管理数学方法

张盛开等编著

机械工业出版社

管理数学方法

张盛开等编著

机械工业出版社

本书通过大量的实际例题详细地介绍了管理科学中常用的数学方法，在介绍基本原理的同时解决了如何应用的问题。内容包括预测方法、对策方法、决策方法、排序方法、存贮方法、线性规划、投入产出、统筹方法和价值工程等九个部分。这些方法都是从实际问题中抽象出来并经过实践检验的有效管理方法，也是现代管理中必不可少的管理方法。本书可供管理干部以及大专院校有关专业师生学习和参考。

管理数学方法

张盛开等　编著

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32・印张 10 1/8・字数 267 千字

1985年9月北京第一版・1985年9月北京第一次印刷

印数　00,001—22,600・定价 2.35 元

*

统一书号：15033・6148

前　言

整个科学技术发展史是一部人类文明的社会历史，是人们从必然王国向自由王国过渡的历史。在这样的历史进程中，人们为了生存和生活就必须同大自然进行斗争，进行生产，有生产当然就有管理。长期以来，在不同的历史条件下，根据生产发展水平的高低，人们总是以各种不同形式，用不同的管理方法对人类赖以生存的生产体系进行管理。

随着科学的发展，生产手段与生产技术越来越先进，人们对自己所管理的企业单位的管理方法也在不断地更新，这种更新是随着科学技术进步而加速的。对企业的管理方法有科学根据，有严谨的数学理论，有精确的计算方法，有适应生产力发展的经济政策与手段，就是人们所说的管理科学方法。

本世纪三十年代以前，管理科学发展速度相对说来较慢。在那以前人们对自己事业的管理一般还是沿袭着传统的办法。二次大战以后，情况发生了变化，特别是由于电子计算机的出现，使科学技术发展的速度产生了飞跃。客观现实要求企业的领导者和组织者采用先进的管理方法，合理使用资源和力量，以求获得较大的经济效益。于是，一些崭新的管理系统科学方法应运而生，逐渐形成了有体系的管理科学方法，这就是常说的科学管理。

管理系统的科学方法（或运筹管理方法），是用数学理论对客观事物的内在联系进行定量分析的方法，它与可行的政策一起构成了一个管理系统。本书所介绍的预测方法、对策方法、决策方法、排序方法、存贮方法、线性规划、投入产出、统筹方法、价值工程，都是上述系统的重要组成部分。

书中的实例较多，其中很多例子都是管理中的实际问题。

全书由张盛开主编。预测方法和决策方法由赵景柱和叶田祥编写；决策方法、排序方法和存贮方法由张盛开编写；线性规划

和投入产出由刘文龙编写；统筹方法由周士风编写；价值工程由程坦编写。

本书是根据编者在东北运筹管理学会举办的科学管理方法学习班授课的讲义改编成的。由于时间仓促，加上水平有限，书中错误在所难免，请读者批评指正。

编者

1984年12月

目　　录

第一章　预 测 方 法

一个好的管理者，必须能及时地做出好的决策，而决策是以预测为依据的。只有预测得准确无误，才能够及时地做出正确的决策。

所谓预测，就是根据现已占有的资料估计未来。科学的预测方法是运用科学知识和手段，根据已知推测未知。

现代经济活动在量及其质的方面时刻都受到新的科学技术的影响。目前，科学技术日新月异地发展，新的科学技术从出现到应用所需要的时间越来越短。这样，预测的地位就越来越显得重要，也越来越为众多的人们所了解和重视。可以毫无夸张地说，从事任何一项现代经济活动，离开科学的预测都是无法获得成功的。

§1　预 测 的 分 类

由于预测应用具有广泛性、复杂性和多样性，以及当前有关预测的研究开展得又很活跃，所以预测方法种类繁多，不胜枚举。但常用的预测方法只有十几种，其余的预测方法都是由这十几种预测方法演变而来的。

如果按时间分类，那么预测可以分为短期预测、中期预测和长期预测。所谓短期预测一般是指一年或一年内的预测，而中期预测和长期预测是指三年到五年，甚至十年到二十年以上的预测。但是，短期预测、中期预测和长期预测的划分并无固定标准。

如果按预测对象来分，预测方法可分为市场预测、技术预测、社会预测和军事预测等。

如果按数学观点来分，预测方法可分为数学预测方法和非数学预测方法。本书介绍的是数学预测方法。数学预测方法可分为内部和外部两类。内部预测方法是把过去和现在的发展规律继续

到将来，如移动平均数方法和指数平滑法等属于内部预测方法；而外部预测方法则是对被预测现象与其它相关现象的关系加以分析，进而来估计被预测现象的发展规律，如计量经济学预测方法和回归分析预测方法等属于外部预测方法。

§2 回归分析预测方法

回归分析是一种处理变量之间相互关系的一种数理统计方法。这种方法用途很广，历史也比较长，但用于预测的时间还是比较短的。回归分析主要解决以下两个方面的问题：

1. 确定几个特定的变量之间是否存在相互关系，如果存在的话，找出它们之间合适的数学表达式；

2. 根据一个或几个变量的值，预测另一个变量的取值，并且求出预测所能达到的精确度。

回归分析预测的种类主要有一元线性回归预测、多元线性回归预测和非线性回归预测。

2.1 一元线性回归预测

如果只有一个变量影响被预测对象，且该变量与被预测对象成线性关系，那么可以用一元线性回归分析法来进行预测，这种预测方法称为一元线性回归预测方法。

一元线性回归预测的基本公式为

$$\hat{y} = a + bx \tag{1-1}$$

其中 $\hat{y}$ 为预测值，a 和 b 为回归系数，x 为变量。

(1-1) 式还可以写成如下形式

$$y = a + bx + u \tag{1-2}$$

其中 y 为实际值，u 为预测误差值（简称为误差）。

显然，预测方程 (1-1) 的精度越高，误差 u 将越小。

一元线性回归预测问题的一般提法是：如何根据已有的 n 组观测值 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \cdots, n$) 确定回归系数 a 和 b，使误差的平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2 \tag{1-3}$$

达到最小。

由数学分析中的极值原理知，要使S达到极小，只需在(1-3)式中分别对a、b求微商，令它们等于零。于是a、b满足

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0 \tag{1-4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)x_i=0 \tag{1-5}$$

由（1-4）得

$$na=\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i$$

所以

$$a=\bar{y}-b\bar{x} \tag{1-6}$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \tag{1-7}$$

$\bar{x}$，$\bar{y}$分别为x_i，y_i（$i=1,2,\cdots,n$）的平均值。由（1-5）得

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

将（1-6）和（1-7）代入上式，经整理可得回归系数b的计算公式

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{1-8}$$

由于（1-6）和（1-8）中的所有量都可从观测数据中得出，

所以回归预测方程（1-1）就可确定。

前面已经指出，一元线性回归预测方程（1-1）只对具有线性关系的两个变量成立。而两个变量之间的线性相关程度是用相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \tag{1-9}$$

来衡量的。

显然有

$$0\leqslant|r|\leqslant 1$$

且$|r|$愈小，x与y之间的线性相关程度愈小；反之，$|r|$愈大，x与y之间的线性相关程度愈大。必须注意，相关系数只表示x与y的线性关系的密切程度。当$|r|$很小，甚至等于零时，并不一定表示x与y之间不存在其它关系，而只是表示x与y之间的线性关系很弱。

通过（1-1）式可以得到预测值$\hat{y}$，除此之外，还要知道实际值与预测值$\hat{y}$的差别有多大。同一个x，实际的y值按一定的分布波动（波动规律在一般情况下都认为是正态分布），如果能算出波动的标准离差，回归方程的精度即可给出。标准离差由下式给出

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2} \tag{1-10}$$

由正态分布的性质知，实际值y与预测值$\hat{y}$有如下关系：

实际值y落在区间$[\hat{y}-\sigma,\ \hat{y}+\sigma]$内的概率约为0.68；

实际值y落在区间$[\hat{y}-2\sigma,\ \hat{y}+2\sigma]$内的概率约为0.95；

实际值y落在区间$[\hat{y}-3\sigma,\hat{y}+3\sigma]$内的概率约为0.99。

(1-11)

由此可见，σ 越小，则由回归预测方程预报 y 的值就越精确。

例 1 文山公司在 1979～1983 年中某商品的实际销售情况如表 1-1 所示，试预测 1984 年度的销售值。

表 1-1

年度	编号x_i	实际销售数y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1979	1	58	58	1
1980	2	62	124	4
1981	3	69	207	9
1982	4	74	296	16
1983	5	85	425	25
Σ	$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 348$	$\sum x_i y_i = 1110$	$\sum x_i^2 = 55$

由（1-8）得

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)}{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1110 - \frac{1}{5} \times 15 \times 348}{55 - \frac{1}{5} \times 15^2}$$

$$= 6.6$$

由（1-6）和（1-7）得

$$a = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i - b \cdot \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \cdot x_i$$

$$= \frac{1}{5} \times 348 - 6.6 \times \frac{1}{5} \times 15$$

$$= 49.8$$

所以，预测方程（1-1）为

$$\hat{y} = 49.8 + 6.6x$$

由上式可得1984年度的销售商品的预测值为

$$49.8+6.6\times 6=89.4$$

相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)(y_i-69.6)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-69.6)^2}}$$

$$=0.98$$

可见 x 与 y 的相关程度是很大的。

标准离差

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2}=1.65$$

所以由（1-11）知：

实际值 y 落在 $[\hat{y}-\sigma,\ \hat{y}+\sigma]=[89.4-1.65, 89.4+1.65]$ 内的概率约为 0.68；

实际值 y 落在 $[\hat{y}-2\sigma,\ \hat{y}+2\sigma]=[89.4-3.30,\ 89.4+3.30]$ 内的概率约为0.95；

实际值 y 落在 $[\hat{y}-3\sigma,\ \hat{y}+3\sigma]=[89.4-4.95,\ 89.4+4.95]$ 内的概率约为0.99。

2.2 多元线性回归预测

如果预测值 $\hat{y}$ 不是仅依赖于一个变量，而是依赖于两个或两个以上的变量，且预测值与这些变量的关系为线性关系，那么可以用多元线性回归分析进行预测。这种预测被称为多元线性回归

预测。

多元线性回归预测的基本公式为

$$\hat{y}=a_0+a_1x_1+\cdots a_nx_n \tag{1-12}$$

其中 $\hat{y}$ 为预测值，a_0，a_1，…，a_n 为回归系数，x_1，x_2，…，x_n 为变量。多元线性回归预测方程（1-12）中的回归系数也是通过最小二乘法求得的。下面以二元线性回归预测方法为例来说明多元线性回归预测方程（1-12）的一般求法。

设 $\hat{y}$ 为实际值，则二元线性回归预测基本公式为

$$\hat{y}=a_0+a_1x_1+a_2x_2 \tag{1-13}$$

其中 a_0，a_1 和 a_2 用最小二乘法确定，即选取 a_0，a_1 和 a_2 对于已有的几组观察值 $(x_{1i},\ x_{2i},\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，使得

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_{1i}-a_2x_{2i})^2$$

达到极小值。故 a_0，a_1 和 a_2 满足

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_{1i}-a_2x_{2i})x_{1i}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_{1i}-a_2x_{2i})x_{2i}=0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2b_1+\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)b_2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y}) \tag{1-14}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)+\sum_{i=1}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y}) \tag{1-15}$$

其中 $\bar{y}$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 分别为 y_i，x_{1i}，x_{2i}（$i = 1, 2, \cdots, n$）的平均值，即

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$$

为简化起见，令

$$L_{ks} = L_{sk} = \sum_{i=1}^{n} (x_{k} - \bar{x}_k)(x_{si} - \bar{x}_s)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{si} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_{si}\right)$$

$$k, \quad s = 1, \ 2 \tag{1-16}$$

$$L_{ky} = \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_k)(y_i - \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$k = 1, \ 2 \tag{1-17}$$

于是由（1-14），（1-15）解得

$$a_1 = \frac{L_{1y}L_{22} - L_{2y}L_{12}}{L_{11}L_{12} - L_{12}^2}, \quad a_2 = \frac{L_{2y}L_{11} - L_{1y}L_{21}}{L_{11}L_{12} - L_{12}^2} \tag{1-18}$$

常数项 a_0 由下式确定

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}_1 - a_2\bar{x}_2 \tag{1-19}$$

将（1-18），（1-19）代入（1-13）即得二元线性回归预测方程。

2.3 其它回归预测

若预测值与它所依赖的变量不是线性关系，则不能直接运用线性回归预测。但经过变量替换后，即可采用线性回归预测方法。如

$$\frac{1}{y} = a + be^{x} \tag{1-20}$$

若令

$$\frac{1}{y} = y', \qquad x' = e^x$$

则（1-20）化为

$$y' = a + bx'$$

这样对上式就可采用线性回归预测方法了。

又如

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

若令

$$x_1 = x, \quad x_2 = x^2$$

则上式化为

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

此式即可直接采用线性回归预测。

§3 计量经济学预测方法

§2 中介绍的回归预测方法展现了自变量对预测变量的制约关系，但预测变量对自变量的反馈作用以及在多变量回归中自变量之间的关系并未得到反映。为同时揭示各个变量之间的上述两种关系，以联立方程式的形式再现各种经济量的因果关系而进行的预测称为计量经济学预测。其中包括的系数，常数等数值是各种经济量之间相互关系的具体表现，所以被称为预测模型的结构参数，或简称为参数。

计量经济学是本世纪三十年代以后发展起来的一个新的学科。虽然它的历史不长，但由于它能够比较实际地揭示变量之间错综复杂的关系，所以它的发展也较快，并作为一种预测方法被广泛地应用于实际预测问题中。

计量经济学预测方法没有什么固定的格式，它主要包括四个连续步骤：建立模型，估算参数，验证理论，使用模型预测。下面通过研究某种商品的需求量与家庭收入，商品价格及家庭人口的关系来介绍计量经济学预测方法的一般过程。

表 1-2 是 1979 年到 1983 年的收入和对某种商品的需求量之间的关系表。图 1-1 是根据表 1-2 的数据而得到的。从表 1-2 和图

表 1-2

年度	收入 I（元）	需求量 R（个）
1979	100	20
1980	120	21
1981	140	24
1982	160	25
1983	200	30

1-1 可以看出，需求量 R 与收入 I 基本上是线性关系且成正比关系。所以可以采用直线 l 来加以研究。这样做，一方面是使得数学处理容易，预测方便；另一方面是由于引起需求量变动的原因不止一个，除收入 I 之外还有其它的因素，所以不能简单地用收入的多少来确定需求量的多少。读者看过本节之后，会很容易地理解这一点。

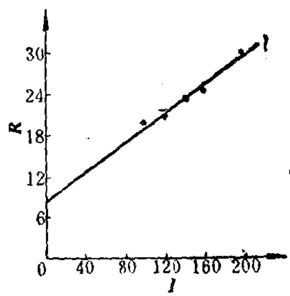

图 1-1

表 1-2 并未反映出各年价格变动对需求量的影响。为找出这个影响，还要知道不同阶层在相同价格下的需求量。如在表 1-2 中，收入为 120 元时需求量为 21 个，如果各种阶层的家庭调查结果是，收入 120 元的阶层的需求量为 22 个，那么可以认为表 1-2 中收入 120 元时需求量只达到 21 个而没有达到 22 个正是价格上涨的结果。这就有可能把收入对需求量的影响和价格的变动对需求量的影响分清楚了。

表 1-3 是各阶层家庭收入调查中与表 1-2 的有关数字相对应的结果。由表 1-3 可看出，需求量 R 与收入 I 满足如下关系

$$R = 10 + 0.1 I \tag{1-21}$$

假定表 1-3 是反映 1981 年的情况，则表 1-3 价格状况和表 1-2 中 1981 年度价格状况一致。那么其余年度的价格状况如何呢？表 1-4 给出了 1979 年至 1983 年该商品的价格表。

对比表 1-2与表 1-3会发现，表 1-2 中的 1980 年和 1982 年度