，即 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。質數集合乃正整數集合的一個重要子集合。質數乃是 大於 1 且不能被 1 及其本身外的任何正整數整除的正整數。

▲ 原書只用“數”字，此處用“實數”係譯者所改。

目 錄

第一部份 集合

I 集合：敘述與記法	1
敘述與屬性	1
記法	4
子集合	14
集合字，數字	21
集合的對等及等式	25
自我測驗 I	28
摘要及應用	30
複習題號 28, 29, 33, 42, 55, 59, 81, 82, 83, 96, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 147, 148	
II 集合之運算	43
餘集合：文氏圖，分割和分離集合	43
交集	47
聯集	50
自我測驗 II	62
集合運算的性質：結合，交換和分配的性質，對偶原理 De Morgan 氏定律	65
與算術運算之比較	87
兩集合之差	91
摘要與應用	95
自我測驗 III	97
複習題號 216, 217, 218, 219, 220, 244, 245, 246,	

247, 256, 277, 278, 286, 287, 288, 289,
290, 291

III 方程式與不等式100

開放語句與解集合.....	100
解集合之圖形.....	103
集合建造記法.....	104
不等式之性質，定義與運算.....	106
絕對值.....	117
平方根與絕對值.....	131
自我測驗 IV	138
複習題號 350, 362, 440, 441, 442, 448, 449, 450, 451, 470, 471, 472	

IV 總摘要與其應用141

自我測驗 V.....	148
-------------	-----

第二部份 關係

V 關係151

有序偶對.....	151
有序偶對之圖形.....	154
笛卡兒乘積.....	171
笛卡兒乘積之推廣， $U \times U \times U$	181
自我測驗 VI.....	185
軌跡：圖形，解集合之聯集與交集.....	188
二元關係：圖形，定義域，值域，卡氏乘積之數類不同 的關係，初等代數之關係.....	200
自我測驗 VII	226
複習題號 536, 537, 582, 603, 604, 605, 606, 607, 626, 627, 628, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 680, 704, 705, 706, 736,	

第三部份 函數

VI 函數229

 描敘法與表示法：鉛直綫測驗法，定義，記法.....229

 定義域，值域.....241

 對應法則，記法.....245

 映像.....252

 函數的值.....266

 合成法，合成函數.....268

 自我測驗 VII.....284

 特別函數：機械的，郵資的，常數的，恒等的，
 方括號的.....289

 反函數和關係.....297

 對應：一一對應，多一對應，一多對應.....308

 自我測驗 IX.....314

 複習題號：764, 765, 777, 778, 779, 780, 847, 848,
 916, 917, 950, 951, 952, 953, 954, 955,
 956

第四部份 總複習與摘要

VII 總複習317

自我測驗答案338

參考書目錄.....360

索引.....363

第一部份 集合

本書伊始，先介紹集合（事物的蒐集）的概念，續討論集合在數學裡的語法、符號和記法。

當集合概念漸漸加強，再討論集合間的一些關係；諸如聯集，交集與餘集的運算法則，在某些方面與實數裡的加法，乘法運算法則有相似處。而後在討論方程式及不等式時，集合記法的優點便更為明顯。最後，再列述些用圖像和文氏圖（Venn diagrams）來表示數學與非數學的集合的重要性。

I 集合：敘述與記法

敘述與屬性

-
- 1 集合乃一組事物的蒐集。如博物館裡的一組繪畫，一群野鵝或自 1 至 15 的一組自然數等均為一組事物之 _____ 的例子。

集合

- 2 一組實物——如書本、樹木、數目與點等的蒐集也為集合。是以你現有的書本即是書本的 _____；白朗先生的果樹園即是樹木的 _____；1, 2, 3, 4 等四數形成數目的 _____。

集合 ， 集合 ， 集合

- 3 集合裡的每個成員均稱之為元素。例如由小華、小明、小英和小俊四位男孩組成一集合，則此四位男孩中的每位均為此集合的 _____。

元素（或成員也可）

- 4 集合可有幾個或許多元素（或成員）。（吾人常將“元素”，“成員”

，“是其成員”，“是其元素”互換替用）。

(1) 試問由 1, 2, 3, 4, 5 等整數形成的集合共有幾個元素？

(2) 試問由英文字母形成的集合共有多少成員？

(1) 5 ; (2) 26

5 集合可有有限或無限個元素。直覺地說來，如果集合的元素可以完全被數算出共有多少個或者根本不含任何元素，則此集合稱為有限，否則稱之為無限。

試將下列諸集合按有限與無限分類之：

- (1) 由一年裡諸月份所形成的集合
- (2) 某年份芝加哥城電話簿所列電話用戶的集合
- (3) 由全體正整數所成的集合
- (4) 諸位一隻手上的指頭的集合
- (5) 一直線上所有點的集合
- (6) 有四隻眼睛的人類的集合

(1) 有限 (2) 有限 (3) 無限 (4) 有限 (5) 無限 (6) 有限

6 當吾人計數集合共有多少元素時，惟有下列兩種情況之一為可能：

1. 當集合裡每個元素均被計數過一次後，能得一確定的數目；或則
2. 無法得此確定數目，此乃因總有許多元素尚未被計數列。

(1) 如為第一種情況時，吾人稱此集合有 _____ 個元素。

(2) 如為第二種情況時，吾人稱此集合有 _____ 個元素。

(1) 有限 (2) 無限

7 由小於 100 的正整數組成的集合，可以 $\{1, 2, \dots, 99\}$ 表示之。此集合是一 _____ 集合的例子，此集合恰有 99 個元素。空白處選“有限”或“無限”一詞填入。注意：三個點連用，乃表明此集合後面所省略的各元素仍按前面所列出諸元素的法則繼續下去。

[有限]

- 8 由大於100的正整數組成的集合，可以 $\{101, 102, \dots\}$ 表示之。此集合是一_____集合的例子。空白處選“有限”或“無限”一詞填入

無限

- 9 如以表列表示集合的各元素，則元素之表列次序無關重要。例如，集合 $\{a, b, c, d\}$ 與集合 $\{c, b, a, d\}$ 完全相等。

- (1) 試問由0, 2, 1, 組成的集合與另一表列為0, 1, 2的集合是否完全相等？
 (2) 試將 r, t, a 三英文字按應有的英文字母順序表列成一集合。試問此集合是否不同於集合 $\{t, r, a\}$ ？

(1) 是的 (2) $\{a, r, t\}$ ，不是

- 10 在計數集合裡元素共有多少時，吾人絕不可重覆計數同一成員。如成員被表列為 $\{0, 1, 2, 1, 0\}$ ，但實際此集合只有三個元素，即0, 1和2。

- (1) 集合 $\{2, 1, 2, 1, 3, 1, 3\}$ 共有多少元素？
 (2) 試表列出這些元素。

(1) 3 (2) 1, 2, 3

- 11 若集合可以沒有任何元素，此集合的表列中將無任何元素，此集合被稱為空集合。吾人用 ϕ 表此空集合。

注意： ϕ 是北歐語字母而非希臘字母 ϕ (phi)。吾人稱此符號為“空集合”。

- (1) 若一集合是由就任過美國總統的婦女所組成，問此集合共有多少成員？此集合是否可稱為空集合？
 (2) 在同一平面上兩條平行直線交點所成的集合是否為空集合？又同一平面上兩條相交直線的交點所成的集合是否為空集合？

(1) 無，是的 (2) 是的，不是

- 12 如同在平面幾何學裡點和直線均為未定義的名詞一樣，吾人也可對元素和集合不賦以數學地定義，只是直覺地認定集合是一組事物的蒐集，但可以使人明確決定任何特定事物是否屬於此集合。

例：

- (1) 試問 74 是否屬於能被 4 整除的整數所成的集合？91 是否屬於此集合？又 48 是否屬於此集合呢？

注意： a 可被 b 整除乃表示當 a 被 b 除時其餘數為 0 之意義。

- (2) 試問杜魯門是否為美國總統的集合的成員？

(1) 不是，不是，是的 (2) 是的

- 13 當一組事物組成一集合，通常此集合裡的各事物都具有某些共同特性，正整數集合即為一例。

但是，集合所含事物也可無很明顯的共同特性，如以 $\sim, R, ?$, 8 所成之集合即為一例。

試以上述說法決定下列四個表列何者可為集合？

1. $+, x, -, \sqrt{\quad}, \Delta, \square$
2. 知更鳥, 25, 椅子
3. 介於 2 與 4 間的所有數
4. 在 1, 2, 3 表列中的所有元素

全都是

記法

- 14 吾人常用 $a \in A$ 的特殊記法，表示某事物是為某特定集合的成員。（此記法讀作“ a 為集合 A 的一元素”，“ a 屬於集合 A ”，“ a 為集合 A 的一成員”。）試將記法 (1) $b \in A$, (2) $x \in B$, (3) $4 \in R$ 讀出之。

注意：吾人採用希臘字 ϵ (epsilon) 表示集合的屬性。

- (1) b 為集合 A 的一元素, b 屬於集合 A 或 b 為集合 A 的一成員。
 (2) x 為集合 B 的一元素, x 屬於集合 B 或 x 為集合 B 的一成員。
 (3) 4 為集合 R 的一元素, 4 屬於集合 R 或 4 為集合 R 的一成員。

15 吾人用 $b \notin A$ 表示 b 非為集合 A 的一元素。 ϵ 上所加斜劃表示否定之意。

試將“ d 非為集合 S 的一元素”用正確記法表之。

$$d \notin S$$

16 若集合 A 為由完全平方數所組成, 則 $1 \in A$, $2 \notin A$, 此因 1 為完全平方數而 2 則不是完全平方數。

試以 ϵ 或 \notin 填入下列各空白處:

- (1) 3 ___ A (2) 4 ___ A (3) 9 ___ A (4) 15 ___ A (5) 16 ___ A

- (1) \notin (2) ϵ (3) ϵ (4) \notin (5) ϵ

17 下列兩法為常用的集合表示法:

- 列表法: 將集合各元素列舉出或表列出, 並以逗點分隔各個元素, 而將全體用大括弧括起來。如 $\{2, 4, 6, 8\}$ 。
- 規約法: 以式子或文字列述集合各元素。在前法中之例 $\{2, 4, 6, 8\}$, 依本法可述之為小於 10 的正偶整數的集合。

試改用正確的列表形式表示由為首的前五個英文字母所成的集合。

$$\{a, b, c, d, e\}$$

18 使用大括號括起集合所有成員的名字。例: $\{1, 2, 3\}$ = 由 $1, 2,$ 和 3 等元素所組成的集合。

用正確地大括弧括法填入下列空白處: _____ = 由小於 5 之正整數所組成的集合 (1 為第一個正整數)。

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

注意: 0 非為正整數。