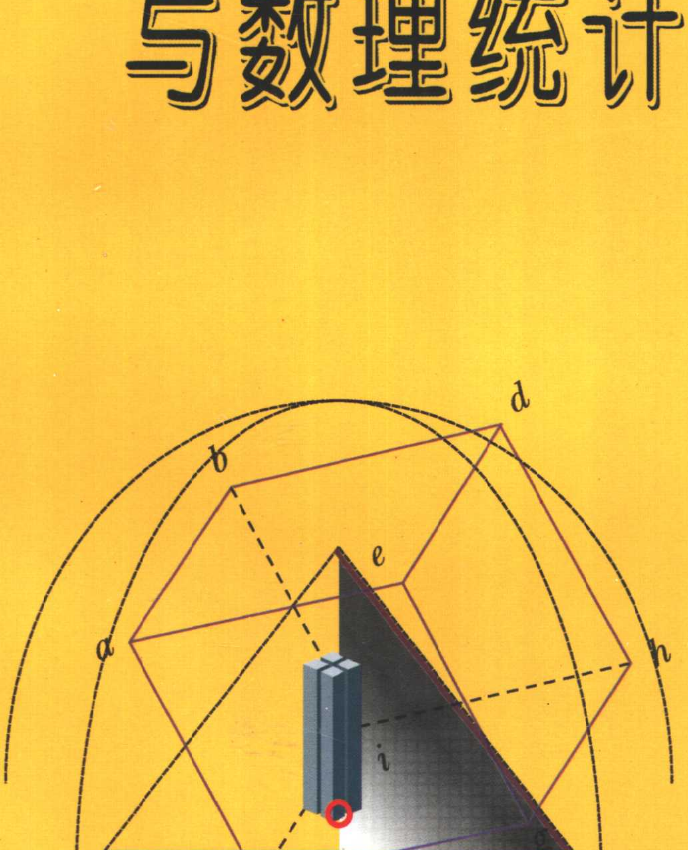
孙清华 欧贵兵
梅家斌 谢春娣

SHIYONG GAILULUN
YU SHULI TONGJIXUE

实用概率论与数理统计学



湖南大学出版社

高等学校教材

实用概率论与数理统计学

(数理统计为主)

孙清华
欧贵兵　梅家斌　谢春娣

湖南大学出版社
2001年·长沙

内容简介

本书是以数理统计学为主的概率论与数理统计学教材.本书文字简炼、叙述明了,内容翔实丰富,突出实用和以数理统计学为主的特色,是一本有特点的概率论与数理统计教材.适用工、农、医、经济管理等各类专业,课时可在40~60学时内调整.

图书在版编目(CIP)数据

实用概率论与数理统计学/孙清华等编著.—长沙:湖南大学出版社,2001.5

ISBN 7-81053-355-X

Ⅰ.实… Ⅱ.孙… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第22995号

实用概率论与数理统计学

Shiyong Gailülun yu Shuli Tongjixue

孙清华 欧贵兵 梅家斌 谢春娣

□责任编辑 李立鹏 李 刚

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经　　销 湖南省新华书店

□印　　装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 9.75 □字数 236千

□版次 2001年5月第1版 □2001年5月第1次印刷

□印数 1-5 000册

□书号 ISBN 7-81053-355-X/O·22

□定价 15.00元

前　　言

概率论与数理统计是高等学校的一门重要的数学基础课,它在理、工、农、医、经济管理和社会科学的许多领域内具有重要的理论价值和广泛的实际应用.现代科学技术的发展,越来越需要概率论与数理统计学的指导来寻求随机现象的统计规律性,检验、分析和预测随机现象的规律、发展和变化.现代科学技术的发展也给概率论和数理统计学的发展开拓了广阔的空间,近一个世纪以来,概率论和数理统计学不仅建立了系统和严密的理论,还实现了研究的纵深发展,在许多领域中的应用越来越普遍和深入,成为现代科学研究和应用领域一个重要的分支.

本书是以数理统计学为主体的概率论与数理统计学教材,既考虑了高等学校教学大纲和研究生入学考试大纲对本门课程的要求,又突出了以实用数理统计学为主的思想,顺应教学改革对培养学生实际工作能力、开发学生智力和提高学生素质的要求.本书在编写中,力求做到在文字简炼的同时保证内容的翔实,在突出应用的同时注意理论的严谨.在突出数理统计学特色方面,我们不仅丰富了数理统计学基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析的许多内容,还增加了正交试验设计的内容.

在教学安排上,本书计划学时为 52 ~ 60 学时.其中概率论部分控制在 20 学时以内,数理统计部分占 32 ~ 40 学时.学时较少时可适当减少部分内容.只学习数理统计的,第一章五六节可不讲,概率论部分其他内容也可删除.本书各章节后配有少量习题,其中基本题是学了本书后应该会做的;提高题不是每节都有,以历年考研题为主,不作为作业布置,读者可以以此了解考研的要求、考点与动向,书后附有习题答案.

本书由孙清华主编，欧贵兵、梅家斌、谢春娣等编写．承蒙湖南大学出版社的大力支持和帮助．特在此表示衷心感谢！由于我们学识所限和时间匆促，错漏之处在所难免，敬请读者予以指正．

编 者

2001 年 1 月于武汉

目　　次

第一章 概率的基本概念 随机变量及其分布

在人类生存的大千世界里存在着千变万化的现象，如自然现象、社会现象、经济现象、生产现象等等．任何一个现象都不是孤立的，而是由若干个因素组成的．有一类现象的因素之间存在着必然的关系，称为确定性现象．也有的现象却不是这样，它的因素之间没有必然的联系．如足球运动员起脚射门，即使在球门前也不一定进球；一枚硬币落在地上，有可能正面朝上，也可能背面朝上．这种在一定条件下发生，但可能出现不同结果，并且在现象发生前不可能预知确切结果的现象称为**不确定现象**．由于不确定现象在人类生活中大量存在，对人类活动有着重大影响，人们经过长期研究，终于发现和认识到它的结果存在着某种客观规律性，这种在大量重复发生的现象中所呈现的规律性，我们称之为**统计规律性**．而把在一次试验或观察中结果不确定，在大量重复试验中结果具有某种统计规律性的现象，称之为**随机现象**．

概率论与数理统计就是研究与揭示大量随机现象的统计规律性的一门数学学科．它以数学形式展示了现象的过程与结果，提供对现象的预测与推断，在工农业生产、科学技术、社会活动和经济管理等许多方面有着广泛的应用与广阔的背景．

在第一章中，我们首先学习概率论的基本概念，了解频率与概率的定义，掌握用已知的简单事件的概率来计算复合事件的未知概率的方法．然后，通过引入随机变量，利用高等数学中的一些方法，对随机试验的结果和概率规律进行较为全面的研究．

§1.1 随机事件与随机事件的概率

一 随机事件(Random event)

1. 随机试验(Random trial)

为了研究随机现象,我们把对现象的观察和进行的实验统称为**试验**,一般用大写字母 $E,T,\cdots$ 等来表示. 例如:

E_1:观察上午 8 点钟经过某地点的车辆数.

E_2:记录某学生 10 次投篮命中的次数.

E_3:记录电视节目中播音员发音的差错数.

E_4:记录某批产品的平均寿命.

具有下列特点的试验称为**随机试验**.

(1)试验可以在相同条件下重复地进行;

(2)每次试验的所有可能结果在试验前可以预知,并且不止一个;

(3)进行一次试验之前,不知哪一个结果会出现.

正因为试验的可能结果是多个,试验是可重复的,所以试验的结果是不能预知的. 只有某一种结果出现的"可能"性,没有"必然"性,因而试验才是随机的. 以后我们所提到的试验都是指随机试验.

2. 样本空间(Sample Space)

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**;把样本空间的元素——试验 E 的每个结果称为**样本点**. 通常记样本空间为 S. 例如:

掷一个骰子朝上一面点数的样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$;

检查 10 件产品中次品数的样本空间 $S=\{0,1,2,\cdots,10\}$;

投篮结果的样本空间 $S=\{命中,不中\}$;

某天气温的样本空间 $S=\{(x,y)|T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示该天的最低温度，y 表示最高温度；其中 T_0 是该地的最低温度，T_1 是该地的最高温度.

在确定样本空间时，要考虑试验的目的与条件，在不同的目的与条件下，得到的样本空间往往是不相同的.

3. 随机事件

由一个样本点所组成的集合，我们称为**基本事件**. 它表示随机试验的某一个结果发生了. 如掷骰子出现 4 点，是一个基本事件.

由几个样本点组成的集合，我们称为**复合事件**. 只要组成集合的样本点中有一个出现，即只要随机试验的结果中某一个发生了，就表示这个复合事件发生了. 如掷骰子出现偶数点的事件，包含出现 2 点、4 点和 6 点，掷出 2 点也表示掷出偶数点，是偶数点事件发生了.

样本空间是它自身的子集，它自然是一个复合事件. 而且，每次试验它必然发生，所以称它为**必然事件**，也用记号 Ω 表示.

空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，但我们也把它当作样本空间的子集合. 由于它在每次试验中都不发生，所以称为**不可能事件**.

这样，只要我们进行一次试验，总有一个事件发生. 由于事件的发生不是必然的，具有一定的随机性，所以把试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称事件，习惯用字母 A、B、C、D 等来表示.

例如，投三次篮出现同一结果的事件 A_1 是

$$A_1=\{中,中,中;不中,不中,不中\}.$$

射击一发子弹命中五环以上的事件 A_2 是

$$A_2=\{6,7,8,9,10\}.$$

4. 事件的关系与运算

我们是用集合的概念来定义事件的，因而自然可以用集合间的关系与运算来处理事件的关系与运算.

定义 1 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B

包含事件 A. 记为 $A \subset B$.

如投篮命中包含投篮得 2 分，也包含投篮得 3 分.

定义 2 如果 $A \subset B, B \subset A$，则 $A = B$，称事件 A 与事件 B 相等.

两个相等事件含有的样本点完全相同.

定义 3 两个事件 A、B 中至少有一个发生，是一个事件，称为事件 A 与 B 的**和事件**(**并事件**). 记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

如某种产品的质量要求有长度和直径两个指标，则产品不合格(事件 C)包含长度不合格(事件 A)与直径不合格(事件 B)或两者都不合格.

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件为 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$；可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件为 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

定义 4 两个事件 A 与 B 同时发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(**交事件**). 记为 AB 或 $A \cap B$.

如某条串联电路有两个开关，第一个开关接通(事件 A)，第二个开关接通(事件 B)，线路接通(事件 C)，则 $C = AB$.

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件为 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$；可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件为 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

定义 5 事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 记为 $A - B$.

注意，不要错误地理解只有 $B \subset A$，才有 $A - B$.

定义 6 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B **互不相容**，或称**互斥**，记为 $A \cap B = \varnothing$. 否则称事件 A 与事件 B 为**相容事件**.

同一随机试验的基本事件必然是两两互不相容的.

定义 7 如果事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与事件 B **互为对立事件**，也称为**互逆事件**.

读者要注意互斥与互逆的不同，互逆事件一定是互斥的，但互斥不一定互逆. 例如，在产品质量检查中，产品可以是合格品，也可以是废品，合格品又可分一等品、二等品. 那么一件产品不是合格品就是废品，它们是互逆的；而一件产品可以不是一等品也不是废品，它们是互斥的，但不是互逆的. 互斥事件的特征是一次试验中两者都可以不发生，而互逆必发生一个.

事件的运算与集合运算有相同的规律，我们不再赘述. 只将以下运算规律指出，以引起读者注意.

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

德·摩根律（对偶原理）

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

下面，我们通过一些实例来认识事件之间的关系与运算.

例 1 三只考签由三个考生有放回地轮流抽取 1 次，每次一只，试用已知事件表示“至少有一只考签没有被抽到”这个事件.

解 设以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 只考签没有被抽到事件，则“至少有一只考签没被抽到”可表示为

$$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}-A_1A_2A_3 \text{ 或} \overline{A_1A_2A_3}.$$

二 随机事件的概率

对于随机试验，我们不仅希望了解试验的全部可能结果，更关心某一个结果出现的可能性大小，也就是某个随机事件发生的可能性究竟有多大，以便预测或控制它的发生，利用它解决某个问题. 而要对某个事件发生的可能性大小，作出较为准确的判断，只凭一次试验是不行的. 为此，我们引入频率的概念，由多次试验中事件发生的频繁程度来描绘一次试验中事件发生的可能性大小.

1. 频率(Frequency)

定义 1 在相同条件下进行的 n 次试验中,事件 A 发生的次数称为 A 发生的频数,记为 n_A. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$.

我们从试验中认识到,当试验次数 n 不同时,$f_n(A)$一般是不相同的. 这个性质,称为频率的**随机波动性**. 从大量试验中人们认识到,在 n 增大时,频率的随机波动的幅度是变小的,逐渐稳定于某个确定的值 $P(A)$. 可以用它来描绘一次试验中事件 A 发生的可能性的大小. 因此,这种"频率稳定性"就是大量重复试验表现出来的统计规律性,完全可以用它来解释随机现象.

频率具有以下的基本性质:

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)$f_n(S)=1$;

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则有

$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$.

2. 概率(Probability)

定义 2 设 S 是随机试验 E 的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,如果 $P(A)$满足下列条件:

(1)对于任一事件 A,有 $1\geqslant P(A)\geqslant 0$;

(2)对于 S,有 $P(S)=1$;

(3)对于两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$,有**可列可加性**,即

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

在第二章中,我们将利用大数定律证明,当 $n\to\infty$时,$f_n(A)\to P(A)$,从而为用 $P(A)$刻划事件 A 在一次试验中发生的可能性大小找到理论依据. 也可以用数值 $P\sim n_A/n$ 来定义概率,通常称为**统计概率**. 还可以把事件 A 与样本空间分别表述为几何量 S_A 与 S,用 $P=S_A/S$ 来定义概率,称为**几何概率**,它们都是概率.

3. 概率的运算性质

性质：

(1)不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

(2)两互斥事件之和的概率，等于两事件概率的和. 即若 $A\cap B=\varnothing$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{2}$$

推论 1 有限个两两互斥事件之和的概率，等于这些事件概率之和. 即若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k) \tag{3}$$

(3)式称为概率的有限可加性.

推论 2 任一事件 A 的概率，等于 1 减去其对立事件 $\overline{A}$ 的概率.

因为 $P(A)\leqslant P(S)=1,P(A)+P(\overline{A})=P(S)=1.$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{4}$$

(3)两个相容事件 A 与 B 之和的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{5}$$

推论 3 有限个相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之和的概率为

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\\&P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{6}$$

三 等可能概型

等可能概型也称为古典概型，它在概率论发展初期曾是主要的研究对象.

等可能概型(古典概型)

定义 若随机试验 E 具有以下特点：

(1)试验的样本空间 S 只有有限个(n 个)元素；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同. 则称试验是**等可能概型**，也称为**古典概型**.

古典概型的特点简单地说，就是具备有限性与等可能性. 这一类型的试验是大量存在的，关于古典概率的计算是概率论中基础的计算，应该对此有足够的重视.

定理 若 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的事件且包含 k 个基本事件，则事件 A 的概率 $P(A)$ 可用以下公式计算

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件个数}}{S\text{ 中基本事件的总数}} \tag{7}$$

因此，计算等可能概型中事件 A 的概率 $P(A)$ 的关键是弄清 S 中的基本事件总数和 A 所包含的基本事件数. 这些数的计算一般要用排列组合知识，要进行详细的分析，避免事件的重复与疏漏，才能得到准确的结果.

例 2 一批产品共 100 件，其中合格品 90 件，废品 10 件. 从中任取 3 件，求这 3 件中有废品的概率.

解 样本空间 S 中基本事件数的算法是：从 100 件中任取 3 件，共有 C_{100}^3 种结果. 但 3 件中有废品（事件 C）较复杂，包含有 1 件、2 件、3 件废品三种情况，计算起来比较麻烦. 为此我们考虑 C 的对立事件 $\overline{C}$—3 件中没有废品的事件，是从 90 件合格品中任取 3 件，共有 C_{90}^3 种结果，根据对立事件概率的计算法，则有 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-C_{90}^3/C_{100}^3=\frac{67}{245}$.

例 3 从一副扑克牌中抽出一张，看后放回重新洗牌，再从中抽出一张，问前后两次所抽的牌为同花的概率是多少？

解 设前后两张牌是同花的事件是 A，可以是两张黑桃，两张红心，两张梅花，两张方块，设分别为事件 A_1,A_2,A_3,A_4，则显然 A_1,A_2,A_3,A_4 所含基本事件相同，都是 13^2 种，所以 A 所含基本事件数为 4×13^2. 又基本事件由两步组成，第一步从 52 张牌中抽 1 张，有 C_{52}^1 种；第二步仍是这样. 由乘法原理，样本空间 S 所含基本事件数为 $C_{52}^1\cdot C_{52}^1=52^2$. 于是事件 A 的概率为

$$P(A)=4\times13^2/52^2=1/4.$$

例 4 设有 N 件产品，其中有 M 件次品. 今从产品中任取 n 件，问恰有 $k(k<M)$ 件次品的概率是多少？

解 在 N 件产品中抽取 n 件（抽出后不放回）的所有可能取法有 C_N^n 种，是样本空间 S 中基本事件的总数. 恰有 k 件次品，由从 M 件次品中抽出 k 件与从 $N-M$ 件正品中抽出 $n-k$ 件两步组成，由乘法原理，有 $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$ 种可能，即 A 包含基本事件个数为 $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$ 个. 于是

$$P(A)=C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}/C_N^n.$$

这类概率称为**超几何分布的概率**.

例 5 有人写了 n 封信，又写了 n 个信封，然后他随机地将 n 封信装入 n 个信封内，问至少有一封信装对的概率是多少？

解 设事件 A_i 为第 i 封信装入第 i 个信封，则所求概率为

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i).$$

因为 $P(A_i)=1/n,\ \sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1,$

$$P(A_iA_j)=1/n \cdot 1/(n-1)=1/[n(n-1)],(i\neq j)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)=C_n^2 \cdot 1/[n(n-1)]=1/2!,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)=C_n^3 \cdot 1/[n(n-1)(n-2)]=1/3!,$$

……

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=C_n^n \cdot /n! \ =1/n!$$

于是，由概率的加法公式(6)，知

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

由高等数学知，当 n 充分大时，概率 $\approx 1-e^{-1}$.

古典概型的题目繁多，方法复杂，对排列组合的知识要求较

高，有兴趣的读者可以自己选阅一些有关的参考书籍.

* 分形(Fractal)是现代数学的一个新兴的分支，它是一种研究和处理自然与工程中不规则图形的强有力的理论工具. 许多分形是由迭代方法生成的，如果在迭代程序中加入随机条件，则可以得到种种随机分形，它们往往有很好的应用. 如随机康托尔(Cantor)集，随机谢尔宾斯基(Sierpinski)垫，随机康托尔尘都是随机分形的经典例子. 图 1.1 给出的随机冯·科赫(Von Koch)曲线是从单位直线段开始，以概率 $P=0.4$ 去掉每个线段的中间三分之一，并以概率用“向上”的等边三角形的两边代替线段中间去掉的三分之一而构造出来的. “向上”的概率常常可以用掷硬币这样简单的手段来决定三角形向哪一边“突出”. 可见，概率的概念是如何地渗入任一科学领域.

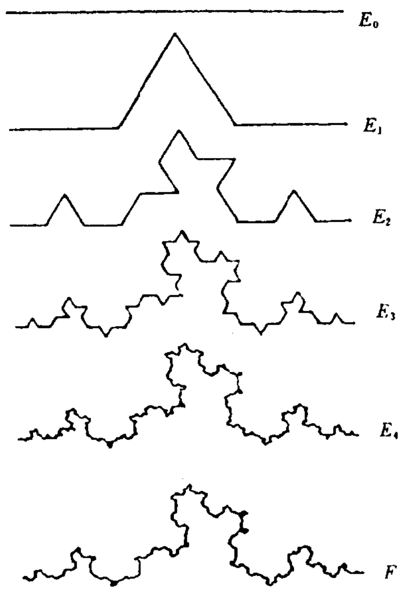


图 1.1 随机冯·科赫曲线

基本题 1-1

1. 设 A、B 为两个事件，则 $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ 表示(　　)

(A)必然事件；　　(B)不可能事件；

(C) A 与 B 恰有一个发生；　　(D) A 与 B 不同时发生.

2. 事件 A、B、C 中，A 与 B 发生而 C 不发生，则(　　)成立.

(A) $AB\cup\overline{C}$；　(B) $AB\overline{C}$；　(C) $A\cup B\cup\overline{C}$；　(D) $A\cup B\overline{C}$.