中央教育科学研究所专家推荐

素质教育与能力培养丛书

新概念学材

系列

新概念数学

（高中第二册）

■ 素质教育与能力培养研究组

G 高材生 Gaocaisheng

G 高能 Gaoneng

G 高分 Gaofen

中国人民大学出版社

XIN GAI NIAN XUE CAI XI LIE

• 根据教学大纲编写
• 适用于全国各个地区
• 不受不同版本教材的限制

责任编辑：柯 普 李艳辉
封面设计：红十月工作室/郑琪
版式设计：赵星华

新概念数学
（高中第二册）

"新概念学材系列"以中学教学大纲为依据，用发现法介绍教学大纲所规定的知识点，引导学生用自己的头脑去发现知识，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；与此同时，对要考试的知识加深理解，巩固记忆，促进应用。该系列是进行素质教育与能力培养的新型教材、新型教参、新型教辅。

ISBN 7-300-03797-6

9 787300 037974 >

ISBN 7-300-03797-6/G · 794
定价：20.00元

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列

新概念数学

（高中第二册）

素质教育与能力培养研究组
撰稿人　王庆成　王大辉　张利凯　李　蕊
李金辉　崔现伟　戴先华

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新概念数学·高中第二册/素质教育与能力培养研究组编.
北京：中国人民大学出版社，2001
(素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列)

ISBN 7-300-03797-6/G·794
Ⅰ. 新…
Ⅱ. 素…
Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 046293 号

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列
新概念数学
(高中第二册)
素质教育与能力培养研究组

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3. bta. net. cn
经　销：新华书店
印　刷：三河市实验小学印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：17
2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
字数：384 000

定价：20.00 元
(图书出现印装问题，本社负责调换)

素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列

编者的话

根据全国教育工作会议推进素质教育的原则精神以及国务院基础教育工作会议指出的教育发展方向，在总结前一段“减负”和教改经验的同时，在阶段性、区域性实验探索的基础上，我们编写了这套蕴涵创新精神和思路的高效学习用书——《素质教育与能力培养丛书》，从多方面适应了不同类型和不同水平学生的学习需求。

《素质教育与能力培养丛书》分为三个系列，即新概念学材系列、知识网络图系列、能力开发系列。

新概念学材系列包括中学各年级数学、物理、化学、生物四科。具体包括：《新概念数学》共六册，初中一至三册、高中一至三册；《新概念物理》共四册，初中一至二册、高中一至二册；《新概念化学》共四册，初中一册、高中一至三册；《新概念生物》高中一册。

所谓“学材”是相对于“教材”而言的。“学材”是以学习者为中心的助学读物，主要用来自学，也可用来教授。新概念学材系列以中学教学大纲为依据，用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识。这是该系列各书区别于一般教材、教参、教辅以及其他课外读物的显著特点和重大优点。

用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识，可以取得培养素质和准备应试的双重好处。

一个好处是培养素质，引导学生用自己的头脑发现知识，逐渐学会探索和研究，掌握思维和认识的方法，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；在发展理智的同时发展情感，树立怀疑意识和批判态度，构建创新精神和创新个性，提高自主性和独立性。

另一个好处是准备应试，促使学生对要考试的知识充分关注，多侧面、多层次、大视野、大纵深地把握学科知识，从而加深理解，吃得透，化得开，巩固记忆，记得住、想得起，促进应用，用得上，用得活，解题稳、准、快，对付考试得心应手，游刃有余。

书中“动手空间”、“你知道吗”、“想一想”、“考考你”、“思考与实践”、“科学前沿”、“数学家的故事”、“化学史”、“小资料”、“生活小常识”等小栏目，可以锻炼学生的动手能力，开阔视野，拓展思路，把知识、生活、实践联系起来，把科学、技术、社会联系起来。

书中点缀着科技发展史上的真实故事以及日常生活现象，可以极大地调动学生的求知热情和学习兴趣。精心挑选的大量插图，使各书更加形象、生动、轻松、活泼。

该系列各书是体现素质教育要求的助学读物，是新型的“教材”、“教参”、“教辅”，适合广大中学生、教师、家长阅读。

《素质教育与能力培养丛书》以教育部制定的教学大纲为依据，因此适用于全国各个地区，而不受不同版本教材的限制。

203

目　　录

第一章　不等式

第一节　引言

首先,我们分析两个实例:

【例1】　在平面内,以 O 点为支点,一长为 l 的木棒一端固定在 O 点,则另一端点 A 在平面内的轨迹为:$x^2+y^2=l^2$.显然,这是一个等式.虽然不知 A 点的具体位置,但知其在平面内具体曲线上(如图 1-1).

【例2】　在平面内,一长为 l 的细绳一端固定在 O 点,另一端 A 在平面内的轨迹为:$x^2+y^2\leqslant l^2$.显然,这是一个不等式,它给出了 A 点在平面内的可能区域(如图 1-2).

不等式就是研究形如 $x^2+y^2\leqslant l^2$ 的式子的性质及求解.

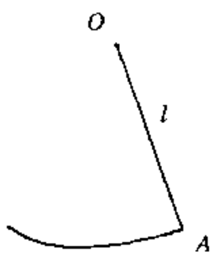

图 1-1

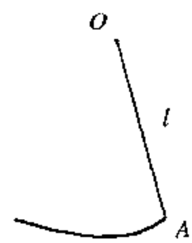

图 1-2

本章主要讨论不等式的性质,重点了解不等式及不等式的解法.

第二节　不等式符号“>”

我们知道,“$3>2$”中记号“>”是大于的意思,那么“$-3>-2$”吗?大家会说:“-3 比 -2 小.”

我们究竟该怎样确定实数的大小呢?通常,取一根自左指向右的具有水平标尺的直线作为实数轴,用上面的点代表实数,这样实数与实数轴上的点建立一一对应关系.规定:点从左至右依次出现时,相应的实数从小到大变化.如图 1-3 所示:

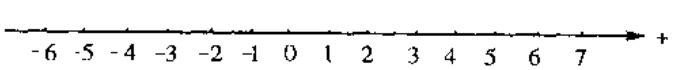

图 1-3

由于点 -3 位于 -1 左边，所以 $-3<-1$；同样，$-4<3, 0<5, -3>-4$.

所谓不等式，就是用不等号联系的式子.

上面从几何方法了解了如何比较两实数的大小关系，而用代数方法往往更能比较两实数大小.

定义 若 a 与 b 是任意两个实数，则当且仅当 $a-b>0$ 时，有 $a>b$.

这样，大家可分别用两种不同方法判别下列几组数的大小：

e 与 2；π 与 3；$\sqrt{2}$ 与 1.5.

当然，$3x+5>2x-7$，$\frac{1}{2}x^2+3x-5<0$ 亦是不等式.

第三节 不等式公理

以下，我们给出不等式公理，以期从理论上建立不等式体系：

公理 1 若 a 为实数，则下述论断有且只有一个成立：a 是集合 O 的惟一元素；a 是正数集合 **P** 的一个元素；$-a$ 是集合 **P** 的一个元素.

公理 2 若 a, b 是正数集合 **P** 的两个元素，则 $a+b$ 与 $a \cdot b$ 也是集合 **P** 的元素.

上面两个正数集合 **P** 的简单命题，不加证明地叙述出来，被视为公理.

其中，公理1说明了三种可能情况，任意一个实数 a 与其相反数 $-a$ 之间有如下关系：如 a 是 0，则 $-a$ 也是 0；若 a 是正数，则 $-a$ 是负数；如 $-a$ 是正数，则 a 是负数. 从几何方法可知，实数 a 与 $-a$ 的点要么重合，要么位于 O 点两侧.

所以，读者不难得出：若 a, b 为实数，则下列关系式有且只有一个成立：

$a=b, a>b, a<b$（公理 1′）.

第四节 简单的不等式关系

不等式 $b>a$ 可以写成 $a<b$，念作“a 小于 b”. 这两个不等式等价.

譬如：$-3>-4$，$-5<3$，$-3<0$. 这里，符号“$>$”与“$<$”都表示严格不等式.

然而，不等式研究中，需考虑两个关系式，即混合不等式 $a \geqslant b$ 与 $a \leqslant b$，分别念作“a 大于或者等于 b”及“a 小于或者等于 b”. 关系式 $a \geqslant b$ 是指：$a>b$ 或者 $a=b$；关系式 $a \leqslant b$ 是指：$a<b$ 或者 $a=b$. 例如，$-4 \geqslant -5$，$-3 \geqslant -3$，$-8 \leqslant -7$，$-6 \leqslant -6$.

如果两种记号“$>$”和“$<$”混着用，那么记号较大的(开的)一端朝着较大的数，较小的(尖的)一端朝着较小的数，例如：$-3<-2<0$

第五节 不等式的性质

数学家们常常从几个重要的基本概念和假设出发，建立起一个精密严谨的体系. 推导不等式时，最终要用到的基本假设是前面的两条公理，还有实数系及其运算(例如分配律、

数学归纳法等等),以及由这些公理推出的几条简单定理.

一、传递性质

定理 若 $a>b,b>c$,则 $a>c$.

一般地,若 $a_1\geqslant a_2,a_2\geqslant a_3,\cdots,a_{n-1}\geqslant a_n$,则 $a_1\geqslant a_n$.当且仅当所有关系式都是等式时,有 $a_1=a_n$.

假如你在星期六花的钱比在任何一个工作日花的都多,而在星期日花的钱至少与在星期六花的一样多,那么可以断定你在星期日花的钱比在任何工作日花的钱都多.这是一个典型的支出方面的例子,充分显示了传递性命题.

证明: 仅对4个实数的情形证明.

假设,$a_1\geqslant a_2,a_2\geqslant a_3,a_3\geqslant a_4$,由不等式的代数定义,数 $a_1-a_2\geqslant 0,a_2-a_3\geqslant 0,a_3-a_4\geqslant 0$.则 $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)=(a_1-a_4)\geqslant 0$.再次运用不等式的代数定义,有 $a_1\geqslant a_4$.

等号成立,当且仅当所有等号成立,即 $a_1=a_2,a_2=a_3,a_3=a_4$,则 $a_1=a_4$.一般情形下,读者不难用数学归纳法证明.

二、加法性质

定理 若 $a>b,c>d$,则 $a+c>b+d$;若 $a>b$,c 是任意实数,则 $a+c>b+c$.

一般地,若 $a_1\geqslant b_1,a_2\geqslant b_2,\cdots,a_n\geqslant b_n$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$.当且仅当 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$ 时,等式成立.

证明: 由假设,每个数 $a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n$ 均大于或者等于0,则 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)$ 大于或者等于0.等号当且仅当 $a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots=a_n-b_n=0$ 时成立,$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$.

三、与数的乘法性质

定理 若 $a>b,c>0$,则 $a\cdot c>b\cdot c$;若 $a>b,c<0$,则 $a\cdot c<b\cdot c$.

一般地,我们有:若 $a\geqslant b,c>0$ 则 $ac\geqslant bc$;当且仅当 $a=b$ 时,$ac=bc$;若 $a\leqslant b$,$c<0$,则 $ac\geqslant bc$,当且仅当 $a=b$ 时,$ac=bc$.

即:不等式各项乘以一个正数时,不等号保持不变;不等式各项乘以一个负数时,不等号要换向.例如:

$3>2$,用1与 -1 分别乘不等式两项,得到 $3>2,-3<-2$.

证明: $a\geqslant b$,知 $a-b\geqslant 0,c>0$,则 $(a-b)\cdot c\geqslant 0$,即 $ac\geqslant bc$.等号成立,当且

仅当 $a-b=0$(即 $a=b$)时.
$a\leqslant b$,知 $a-b\leqslant 0$,$c<0$,则$(a-b)\cdot c\geqslant 0$,即 $ac\geqslant bc$.等号成立当且仅当 $a-b=0$(即 $a=b$)时.

四、减法性质

定理 若 $a>b$,$c>d$,则 $a-d>b-c$;若 $a>b$,c 是任意实数,则 $a-c>b-c$.
一般地,若 $a\geqslant b$,$c\geqslant d$,则 $a-d\geqslant b-c$;当且仅当 $a=b$,$c=d$ 时,$a-d=b-c$.
证明: 如假设 $a\geqslant b$,$c\geqslant d$,有:

$$a-b\geqslant 0, c-d\geqslant 0$$

则$(a-b)+(c-d)\geqslant 0$,可得 $a-d\geqslant b-c$.等号成立,当且仅当 $a-b=c-d=0$ 时(即 $a=b$,$c=d$).
例如:$8>7$ 及 $6>5$,得到 $8-5>7-6$,而不等式 $8-6>7-5$ 是错误的.
注意: 定理中是 $a-d$ 及 $b-c$,不是 $a-c$ 及 $b-d$.

五、乘法性质

定理 若 $a>b>0$,$c>d>0$,则有: $ac>bd$.

一般地,如 $a_1\geqslant b_1>0$,$a_2\geqslant b_2>0$,$\cdots$,$a_n\geqslant b_n>0$,则 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n\geqslant b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n$.当且仅当 $a_1=b_1$,$a_2=b_2$,$\cdots$,$a_n=b_n$ 时,等号成立.

读者应用数学归纳法不难证得.

六、除法性质

定理 若 $a>b>0$,$c>d>0$,则有 $a/d>b/c$.特别地,对于 $a=b=1$,若 $c>d>0$,则$1/d>1/c$.

一般地,若 $a\geqslant b>0$,$c\geqslant d>0$,则 $a/d\geqslant b/c$;当且仅当 $a=b$,$c=d$ 时,$a/d=b/c$.

注意:这里是 a/d,b/c,而不是 a/c,b/d.

证明: $\dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{ac-bd}{dc}$

由于 $a\geqslant b>0$,$c\geqslant d>0$.利用乘法性质,我们有 $ac\geqslant bd$,即 $ac-bd\geqslant 0$,$dc>0$,

故$\dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}\geqslant 0$,即 $a/d\geqslant b/c$.

容易从上述证明中得知:不等式等号成立,当且仅当 $a=b$,$c=d$ 时.
读者应注意:由不等式 $9>7$ 及 $6>4$,得到 $9/4>7/6$,而得不到 $9/6>7/4$.
由乘法、除法性质,读者易得到乘幂性质.

七、乘幂及方根性质

若 $a > b > 0, m, n$ 是正整数,且 $a^{\frac{1}{n}}$ 与 $b^{\frac{1}{n}}$ 表示 a, b 的正 n 次方根,则:

$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$,且 $a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}}$.

一般地,我们可得到:$a \geqslant b > 0, m, n$ 是正整数,且 $a^{\frac{1}{n}}, b^{\frac{1}{n}}$ 分别表示 a, b 的正 n 次方根,则 $a^{\frac{m}{n}} \geqslant b^{\frac{m}{n}}$,且 $b^{-\frac{m}{n}} \geqslant a^{-\frac{m}{n}}$.(*)

式(*)中等号成立当且仅当 $a = b$ 或者 $m = 0$ 时,有 $a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$ 或者 $b^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$.(怎样给出严格证明过程请读者思考).

第六节 不等式性质应用

有关不等式的一些基本性质,我们已列出且借助不等式的两条基本公理予以证明.下面从求证问题的方法以及分析问题的角度两个方面来谈不等式的基本性质的应用.

一、分析法

将所求证不等式(以下称为目标不等式)两边分别变形,依据不等式基本性质或相应已有结论予以证明不等式的方法,我们称之为分析法.

请同学们分析问题:

【例 1】 试证:① 对所有 a, b, c, d,都有不等式 $(a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leqslant (ac - bd)^2$

② $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \leqslant (ac + bc)^2$

并且,当且仅当 $ad = bc$ 时,不等式等号成立.

分析:要证 ①$(a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leqslant (ac - bd)^2$,即要证:

$a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \leqslant a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2$,亦即:$-a^2d^2 - b^2c^2 \leqslant -2abcd$

即:

$$a^2d^2 + b^2c^2 \geqslant 2abcd$$

这是大家熟知的事实 $(ad - bc)^2 \geqslant 0$.

证明: $\because (ad - bc)^2 \geqslant 0$

$\therefore a^2d^2 + b^2c^2 \geqslant 2abcd$

$\therefore -a^2d^2 - b^2c^2 \leqslant -2abcd$

$\therefore a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \leqslant a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2$

$\therefore (a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leqslant (ac - bd)^2$

同法可证 ② 式成立,且当 $ad = bc$ 时,等式成立.

分析法的思路:从求证的不等式出发,分析这个不等式成立的条件,把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题.这些条件往往是条件不等式、不等式基本性质以

及已有的结论.

其实不难发现，上述证明过程并非分析过程，它是利用某些已经证明过的不等式（$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\geqslant 0$）作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式.这种证明方法，通常叫做综合法.

二、综合法

【例2】 证明：$(a^2-b^2)^2\geqslant(a-b)^4$ 对一切满足 $a\cdot b\geqslant 0$ 的 a,b 都成立，并且：$(a^2-b^2)^2\leqslant(a-b)^4$ 对一切满足 $a\cdot b\leqslant 0$ 的 a,b 都成立.

证明： $\because ab\geqslant 0$

$\therefore a^2+b^2+2ab\geqslant a^2+b^2-2ab$

$\therefore (a+b)^2\geqslant(a-b)^2$

$\therefore (a+b)^2\cdot(a-b)^2\geqslant(a-b)^4$

即：$(a^2-b^2)^2\geqslant(a-b)^4$.

同理，$\because ab\leqslant 0$

$\therefore a^2+b^2+2ab\leqslant a^2+b^2-2ab$

$\therefore (a+b)^2\leqslant(a-b)^2$

$\therefore (a+b)^2\cdot(a-b)^2\leqslant(a-b)^4$

即：$(a^2-b^2)^2\leqslant(a-b)^4$.

【例3】 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$

证明：

证法一 因为 $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 都是正数，所以只须证明

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$$

展开得 $9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}$

即 $2\sqrt{14}<2\sqrt{18}$

$$\sqrt{14}<\sqrt{18}$$

$$14<18$$

因为 $14<18$ 成立，所以

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

成立.

证法二 $\because 14<18$

$\therefore \sqrt{14}<\sqrt{18}$

$2\sqrt{14}<2\sqrt{18}$

$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}$

$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.