

中央教育科学研究所专家推荐
素质教育与能力培养丛书



新概念数学

(高中第二册)

■ 素质教育与能力培养研究组

G 高材生
gao cai sheng

G 高能
gao neng

G 高分
gao fen

中国人民大学出版社

- 根据教学大纲编写
- 适用于全国各个地区
- 不受不同版本教材的限制

责任编辑：柯 普 李艳辉

封面设计：红十月工作室/郑琪

版式设计：赵星华

新概念数学

(高中第二册)

“新概念学材系列”以中学教学大纲为依据，用发现法介绍教学大纲所规定的知识点，引导学生用自己的头脑去发现知识，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；与此同时，对要考试的知识加深理解，巩固记忆，促进应用。该系列是进行素质教育与能力培养的新型教材、新型教参、新型教辅。

新概念学材系列

新概念数学（初中第一册）
 新概念数学（初中第二册）
 新概念数学（初中第三册）
 新概念数学（高中第一册）
 新概念数学（高中第二册）
 新概念数学（高中第三册）
 新概念物理（初中第一册）
 新概念物理（初中第二册）
 新概念物理（高中第一册）
 新概念物理（高中第二册）
 新概念化学（初中全一册）
 新概念化学（高中第一册）
 新概念化学（高中第二册）
 新概念化学（高中第三册）
 新概念生物（高中全一册）

知识网络图系列

高中理科综合：数理化生知识网络图
 高中文科综合：语英政史地知识网络图
 初中理科综合：数理化生知识网络图
 初中文科综合：语英政史地知识网络图
 小学大综合：语数英自然社会知识网络图

能力开发系列

学习的策略：初中通用学习及考试方法
 学习的策略：初中各科学学习及考试方法
 学习的策略：高中通用学习及考试方法
 学习的策略：高中各科学学习及考试方法
 创新的策略：创新通用方法指南
 创新的策略：创新能力训练与测验

ISBN 7-300-03797-6



9 787300 037974 >

ISBN 7-300-03797-6/G · 794

定价：20.00元

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列

新概念数学

(高中第二册)

素质教育与能力培养研究组

撰稿人 王庆成 王大辉 张利凯 李 蕊
李金辉 崔现伟 戴先华

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新概念数学·高中第二册/素质教育与能力培养研究组编.
北京:中国人民大学出版社,2001
(素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列)

ISBN 7-300-03797-6/G·794

- I. 新…
- II. 素…
- III. 数学课-高中-教学参考资料
- IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 046293 号

素质教育与能力培养丛书
新概念学材系列
新概念数学
(高中第二册)
素质教育与能力培养研究组

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街 31 号 邮编 100080)
邮购部:62515351 门市部:62514148
总编室:62511242 出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经 销:新华书店
印 刷:三河市实验小学印刷厂

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:17
2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷
字数:384 000

定价:20.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

素质教育与能力培养丛书·新概念学材系列

学术委员会

主任：江山野（中央教育科学研究所研究员）

委员：吕 达（博士，编审，人民教育出版社副社长）

俞启定（博士，教授，北京师范大学教师培训中心主任）

劳凯声（博士，教授，北京师范大学教育系主任）

田慧生（博士，研究员，中央教育科学研究所所长助理）

总策划：甘华鸣

编辑委员会

主编：滕 纯（研究员，中央教育科学研究所原副所长，中国教育学会研究会副理事长）

程方平（博士，中央教育科学研究所研究员）

编委：（按姓氏笔画排列）

刘录正 刘诚岭 李超源 李 红 李 颖

陆 维 段伟文 唐德春

编者的话

根据全国教育工作会议推进素质教育的原则精神以及国务院基础教育工作会议指出的教育发展方向，在总结前一段“减负”和教改经验的同时，在阶段性、区域性实验探索的基础上，我们编写了这套蕴涵创新精神和思路的高效学习用书——《素质教育与能力培养丛书》，从多方面适应了不同类型和不同水平学生的学习需求。

《素质教育与能力培养丛书》分为三个系列，即新概念学材系列、知识网络图系列、能力开发系列。

新概念学材系列包括中学各年级数学、物理、化学、生物四科。具体包括：《新概念数学》共六册，初中一至三册、高中一至三册；《新概念物理》共四册，初中一至二册、高中一至二册；《新概念化学》共四册，初中一册、高中一至三册；《新概念生物》高中一册。

所谓“学材”是相对于“教材”而言的。“学材”是以学习者为中心的助学读物，主要用来自学，也可用来教授。新概念学材系列以中学教学大纲为依据，用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识。这是该系列各书区别于一般教材、教参、教辅以及其他课外读物的显著特点和重大优点。

用发现法、探究法、自主学习法介绍教学大纲所规定的学科知识，可以取得培养素质和准备应试的双重好处。

一个好处是培养素质，引导学生用自己的头脑发现知识，逐渐学会探索和研究，掌握思维和认识的方法，形成提出问题和解决问题的能力，锻炼创新能力；在发展理智的同时发展情感，树立怀疑意识和批判态度，构建创新精神和创新个性，提高自主性和独立性。

另一个好处是准备应试，促使学生对要考试的知识充分关注，多侧面、多层次、大视野、大纵深地把握学科知识，从而加深理解，吃得透，化得开，巩固记忆，记得住，想得起，促进应用，用得上，用得活，解题稳、准、快，对付考试得心应手，游刃有余。

书中“动手空间”、“你知道吗”、“想一想”、“考考你”、“思考与实践”、“科学前沿”、“数学家的故事”、“化学史”、“小资料”、“生活小常识”等小栏目，可以锻炼学生的动手能力，开阔视野，拓展思路，把知识、生活、实践联系起来，把科学、技术、社会联系起来。

书中点缀着科技发展史上的真实故事以及日常生活现象，可以极大地调动学生的求知热情和学习兴趣。精心挑选的大量插图，使各书更加形象、生动、轻松、活泼。

该系列各书是体现素质教育要求的助学读物，是新型的“教材”、“教参”、“教辅”，适合广大中学生、教师、家长阅读。

《素质教育与能力培养丛书》以教育部制定的教学大纲为依据，因此适用于全国各个地区，而不受不同版本教材的限制。

203

目 录

第一章 不等式	(1)
第一节 引言.....	(1)
第二节 不等式符号“ $>$ ”.....	(1)
第三节 不等式公理.....	(2)
第四节 简单的不等式关系.....	(2)
第五节 不等式的性质.....	(2)
一、传递性质.....	(3)
二、加法性质.....	(3)
三、与数的乘法性质.....	(3)
四、减法性质.....	(4)
五、乘法性质.....	(4)
六、除法性质.....	(4)
七、乘幂及方根性质.....	(5)
第六节 不等式性质运用.....	(5)
一、分析法.....	(5)
二、综合法.....	(6)
第七节 重要不等式(1).....	(8)
第八节 简介柯西与柯西不等式.....	(10)
第九节 重要应用.....	(11)
第十节 重要不等式(2).....	(12)
第十一节 不等式的求解(1).....	(12)
一、绝对值不等式.....	(13)
二、一元二次不等式的解法.....	(14)
三、一元二次不等式与一元二次方程、二次函数.....	(15)
第十二节 不等式的求解(2).....	(17)
第十三节 数学思想回顾.....	(18)
第二章 直线	(19)
第一节 直线的倾斜角和斜率.....	(19)
第二节 直线的方程.....	(22)
一、点斜式.....	(22)
二、两点式.....	(23)
三、直线方程的一般形式.....	(24)

第三节	两条直线的位置关系	(26)
一、	平行和相交	(26)
二、	交点	(26)
三、	夹角	(27)
第三章	圆锥曲线	(30)
第一节	圆	(30)
一、	圆的标准方程	(30)
二、	圆的一般方程	(30)
三、	圆与直线的位置关系	(32)
第二节	椭圆	(36)
一、	椭圆及其标准方程	(36)
二、	椭圆的几何性质	(38)
三、	椭圆的光学性质	(39)
第三节	双曲线	(45)
一、	双曲线及其标准方程	(45)
二、	双曲线的几何性质	(46)
第四节	抛物线	(52)
一、	抛物线及其标准方程	(52)
二、	抛物线的几何性质	(53)
三、	抛物线的光学性质	(54)
第五节	坐标平移变换	(57)
一、	坐标平移	(57)
二、	圆锥曲线一般方程的化简	(58)
第六节	圆锥曲线的统一定义	(60)
一、	圆锥曲线的立体几何背景	(60)
二、	圆锥曲线的统一定义	(61)
第四章	参数方程与极坐标	(64)
第一节	参数方程	(64)
一、	参数方程的严格数学定义	(65)
二、	将参数方程化为普通方程	(66)
三、	将普通方程化为参数方程	(67)
第二节	极坐标	(69)
一、	极坐标系的严格定义	(69)
二、	曲线的极坐标方程	(70)
三、	直角坐标与极坐标的互化	(70)
四、	圆锥曲线的统一的极坐标方程	(71)
第五章	直线与平面	(74)
第一节	空间想像能力的培养	(74)

一、同一图形的不同看法	(74)
二、不真实的形体	(75)
三、游戏	(76)
第二节 平面的基本性质	(80)
一、平面的基本性质	(81)
二、欧几里得的公理与公设	(84)
三、画图	(84)
第三节 水平放置的平面图形的直观图的画法	(88)
第四节 空间中两条直线	(90)
一、空间中两条直线的位置关系	(90)
二、反证法	(92)
第五节 两条异面直线所成的角	(93)
第六节 空间直线和平面	(102)
一、平面与直线的关系	(102)
二、平面划分空间	(104)
第七节 直线与平面垂直的判定与性质	(108)
一、直线与平面垂直的判定与性质	(108)
二、正方体的分解	(112)
第八节 斜线在平面上的射影, 直线和平面所成的角	(115)
第九节 空间两个平面	(121)
第十节 二面角	(127)
第十一节 两个平面垂直的判定和性质	(137)
一、两个平面垂直的判定和性质	(137)
二、异面直线公垂线的存在性	(141)
第十二节 截面图的作法	(143)
第六章 多面体和旋转体	(149)
第一节 正多面体	(149)
一、正多面体的有关历史	(149)
二、展开图	(150)
三、制作模型	(151)
四、正多面体的有关公式	(154)
第二节 棱柱	(156)
一、棱柱的定义和性质	(156)
二、平面到空间的类比推理	(156)
第三节 棱锥	(165)
一、平面到空间的类比推广	(165)
二、欧拉公式	(170)
第四节 棱台	(173)

第五节 圆柱、圆锥、圆台	(176)
第六节 球	(183)
一、定理	(184)
二、历史趣闻	(185)
三、球面上的几何作图	(188)
第七节 球冠	(191)
一、定义与公式	(191)
二、十三个球的问题	(192)
第八节 体积的概念和公理	(195)
一、祖暅公理	(195)
二、阳马和鳖臑	(196)
第九节 棱柱、圆柱的体积	(198)
第十节 棱锥、圆锥的体积公式	(202)
第十一节 棱台、圆台的体积	(210)
第十二节 球的体积公式	(215)
第十三节 球缺的体积	(221)
一、定理	(221)
二、乌鸦喝水	(222)
第十四节 求异面直线间的距离	(225)
一、直接法	(225)
二、辅助平面法	(227)
三、等体积法	(229)
四、极值法	(232)
第七章 排列与组合	(234)
第一节 引言	(234)
第二节 计数法则	(234)
一、加法法则	(235)
二、乘法法则	(236)
第三节 排列与组合	(238)
一、排列与组合的概念	(238)
二、排列组合的基本公式	(239)
三、组合恒等式	(242)
四、实际应用举例	(243)
第四节 二项式系数	(249)
一、二项式定理	(249)
二、二项式系数的基本性质	(250)
三、组合恒等式	(253)
四、多项式定理	(257)

第五节 数学思想回顾.....	(258)
一、组态的概念.....	(258)
二、一一对应.....	(259)
三、计数概念.....	(259)
四、枚举的概念.....	(259)
五、殊途同归的思想.....	(259)

第一章 不等式

第一节 引言

首先,我们分析两个实例:

【例1】 在平面内,以 O 点为支点,一长为 l 的木棒一端固定在 O 点,则另一端点 A 在平面内的轨迹为: $x^2 + y^2 = l^2$. 显然,这是一个等式. 虽然不知 A 点的具体位置,但知其平面内具体曲线上(如图 1-1).

【例2】 在平面内,一长为 l 的细绳一端固定在 O 点,另一端 A 在平面内的轨迹为: $x^2 + y^2 \leq l^2$. 显然,这是一个不等式,它给出了 A 点在平面内的可能区域(如图 1-2). 不等式就是研究形如 $x^2 + y^2 \leq l^2$ 的式子的性质及求解.

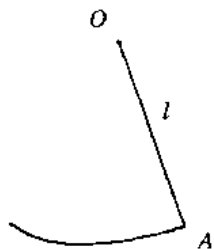


图 1-1



图 1-2

本章主要讨论不等式的性质,重点了解不等式及不等式的解法.

第二节 不等式符号“>”

我们知道,“ $3 > 2$ ”中记号“ $>$ ”是大于的意思,那么“ $-3 > -2$ ”吗?大家会说:“ -3 比 -2 小.”

我们究竟该怎样确定实数的大小呢?通常,取一根自左指向右的具有水平标尺的直线作为实数轴,用上面的点代表实数,这样实数与实数轴上的点建立一一对应关系. 规定:点从左至右依次出现时,相应的实数从小到大变化. 如图 1-3 所示:

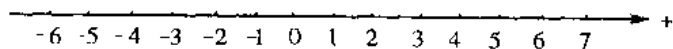


图 1-3

由于点 -3 位于 -1 左边,所以 $-3 < -1$;同样, $-4 < 3, 0 < 5, -3 > -4$.
所谓不等式,就是用不等号联系的式子.

上面从几何方法了解了如何比较两实数的大小关系,而用代数方法往往更能比较两实数大小.

定义 若 a 与 b 是任意两个实数,则当且仅当 $a - b > 0$ 时,有 $a > b$.

这样,大家可分别用两种不同方法判别下列几组数的大小:

e 与 2 ; π 与 3 ; $\sqrt{2}$ 与 1.5 .

当然, $3x + 5 > 2x - 7, \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 < 0$ 亦是不等式.

第三节 不等式公理

以下,我们给出不等式公理,以期从理论上建立不等式体系:

公理 1 若 a 为实数,则下述论断有且只有一个成立: a 是集合 O 的惟一元素; a 是正数集合 P 的一个元素; $-a$ 是集合 P 的一个元素.

公理 2 若 a, b 是正数集合 P 的两个元素,则 $a + b$ 与 $a \cdot b$ 也是集合 P 的元素.

上面两个正数集合 P 的简单命题,不加证明地叙述出来,被视为公理.

其中,公理 1 说明了三种可能情况,任意一个实数 a 与其相反数 $-a$ 之间有如下关系:如 a 是 0 ,则 $-a$ 也是 0 ;若 a 是正数,则 $-a$ 是负数;如 $-a$ 是正数,则 a 是负数.从几何方法可知,实数 a 与 $-a$ 的点要么重合,要么位于 O 点两侧.

所以,读者不难得出:若 a, b 为实数,则下列关系式有且只有一个成立:

$$a = b, a > b, a < b \text{ (公理 1')}.$$

第四节 简单的不等式关系

不等式 $b > a$ 可以写成 $a < b$,念作“ a 小于 b ”.这两个不等式等价.

譬如: $-3 > -4, -5 < 3, -3 < 0$. 这里,符号“ $>$ ”与“ $<$ ”都表示严格不等式.

然而,不等式研究中,需考虑两个关系式,即混合不等式 $a \geq b$ 与 $a \leq b$,分别念作“ a 大于或者等于 b ”及“ a 小于或者等于 b ”.关系式 $a \geq b$ 是指: $a > b$ 或者 $a = b$;关系式 $a \leq b$ 是指: $a < b$ 或者 $a = b$. 例如, $-4 \geq -5, -3 \geq -3, -8 \leq -7, -6 \leq -6$.

如果两种记号“ $>$ ”和“ $<$ ”混着用,那么记号较大的(开的)一端朝着较大的数,较小的(尖的)一端朝着较小的数,例如: $-3 < -2 < 0$

第五节 不等式的性质

数学家们常常从几个重要的基本概念和假设出发,建立起一个精密严谨的体系.推导不等式时,最终要用到的基本假设是前面的两条公理,还有实数系及其运算(例如分配律、

数学归纳法等等),以及由这些公理推出的几条简单定理.

一、传递性质

定理 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

一般地,若 $a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_3, \dots, a_{n-1} \geq a_n$, 则 $a_1 \geq a_n$. 当且仅当所有关系式都是等式时,有 $a_1 = a_n$.

假如你在星期六花的钱比在任何一个工作日花的都多,而在星期日花的钱至少与在星期六花的一样多,那么可以断定你在星期日花的钱比在任何工作日花的钱都多.这是一个典型的支出方面的例子,充分显示了传递性命题.

证明: 仅对 4 个实数的情形证明.

假设, $a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_3, a_3 \geq a_4$, 由不等式的代数定义, 数 $a_1 - a_2 \geq 0, a_2 - a_3 \geq 0, a_3 - a_4 \geq 0$. 则 $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) = (a_1 - a_4) \geq 0$. 再次运用不等式的代数定义, 有 $a_1 \geq a_4$.

等号成立, 当且仅当所有等号成立, 即 $a_1 = a_2, a_2 = a_3, a_3 = a_4$, 则 $a_1 = a_4$. 一般情形下, 读者不难用数学归纳法证明.

二、加法性质

定理 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$; 若 $a > b, c$ 是任意实数, 则 $a + c > b + c$.

一般地, 若 $a_1 \geq b_1, a_2 \geq b_2, \dots, a_n \geq b_n$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$. 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 时, 等式成立.

证明: 由假设, 每个数 $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n$ 均大于或者等于 0, 则 $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n)$ 大于或者等于 0. 等号当且仅当 $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$ 时成立, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

三、与数的乘法性质

定理 若 $a > b, c > 0$, 则 $a \cdot c > b \cdot c$; 若 $a > b, c < 0$, 则 $a \cdot c < b \cdot c$.

一般地, 我们有: 若 $a \geq b, c > 0$ 则 $ac \geq bc$; 当且仅当 $a = b$ 时, $ac = bc$; 若 $a \leq b, c < 0$, 则 $ac \geq bc$, 当且仅当 $a = b$ 时, $ac = bc$.

即: 不等式各项乘以一个正数时, 不等号保持不变; 不等式各项乘以一个负数时, 不等号要换向. 例如:

$3 > 2$, 用 1 与 -1 分别乘不等式两项, 得到 $3 > 2, -3 < -2$.

证明: $a \geq b$, 知 $a - b \geq 0, c > 0$, 则 $(a - b) \cdot c \geq 0$, 即 $ac \geq bc$. 等号成立, 当且

仅当 $a - b = 0$ (即 $a = b$) 时.

$a \leq b$, 知 $a - b \leq 0, c < 0$, 则 $(a - b) \cdot c \geq 0$, 即 $ac \geq bc$. 等号成立当且仅当 $a - b = 0$ (即 $a = b$) 时.

四、减法性质

定理 若 $a > b, c > d$, 则 $a - d > b - c$; 若 $a > b, c$ 是任意实数, 则 $a - c > b - c$. 一般地, 若 $a \geq b, c \geq d$, 则 $a - d \geq b - c$; 当且仅当 $a = b, c = d$ 时, $a - d = b - c$.

证明: 如假设 $a \geq b, c \geq d$, 有:

$$a - b \geq 0, c - d \geq 0$$

则 $(a - b) + (c - d) \geq 0$, 可得 $a - d \geq b - c$. 等号成立, 当且仅当 $a - b = c - d = 0$ 时 (即 $a = b, c = d$).

例如: $8 > 7$ 及 $6 > 5$, 得到 $8 - 5 > 7 - 6$, 而不等式 $8 - 6 > 7 - 5$ 是错误的.

注意: 定理中是 $a - d$ 及 $b - c$, 不是 $a - c$ 及 $b - d$.

五、乘法性质

定理 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则有: $ac > bd$.

一般地, 如 $a_1 \geq b_1 > 0, a_2 \geq b_2 > 0, \dots, a_n \geq b_n > 0$, 则 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \geq b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n$. 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 时, 等号成立.

读者应用数学归纳法不难证得.

六、除法性质

定理 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则有 $a/d > b/c$. 特别地, 对于 $a = b = 1$, 若 $c > d > 0$, 则 $1/d > 1/c$.

一般地, 若 $a \geq b > 0, c \geq d > 0$, 则 $a/d \geq b/c$; 当且仅当 $a = b, c = d$ 时, $a/d = b/c$.

注意: 这里是 $a/d, b/c$, 而不是 $a/c, b/d$.

证明: $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{dc}$

由于 $a \geq b > 0, c \geq d > 0$. 利用乘法性质, 我们有 $ac \geq bd$, 即 $ac - bd \geq 0, dc > 0$,

故 $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} \geq 0$, 即 $a/d \geq b/c$.

容易从上述证明中得知: 不等式等号成立, 当且仅当 $a = b, c = d$ 时.

读者应注意: 由不等式 $9 > 7$ 及 $6 > 4$, 得到 $9/4 > 7/6$, 而得不到 $9/6 > 7/4$.

由乘法、除法性质, 读者易得到乘幂性质.

七、乘幂及方根性质

若 $a > b > 0$, m, n 是正整数, 且 $a^{\frac{1}{n}}$ 与 $b^{\frac{1}{n}}$ 表示 a, b 的正 n 次方根, 则:

$$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}, \text{ 且 } a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}}.$$

一般地, 我们可得到: $a \geq b > 0$, m, n 是正整数, 且 $a^{\frac{1}{n}}, b^{\frac{1}{n}}$ 分别表示 a, b 的正 n 次方根, 则 $a^{\frac{m}{n}} \geq b^{\frac{m}{n}}$, 且 $b^{-\frac{m}{n}} \geq a^{-\frac{m}{n}}$. (*)

式(*)中等号成立当且仅当 $a = b$ 或者 $m = 0$ 时, 有 $a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$ 或者 $b^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$. (怎样给出严格证明过程请读者思考).

第六节 不等式性质应用

有关不等式的一些基本性质, 我们已列出且借助不等式的两条基本公理予以证明. 下面从求证问题的方法以及分析问题的角度两个方面来谈不等式的基本性质的应用.

一、分析法

将所求证不等式(以下称为目标不等式)两边分别变形, 依据不等式基本性质或相应已有结论予以证明不等式的方法, 我们称之为分析法.

请同学们分析问题:

【例 1】 试证: ① 对所有 a, b, c, d , 都有不等式 $(a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$

$$\text{② } (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \leq (ac + bc)^2$$

并且, 当且仅当 $ad = bc$ 时, 不等式等号成立.

分析: 要证 ① $(a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$, 即要证:

$$a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \leq a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2, \text{ 亦即: } -a^2d^2 - b^2c^2 \leq -2abcd$$

$$\text{即: } a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd$$

这是大家熟知的事实 $(ad - bc)^2 \geq 0$.

证明: $\because (ad - bc)^2 \geq 0$

$$\therefore a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd$$

$$\therefore -a^2d^2 - b^2c^2 \leq -2abcd$$

$$\therefore a^2c^2 - a^2d^2 - b^2c^2 + b^2d^2 \leq a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2$$

$$\therefore (a^2 - b^2) \cdot (c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$$

同法可证 ② 式成立, 且当 $ad = bc$ 时, 等式成立.

分析法的思路: 从求证的不等式出发, 分析这个不等式成立的条件, 把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题. 这些条件往往是条件不等式、不等式基本性质以

及已有的结论.

其实不难发现,上述证明过程并非分析过程,它是利用某些已经证明过的不等式($a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \geq 0$)作为基础,再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式.这种证明方法,通常叫做综合法.

二、综合法

【例2】 证明: $(a^2 - b^2)^2 \geq (a - b)^4$ 对一切满足 $a \cdot b \geq 0$ 的 a, b 都成立,并且:
 $(a^2 - b^2)^2 \leq (a - b)^4$ 对一切满足 $a \cdot b \leq 0$ 的 a, b 都成立.

证明: $\because ab \geq 0$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\therefore (a + b)^2 \geq (a - b)^2$$

$$\therefore (a + b)^2 \cdot (a - b)^2 \geq (a - b)^4$$

$$\text{即: } (a^2 - b^2)^2 \geq (a - b)^4.$$

同理, $\because ab \leq 0$

$$\therefore a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\therefore (a + b)^2 \leq (a - b)^2$$

$$\therefore (a + b)^2 \cdot (a - b)^2 \leq (a - b)^4$$

$$\text{即: } (a^2 - b^2)^2 \leq (a - b)^4.$$

【例3】 求证: $\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$

证明:

证法一 因为 $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ 和 $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ 都是正数,所以只须证明

$$(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$$

$$\text{展开得 } 9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18}$$

$$\text{即 } 2\sqrt{14} < 2\sqrt{18}$$

$$\sqrt{14} < \sqrt{18}$$

$$14 < 18$$

因为 $14 < 18$ 成立,所以

$$\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

成立.

证法二 $\because 14 < 18$

$$\therefore \sqrt{14} < \sqrt{18}$$

$$2\sqrt{14} < 2\sqrt{18}$$

$$9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$$

$$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$