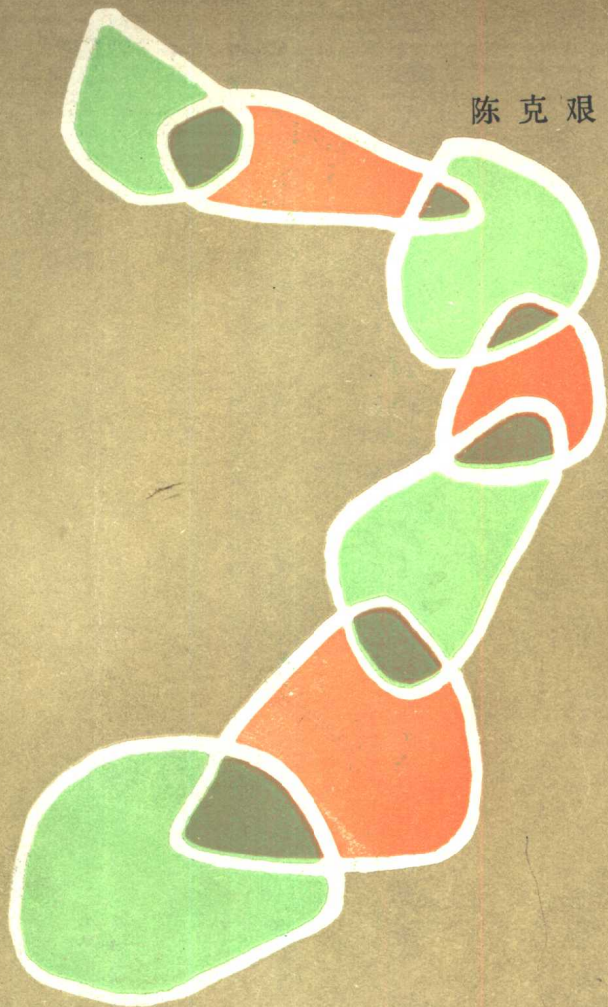


陈克艰 著



# 数学逍遥游

科学普及出版社

# 数学逍遥游

陈克艰 著

## 内 容 提 要

本书以师生间进行一星期异趣横生的对话这一形式，形象、生动地对数论、非欧几何、代数学、群论、微积分（数学分析）、集合论以及数学哲学等现代数学的主要内容作一深入浅出的述评，并时或穿插有关的中外文史知识，涉笔成趣，娓娓道来，洋溢着科学与人文结合的鲜明色彩，有较强的可读性，是一部近年来少见的优秀科普作品，凡具有初中文化程度的读者都可以由此作一番数学“逍遥游”。本书也是高校文科学生及哲学社会科学工作者理解现代数学精神的参考读物。

(京)新登字026号

数 学 逍 遥 游

陈克艰 著

责任编辑：高 建

封面设计：邓领祥

技术设计：赵丽英

\*

科学普及出版社出版(北京海淀区白石桥路32号)  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销  
北京市燕山联营印刷厂印刷

\*

开本：787×1092 毫米1/32 印张：6.625 字数：147千字

1992年4月第1版 1992年4月第1次印刷

印数：1—4700册 定价：3.60元

ISBN 7-110-02305-2/O·64

## 小 引

小舟和小云是表兄弟俩，在同一所中学里上学，小舟读初三，小云读初二。两个孩子都聪明好学，喜欢读课外书籍。小舟特别爱好数学，解过许多难题，参加区里的竞赛，得了二等奖；小云兴趣广泛，爱好文学，经常阅读和背诵古文名篇。这天，他俩去图书馆借书。琳琅满目的架子上，很少有他们所中意的书。金庸的武侠小说，他们早就风卷残云般地吞食了；琼瑶的言情作品，他们也曾读过一两年，觉得还是让女孩子们去亲近比较合适；至于那许多“魔窟”、“谍影”、“血案”一类的印刷品，他们从来就没有兴趣光顾。失望之际，他俩的眼光却几乎同时停留于一本书上，那是一本厚厚的、蓝灰色的书，有一个长长的书名——《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，著者伽利略。这本书挤在周围那些压膜精装、色彩鲜艳的伙伴们中间，虽然显得有些孤寂，但是一点也不寒碜。在它雍容肃穆的气度里，透出智慧和定力，周围那些伙伴们制造的浮浅喧嚣的气氛，似乎一下子就被它收摄了。

“对话！”——兄弟俩异口同声地说。“对话”这个词，近年来颇受欢迎，越来越多的人喜欢用它，越来越多的场合以它指称。平素日常的谈话是“对话”，科技交流无疑也是“对话”；国际间政治、经济、外交的一切活动，无不是对话，甚至谈判不成而至于打，也可以说成“用拳头或武器进行的对话”；读书是与前人“对话”，写作是与后人“对话”；舞台

上的长篇独白是与观众“对话”，宗教徒的内心默祷是与上帝“对话”……20世纪的哲学家则干脆说“对话”是人类的基本存在方式。“对话”这个词，带有庄严、挺立、平等的意味。一个对话的参加者，是与点头哈腰、卑躬屈膝、唯唯诺诺的形象格格不入的。作为一种文体，“对话”自然、流畅、清新、亲切，写起来洒脱，读起来爽快。小舟和小云喜欢读“对话”，所以很自然首先就被这本书的书名吸引了。

而对“托勒密”和“哥白尼”这两个人名，后者则是他们所熟悉的。他们早已知道，哥白尼在科学史上搞过一场颠倒乾坤的革命，他第一个宣布了是地球绕着太阳转而不是太阳绕着地球转的“地动说”。至于前者，他们也记得陆老师曾在课堂上提起过，好象是一个古希腊人，哥白尼的“地动说”正是冲他发出的挑战。

“两大世界体系”，这个词组也许太严肃了点，但这并不得事。在小舟、小云那样年龄阶段的孩子，往往反而会对某些严肃的思想和论题产生一种天真的向往，他们倒可能比已经把“体系”一词用滥了的成年人，更能贴切体会它的真实涵义。再说，有“对话”的吸引力，“体系”这个大字眼也就吓不倒他们了。于是，他们把书借了下来。

小舟、小云回家后随便翻了翻这本《对话》，这才发现，他们并没有能力一字一句读懂它。但就是这随便翻翻，也已受益非浅。书里有许多几何图形，使正在学平面几何的他们感到很亲切。作者伽利略说，他是学亚里斯多德的样来组织这个对话的。古希腊大哲学家亚里斯多德领导过一个学园，他向学生讲学时，经常是边走边谈，漫步逍遥，所以他的门徒所组成的学派，就获得了“逍遥学派”的雅号。伽利略让自己两位不幸早逝的朋友，与距他们1000多年前的一位逍遥派

学者，分别作为哥白尼与托勒密“两大世界体系”的代言人，展开冗长、广泛而细致的讨论和辩论。这一点对小舟与小云的启发特别大：原来任何枯燥艰难的论题，都是可以在逍遥中边走边谈的，而这种逍遥的谈法反过来也使枯燥艰难的论题变得使人兴趣盎然。他们把这点体会与教数学的陆老师谈后，陆老师也感到深受启发。

很久以来，陆老师一直想寻找一个既有别于课堂教学、又有别于课余兴趣小组的方式，来与同学们自由地谈谈数学。这种方式，不是按部就班的爬行式讲课，也不是蹿等跳跃的高速度运行，更不是克敌攻关式的解难题。它不要使人紧张、畏难，它应令人起一种浸润的舒适和轻松，它在给人数学知识的同时，更让人体会到数学研究的精神和数学结构的美感价值。就是对数学不大爱好、生疏隔膜的人，也应能在这种方式下尝到别开生面的滋味。从小舟和小云对那本《对话》的兴趣中，陆老师似乎朦胧地看到了一条可行的路，他建议暑假里趁学校组织夏令营活动之际，作一次“数学逍遥游”。小舟和小云闻言，雀跃不止。

假期终于到了，陆老师带着小舟、小云，还有一位邻居小姑娘小默来到海滨。夏令营的活动丰富极了，除了游泳、揽胜、吃西瓜、下围棋、读小说、“侃大山”、听音乐、跳迪斯科、数星星、道古今之外，他们每天至少讨论两个小时的数学。小默虽然刚读完五年级，却也参加讨论，对讨论的内容，她大多听不懂，但她发现讨论中经常冒出一些令她感兴趣的话题，她自己也不时能插得上几句嘴，所以她自始至终认真地参加了，而且也尝到了一点“逍遥”的味道。陆老师经常把“尝味道”挂在嘴边，他说：“学习任何知识，都要努力去尝它的真实的味道，从内心深处引发兴趣来。兴趣是最好

的老师!”

“数学逍遥游”历时一周，每天以一个课题为中心，这就是：

——皇冠巡礼

——数的家族是怎样繁殖的

——一步路走了2000年

——代数交响乐的主题

——20岁天才的不朽杰作

——微积分浅涉

——把咖啡转化为定理的机器是否牢靠

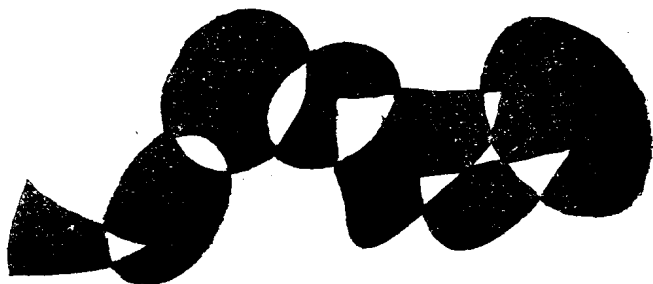
# 目 录

小引	1
星期一：皇冠巡礼——数论漫谈	1
便帽与皇冠	1
自然数的基本粒子——素数	3
素数的个数	6
素数的浓度	10
完全数与亲和数	12
可望而不可即的明珠	16
另一颗明珠	19
星期二：数的家族是怎样繁殖的	23
“古时候做天才很容易”	23
封闭性的破坏与恢复	25
无理数与有理数一样“有理”	28
毕达哥拉斯学派与无理数	30
数学是发现还是发明	33
虚实合作	36
形数相济	39
虚数与实数一样“实在”	43
偶数多还是自然数多	48
有理数多还是自然数多	52
实数多还是自然数多	56
“无限”也分等级	60



<b>星期三：一步路走了2000年——从“第五公设”</b>	
到非欧几何.....	63
小舟谈学习几何的体会，竟与爱因斯坦相同.....	63
欧几里得可能已经怀疑“第五公设”.....	66
有益的错误——“第五公设”的证明文本.....	69
情理之外 逻辑之中.....	72
真正的宝藏在哪里.....	74
一念之转，天地换新.....	76
非欧几何略窥.....	78
检查一个怪论.....	83
用桌子、椅子、啤酒杯代替点、线、面.....	86
数学就是关系学.....	90
通灵宝玉由对手保管.....	95
<b>星期四：代数交响乐的主题.....</b>	<b>100</b>
懒人的算术.....	100
“ $10 = 1010$ ”.....	102
比阿拉伯数码更方便.....	105
解方程象玩火柴游戏.....	107
诸葛亮如果活到今天.....	109
问题是敲打出来的.....	112
400年前的一场数学比赛.....	114
代数家的魔法.....	118
<b>星期五：20岁天才的不朽杰作.....</b>	<b>123</b>
“魔法”对这个问题已经技穷.....	123
玩一副“积木”.....	126
另一种玩法.....	129
这副“积木”就是一个“群”.....	130

形形色色的“群”	134
伽罗瓦理论“朦胧谈”	137
“向大师，而不是向大师的门徒学习”	142
“我没有时间了”！	145
前人已矣，后来足戒	147
<b>星期六：微积分浅涉</b>	151
从流水落花汲取灵感	151
“曲”得怎么样，“直”中来反映	155
一粒沙尘内有大千世界	157
以直代曲求面积	161
微积分的灵魂	164
神龙见首不见尾	169
<b>星期日：把咖啡转化为定理的机器是否牢靠</b>	173
数学家星期天也不休息	173
一根链条	176
集合论的基本“词汇”	178
集合也可作运算	182
数学家的伊甸园	185
狼来了！	189
把羊群圈起来	192
篱笆里是否已经有狼	195
<b>跋</b>	199



---

## 星期一：皇冠巡礼——数论漫谈

### 便帽与皇冠

陆：今天我们谈谈“数论”。顾名思义，数论就是关于整数的理论，它主要的任务是研究整数以及整数之间相互关系；而整数则包括自然数。我们从一上学就开始与自然数打交道，学习它们的四则运算，对它们可说是熟悉到家了，连小默都敢说已经是自然数的“专家”了。

默：那可不！自然数不就是从1开始往后数吗？1, 2, 3, 4, ……没完没了，无穷无尽，反正我知道该怎么数下去，不管多么大的数，一百万，一亿，我没时间罢了，只要花时间，我总能数到它。

云：一上中学，我们就开始学代数、学方程、学几何证

明，我们好象已经和自然数告别了，那是小学生的玩艺儿。我真不明白，自然数还有什么好研究的呢？

陆：小云的话又对又不对。说它对，因为自然数确实很浅近。我们的祖先，不管是古代中国人、古希腊人、古埃及人、古印度人，还是古巴比伦人，最先掌握的数学知识都是自然数。虽然数论的地位很崇高，有人甚至称它为数学的皇冠，它却实实在在是从算术、从四则运算这顶人人都买得起的便帽发展而来的。但是，如果深入地钻研下去，自然数里可是奥妙无穷啊！所以说小云的话又不对。数论是一门最古老的学科，源远流长，现在也还在发展着，不断地有新的领域被开拓出来。我国德高望重的老一辈数学家华罗庚先生，对数论作出过卓越的贡献，他写的《数论导引》，内容非常丰富，是这方面的权威著作。数论上还有好些几百年悬而未决的世界难题呢！

舟：对了！我听说过有一个叫什么“哥德巴赫猜想”的，还听说我国的数学家陈景润证明了什么“ $1+2$ ”，是有关这个猜想的世界冠军呢！

陆：不错。“哥德巴赫猜想”就是数论中的一个世界难题。关于它，以及陈景润伯伯的成就，我后面还会谈到。

云：老师，那就请您根据我们的基础，给我们增加一些数论的知识，也让我们尝尝这门既古老又新鲜的数学分支的味道吧。

陆：哈哈！你也说起“尝味道”来了。说真的，许多人觉得数学枯燥、乏味，满眼的符号、公式，简直象天书；其实，他是没有尝到数学的味道。一旦尝到了，他会觉得数学是美的，象图画一样；数学是有韵律的，象音乐一样；数学是有巧妙结构的，象令人流连忘返的名胜古迹一样；数学是

谐和调畅的，象春日怡荡的微风、山间欢畅的溪流一样。为了尝到数学的味道，并不一定要做数学家，去啃很厚很厚的“天书”，也不一定要参加数学竞赛队，训练解很多很多的难题。20世纪最伟大的数学家希尔伯特曾经说过，一个好的数学家应该能够把他正在做的工作，他在研究什么问题，这个问题大致是什么样的，他的研究将分几个阶段，他已经取得了什么结果，还有什么困难有待克服，等等，向任何一个普通的路人讲得清楚。希尔伯特这里说的是高水平的、创造性的数学研究工作尚且如此；那么，对古往今来已经积累起来的数学知识，特别是它的一些重要的思想、观念、方法、精神，更应该能够做到。这样，就会有助于破除许多人对数学的神秘感、畏惧感，有助于“数学进入大众，大众接受数学”。我们这一次的“逍遥游”，就是想做一下这样的尝试。

好吧，让我们言归正题，开始尝一尝数论的味道。

## 自然数的基本粒子——素数

陆：自然数有无穷多个，但是，你写出一个我们就能认识一个；然而，一所学校才几百个同学，你就不大可能做到指一个认一个。一类是无限，可你全认识；另一类是有限，可你多数不认识。原因就在于，自然数有它自身的规律，掌握了规律，也就认识了全体；而人可没有这样的规律。规律有的简单、有的复杂，所以认识也就有浅有深。刚才小默说，随便什么自然数，她都数得出来，这说明她已掌握了一个规律，但还很浅，我们还得往深处挖一挖。探索任何事物的规律，分类是个重要的方法。试想一想，可以怎样对自然数进行分类呢？

默：那太容易了！自然数可以分成奇数和偶数，1, 3, 5, 7, 9...是奇数，2, 4, 6, 8, 10, ...是偶数。

陆：完全正确。那么，还有没有别的分类方法呢？

云：还可以分成7、素数与合数等三类。素数(或质数)是那些除了1和本身，再也不能被别的自然数整除的自然数，例如5, 7, 13, 17, ...等都是。合数则是指除了1和本身之外，还有别的因数的自然数，如8, 9, 15, 20, ...都是。

陆：关于素数和合数，你能不能提出一条或几条规律，或者性质，或者它们之间的相互关系呢？

云：所有的偶数都是合数，但是2要除外，2是素数。

陆：小默你说说为什么2是素数？

默：嗯……，我想通了。

云：所以，除了2，所有的素数都是奇数。

舟：说到素数与合数的关系，有一条简单的命题：任何合数都能分解成若干个素数的乘积。比方 $30 = 2 \times 3 \times 5$ 。

陆：这就与多项式的因式分解相对应了，例如 $a^3 + b^3$ 在一定范围内可以分解也只能分解为 $a + b$ 与 $a^2 - ab + b^2$ 。

“分解”是人类认识事物的一种重要方法。物理学、化学、生物学乃至社会学、经济学，也都讲“分解”。科学家把物质分解成分子，分子分解成原子，原子分解成基本粒子，基本粒子还可以分。当然在不同的层次上，分解的具体方法和意义并不同。素数是自然数分解的最基层，所以我称它为自然数的“基本粒子”。

根据素数与合数这样的分类，还可以提出许多规律或性质。我现在随便说一条：如果素数 $p$ 整除两个自然数 $a, b$ 的乘积(写作 $p|a \cdot b$ )，那么 $p$ 必定整除 $a, b$ 中的某一个，即 $p|a$ 、 $p|b$ 中必有一个成立。这已经可以称为一条定理，你们想想

看，能不能想通。

舟：我觉得这条定理很简单，完全想得通。好比两个人出门买了一堆土豆，如果带了两个篮子，这些土豆就可以分装在两个篮子中；如果只带了一个篮子，那就只能都装在一个篮子中了。

云：但是定理需要证明，你总不能拿比喻来代替证明呀！

陆：你俩的讨论很有意思。上述定理的证明并不困难，但是原原本本地写出来却很繁。许多不亲近数学的人往往就把“繁”当作了“难”。我说数学是一种语言；表达则是语言的一种初级功能。有些同学心里明明知道一个题如何证明，但就是写不好。这种表达的能力与语文学习是很有关系的。当然，语言能力本身也有高低层次之分。即使写文章的能手，为了表达清楚内心一种生动丰富的意象，把自己的思想和感情真实地传达给读者，也要呕心沥血地花功夫。同样的道理，数学上解比较难一点的题，首先需要寻找思想、意象，有时甚至就是形象，数学和文学一样离不开形象思维。画龙点睛，解题的关键往往是在意象或形象之中抓住的，然后才谈得上把它表达出来。总之，学会严格地写证明，表达已经掌握的思想，是脚踏实地的功夫，很重要；学习探索意象，构成形象，抓住问题的关键，是凌空翱翔的本领，也重要。踏实和凌空相结合，就能学好数学。小舟刚才通过形象来理解一个简单的定理，这个办法很好，路子对头。当然不应忽视严格表达的训练，这是平时数学课的任务。我们这一次既然是“逍遥游”，就尽量与形象和意象打交道了。

回到谈素数。我有一个看似很小的问题：1是不是素数？

云：我记得老师以前说过：1不是素数，但我不明白是什么原因。

陆：我们已经知道合数可以最终分解为若干个素因数之积，现在我要说，这种分解方式是唯一的。

舟：对！我能证明这一点，假定合数 $a$ 有两种不同的分解方式 $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_m$ 和 $q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n$ ，那么 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中至少有一个与 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都不相等，设它是 $p_1$ 吧，那么 $p_1 | a$ ，也即 $p_1 | q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$ ，因为 $p_1$ 是素数，是一张“支票”，它只能由 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 中的某一个单独保管，所以 $p_1$ 必定与某个 $q_i$ 相等。于是得出矛盾，假定不成立，唯一性得证。

陆：证得很好。素因数分解方式的唯一性，是数论中一条最简单、同时也很重要的定理，但如果1算是素数的话，这个定理就不成立了，6可以分解成 $2 \times 3$ ，也可以分解成 $1 \times 2 \times 3$ ， $1^4 \times 2 \times 3$ 等等。

云：原来如此。

陆：在数学中，常常需要对一些“边缘”情况作硬性规定，乍一看好生奇怪，甚至觉得没有道理，其实它们是为了照顾处于中间位置的重要定理、公式的完整性，体现了数学的严格性。

## 素数的个数

陆：我们刚才讨论过的两个定理，最早出现在古希腊欧几里得著的《几何原本》中，在那里它们已经得到了明确的陈述和证明。《几何原本》堪称古往今来西方一切数学典籍的老祖宗，它的内容多半是关于几何学的，但也在第七、八、九等3卷中系统地总结了当时已有的数论知识，其中最引人注



目的，是关于素数个数的定理，以及它的证明。

在讨论这个有名的定理之前，我们先研究两个具体的技术问题。首先是：怎样检定一个数是不是素数，举例说，487是不是素数？

云：这个很容易，我只要逐个拿2, 3, 4, 5, 6, ……去除它，哪次它被除尽了，它就是合数，始终除不尽，它就是素数。至于能否被2, 3, 5, 9 整除，那是一眼就能看出的。能否被11整除也有很容易的检定方法：看它的奇数位数字之和减去偶数位数字之和，所得的差是否能被11整除。检查下来，2, 3, 5, 7, 9, 11都不能整除487。

舟：这样做当然好，但是太麻烦了。其实，既然检查过3不能整除，又何必再去检查9呢？岂非多此一举。我们只要拿素数逐个去试除就行了，这样可以省力许多。

陆：对！做数学要记住一条“经济原则”：用最小的力、最少的条件争取最大最多的结果；在结果相同的情况下，则做得越简洁越好。数学家经常说：“这是一个漂亮的证明，那个证明却拖沓不干净。”在数学中，漂亮、美，常常就意味着简单。小舟把试除者限制于素数，这是一大“节约”，还有没有别的“节约措施”呢？为了检定487，如果一直除不尽，是否一定要试除到486不可呢？

舟：不！假如487是个合数，那就至少可以写成两个因子的乘积： $a \cdot b$ ，这两个数中较小的那个必定不大于487的平方根。估计487的平方根在22与23之间，所以我只要用小于23的所有素数，即2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19试除就行了。结果表明487是素数。

陆：小舟的办法可以用于检定不太大的自然数是不是素数。