最优规划与统筹方法

谢胜智　许仁忠
邱敦元　陶德川　编著

四川科学技术出版社

4

经济应用数学

责任编辑：周　军
封面设计：韩建勇
技术设计：周　军

经济应用数学（四）

最优规划与统筹方法

谢胜智等　编著

四川科学技术出版社出版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
ISBN 7—5364—0442—5/O·16

1988年6月第1版　开本787×1092毫米1/32
1988年6月第1次印刷　字数 195千
印数 1—11,800 册　印张 9
定价：2.30元

《经济应用数学》编写组成员

（以姓氏笔划为序）

史申心　许仁忠　刘祖佑　邱敦元　李继昭

李　勤　杨天培　金玲芳　罗绍仪　钟冠国

封长安　张晓圃　陶德川　柴彭颐　徐大江

赖明德　谢胜智　温惠林　舒　昉

主纂　谢胜智　许仁忠

主审　胡　朋　吴　怀　王荫清

前　　言

近年来，定量分析和处理现实经济活动的工作有所加强和发展，对进行数量分析所必需的经济数学知识的需要也有所增大和提高。这套《经济应用数学》就是基于此编写的。

本书的编写首先着眼于对经济活动作定量分析的实际需要，同时，作为经济管理类大学本科教材，也兼顾到学生进行更高层次学习的需要。因此，本书的微积分、线性代数、概率论等经济数学基础知识，是以教委颁发的研究生入学全国统一考试数学大纲的基本要求，同时考虑本科学生参加实践及学习相关学科的需要为编写大纲的。在这个基础上，在内容的选取及编写上，加强了经济管理中各种应用数学方法的介绍与讲授，例如投入产出分析，统筹方法，各类数理统计方法以及除线性规划外的目标规划、整数规划、动态规划等最优化方法。在习题的选编上，分了两个层次。第一层次的习题是对掌握基本知识的练习与检查，第二层次的习题是用以知识的加强和提高。为了适应近年来各类考试中的标准化试题，习题中选编了一定的客观性题目。

全书共分五册：《微积分(上)》、《微积分(下)》、《线性代数》、《最优规划与统筹方法》、《概率论与数理统计》，全部讲完约需300个学时。本册《最优规划与统筹方法》由谢胜智、许仁忠、邱敦元、陶德川等同志编著，由谢胜智、许仁忠同志主纂。廖世发、代佳玲等同志参加了

部分章节的编校、资料收集与整理、习题及习题答案的选编工作。

本书在编写和成稿过程中得到四川大学数学系教授胡朋先生、西南财经大学数学教授吴怀先生、成都科学技术大学数学教授王荫清先生的关心和指导，并承蒙他们审阅全书。初稿完成后，由西南财经大学、清华大学管理学院、上海交通大学、复旦大学管理学院、吉林大学经济管理学院、南京工学院管理分院、中国计量学院、北京财贸学院、贵州财经学院、云南财贸学院、浙江财经学院、重庆工业管理学院、山西经济管理学院、天津商学院、重庆商学院、广东商学院、上海大学商学院、温州大学、杭州电子工业学院、浙江丝绸工学院、江苏商业专科学校、浙江冶金经济专科学校等近三十所院校四十余名数学教师参加讨论，提出了不少宝贵的意见和建议，使本书增色不少。在此，向胡朋先生、吴怀先生、王荫清先生及参加教材讨论的老师们表示衷心的感谢。

编者水平有限，加之成书时间仓促，错误在所难免，恳谢读者批评斧正，不吝赐教，以利提高和改正。

《经济应用数学》编写组

一九八八年三月一日

目　　录

第一章　线性规划导论

线性规划是运筹学规划论的一个分支。它是在满足一定约束的前提下，如何使预定的目标达到最优的一种应用数学方法。本世纪30年代，线性规划从运输问题的研究开始，随后在二次世界大战中得到了很大发展，特别是美国数学家*G. B. Dantzig*于1947年提出求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。现在，大至国民经济计划的最优化方案的提出，小到一个班组的工作合理的安排，都有它的用武之地。线性规划由于具有适应性强、应用面广、计算简便等特点，因而成了现代化管理的重要手段之一。

§1—1　问题的提出

什么是线性规划问题？为回答这个问题，我们先看下面的例子。

〔例 1〕某工厂制造甲、乙两种产品，设制造甲种产品1公斤需要劳动力7人（指标准工作日，下同），原料5公斤，电力2度，制造乙种产品1公斤需要劳动力5人，原料8公斤，电力 5 度。若在一月内该厂能提供劳动力3500人，原料4000公斤，电力2000度；而生产一公斤甲、乙产品的收益分别为6元和7元。问该厂在现有条件下，应如何决定甲、乙产品的

产量，才能使收益最多？

很明显，可以采用许多方案来安排甲、乙产品的生产，然而，合理的方案，应该是所花的劳动力、原料和电力都不超过该厂能提供的最大数量。也就是说，如果设生产甲、乙产品的数量分别为x_1公斤和x_2公斤，则由题设，合理的方案中的x_1和x_2应满足如下不等式组：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \end{cases} \tag{1.1}$$

同时，考虑到变量x_1与x_2的实际意义——甲、乙两种产品的产量，显然它们都应是非负的，于是在(1．1)式中还要加上非负变量的要求，从而得到：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是在制订生产方案时所受到的限制，它表明决策者的行为要受到这些限制条件的约束，因此，在数学上一般地称形如(1．2)的一次不等式组为约束条件，其中的变量作为决策变量。

其次，对于例1中提出的问题，为了判断不同方案的优劣，需要确定一个衡量的标准，显然，这个标准就是各个方案所获得收益的多少。因而它可以用下式来表示：

$$6x_1+7x_2 \quad (元) \tag{1.3}$$

此式表明了决策者所追求的最优目标和方案中的变量之间的相互联系，因此，在数学上通常称形如(1．3)的线性表达式为目标函数。

综上所述，例1提出的问题，就是要确定 x_1 和 x_2 的数值，使其在满足约束条件(1．2)的前提下，同时使目标函数(1．3)式取最大值。为简便计，可将(1．2)与(1．3)合并记为：

$$\begin{aligned} \max \quad & z=6x_1+7x_2 \\ s.t. \quad & 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ & 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ & 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

式中*s.t.*是“*subject to*”（在…条件下）的缩写。由于(1．1)式以数学式子的形式表示了例1，所以常称(1．4)式为实际问题例1的数学模型。

我们再看一个例子。

〔例2〕某养鸡场养鸡一万只，用大豆和谷物两种饲料混合喂养。每天每只鸡平均吃混合饲料0.5公斤，其中至少应含有0.11公斤的蛋白质和0.03公斤的钙。已知每公斤大豆中含有50%的蛋白质和0.2%的钙，价格是0.4元；每公斤谷物中含10%的蛋白质和0.1%的钙，价格是0.2元。问应如何混合饲料，才能使成本最低？

这个问题可以用数学语言描述如下：

设每天的大豆用量是x_1公斤，谷物用量是x_2公斤，每天混合饲料的总成本为z元，显然目标函数$z=0.4x_1+0.2x_2$。又由题设知混合饲料的总量有约束条件$x_1+x_2=5000$；混合饲料中的蛋白质与钙的含量分别有约束条件$0.5x_1+0.1x_2\geqslant 5000\times 0.11$，$0.002x_1+0.001x_2\geqslant 1000\times 0.03$。仿照例1，则实际问题例2的数学模型是：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=0.4x_1+0.2x_2 \\
s.t.\quad & x_1+x_2=5000 \\
& 0.5x_1+0.1x_2\geqslant 550 \\
& 0.002x_1+0.001x_2\geqslant 150 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1. 5}
$$

一般地，在满足约束条件的前提下，使目标函数达到最大（最小）值的问题称为数学规划问题，特别地，当约束条件为变量的线性等式（方程）或不等式，而且目标函数为变量的线性函数时，就称其为线性规划问题。例如(1. 4)式和(1. 5)式各表示一个线性规划问题。

注意，有些实际问题初看不全是线性的，但通过适当的变换，可以把它们化为线性的。我们研究下面的例子。

〔例3〕某车间甲、乙、丙三个班组生产同一种产品。每件产品由4个A种零件和3个B种零件组成。这两种零件需要耗用铜和钢。现该车间库存铜与钢的数量分别是50公斤与800公斤。每个生产班的铜、钢耗用量和两种零件产量如表1—1表示。问这三个班组各应开多少班次，才能使这种产品

的配套数达到最多？

表1—1

班　组	每班用料数(公斤)		每班产量(个数)	
	铜	钢	A种零件	B种零件
甲	0.8	6	7	4
乙	0.5	8	8	9
丙	0.3	9	6	5

如果我们设x_1，x_2，x_3分别是甲、乙、丙三个班组所开的生产班次，那么由于用料的限制，有以下两个约束条件：

$$0.8x_1+0.5x_2+0.3x_3\leqslant 50$$

$$6x_1+9x_2+8x_3\leqslant 800$$

这三个班组生产的A,B两种零件的总数分别是$7x_1+6x_2+8x_3$和$5x_1+9x_2+4x_3$。因为目标是要使得产品的配套数最多，而每件产品需要4个A种零件和3个B种零件，所以产品的配套数不超过

$$\frac{1}{4}(7x_1+6x_2+8x_3)\text{和}\frac{1}{3}(5x_1+9x_2+4x_3)$$

中较小的一个。若令其为z，则有

$$z=\min\left\{\frac{1}{4}(7x_1+6x_2+8x_3),\frac{1}{3}(5x_1+9x_2+4x_3)\right\}$$

显然，这目标函数不是线性的，我们要设法使它成为线性的。因此，再设

$$x_4=\min\left\{\frac{1}{4}(7x_1+6x_2+8x_3),\ \frac{1}{3}\ (5x_1+9x_2+4x_3)\right\}$$

因为x_4是大括号内两个数中较小的一个，所以上式等价于不等式组：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}(7x_1+6x_2+8x_3)\geqslant x_4\\[2ex]\dfrac{1}{3}(5x_1+9x_2+4x_3)\geqslant x_4\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}7x_1+6x_3+8x_3-4x_4\geqslant 0\\5x_1+9x_2+4x_3-4x_4\geqslant 0\end{cases}$$

综上所述，例 3 的数学模型是

$$\max\quad z=x_4$$

$$s.t.\ \begin{cases}7x_1+6x_2+8x_3-4x_4\geqslant 0\\5x_1+9x_2+4x_3-3x_4\geqslant 0\\0.8x_1+0.5x_2+0.3x_3\leqslant 50\\6x_1+9x_2+8x_3\leqslant 800\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0\end{cases}\qquad(1.\ 6)$$

由(1。6)式可见，例 3 也归结为一个线性规划问题。

§1—2　线性规划问题的标准形式

从上节讨论的几个例子来看，尽管这些经济问题有各自的特点，但就其数学模型来说，它们却有很多共同之处：

(1) 每个问题都用一组未知数(x_1, x_2, …, x_n)表示欲求方案；这组未知数(即决策变量)的一组定值就代表一个具体方案。通常要求这些未知数取值是非负的。

(2) 存在一定限制条件(即约束条件)，这些限制条件都可以用一组线性等式或不等式来表达。

(3) 都有一个目标要求，并且该目标可表示为决策变量的线性函数(即目标函数)。按讨论的问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

总之，线性规划是研究同一类对象——线性系统的优化问题，

为了研究的方便，我们规定线性规划的一种标准形式，并能把其它形式化为标准形式。于是，我们今后只须深入研究线性规划问题的标准形式。

定义1.2.1 下述形式的数学模型称为线性规划的标准形式

$$
\begin{aligned}
&\max{}^{[注]} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1.7) \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

〔注〕 有的教材采用目标函数的最小值来定义线性规划的标准形式，即用min取代max。

其中c_j和a_{ij}为实常数，b_i为非负常数，x_j为实变量。

这种标准形式有三个特点：

(1) 目标函数z是最大化类型；

(2) 约束条件除$x_j \geqslant 0$（$j=1, 2, \cdots, n$）外，都是等式（即约束方程）；

(3) 每一约束方程右边的常数b_i都是非负的。

式(1.7)可以简写成以下两种形式：

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, \quad i=1, 2\cdots, m \qquad (1.8)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

或者

$$\max \quad z=CX$$

$$s.t. \quad AX=b \qquad (1.9)$$

$$X \geqslant 0$$

其中$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$，$X\geqslant 0$即$X$的一切分量$x_j\geqslant 0$，$j=1, 2, \cdots, n$。

如果我们建立的线性规划的数学模型不是以上的标准形式，那么可以通过以下几种方法把它变换为标准形式。

(1) 若模型的目标函数是最小化类型，即

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

那么，我们令$z' = -z$，则求z的最小值等价于求z'的最大值。因而$\min z$与$\max z'$的最优解完全一致，所以，我们把目标函数中的系数c 变号，转而研究

$$\max \quad z' = \sum_{j=1}^{n} (-c_j x_j)$$

就可以了。

(2) 若模型的第i个约束条件右边的常数b_i是负数，那么可以在此约束条件的两边同乘“-1”，便可使b_i成为非负常数。

(3) 待诸$b_i \geqslant 0$以后，若约束条件为不等式，这时有两种情况：

当约束条件的某不等式为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

时，可在上式左边加上一个非负变量x_{n+1}，使其变为等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

习惯上称上式中的非负变量x_{n+1}为松弛变量。

当约束条件的某不等式为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

时，可在上式左边减去一个非负变量x_{n+1}，使其变为等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$