

高等院校选用教材(师范类)

中学数学教学教程

首都师范大学数学系 组 编

张景斌 主 编

连四清 刘晓玫 副主编

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书为高等师范院校数学系开设的中学数学教学研究类课程的教材,主要研究中学数学教学的规律性,以及如何在数学教学实践中把握规律。

本书内容涉及到中学数学教学的全过程及其主要环节,也涉及到数学教学的内容及结构等课程领域的主要问题。本书在注重理论研究的同时,也重视对数学教学实践的研究,使学生通过认真学习本教程,能够初步具备做一名中学数学教师的基本本领。

本书可作为高等师范院校数学系师生及中学数学教师学习教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

中学数学教学教程/张景斌主编. - 北京:科学出版社,2000.12

(高等院校选用教材(师范类))

ISBN 7-03-008706-2

I. 中… II. 张… III. 数学课-教学研究-中学-高等学校:师范学校-教材 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 49995 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 12 月第 一 版 开本:710×1000 1/16

2000 年 12 月第一次印刷 印张:16 1/4

印数:1—5 000 字数:278 000

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前 言

21 世纪的国际竞争主要是人才的竞争,人才的竞争说到底是教育的竞争,而教师整体的素质水平是影响学校教育的关键因素.人们越来越认识到,数学在全球信息化和科学技术的发展过程中起着重要的作用.21 世纪公民的数学素质是其文化素养的重要组成部分,而全民数学素质的提高,有赖于中学数学教师素质的提高.

为了使师范生成为一名合格的中学数学教师,我国数学教育研究工作者长期从事《中学数学教材教法》课程的研究与建设.70 年代末由 13 所院校协作组编写的《中学数学教材教法》,对这一课程的建设与发展起了非常重要的作用.但近 20 多年来,数学教育的思想和观念、内容和结构等都发生了很大的变化.该课程所涉及的研究领域亟须扩大,知识内容与思想观点亟待更新.加之本课程的教学过程中,存在着理论学习与教学实践相脱离的问题,于是从 80 年代末开始,我国高等师范院校的同仁开始研究与探讨该课程的内容、教学形式、教学方法和教学手段等的改革.

《中学数学教学教程》是我们首都师范大学数学系数学教育教研室的全体教师,在近 10 年对该课程改革研究、探讨、实验的基础上编写的.全书共分 11 章,各章的主要内容及其写作意图如下:

第一章数学的价值,主要谈数学的社会价值、文化价值和教育价值.随着社会和科学技术的发展,数学在社会生产和人们日常生活中的作用越来越重要,数学教师只有很好地认识数学的本质及其价值,才能真正教好数学,才能使数学教育对象对数学的价值有正确的认识.

第二章中学数学教学目的,主要进行中学数学教学目的的因素分析与内容分析.使未来教师了解到教学目的对数学教学的指导作用,了解根据什么确定数学教学目的,理解数学教学目的的内容及不同层次数学教学目的的作用和功能.

第三章中学数学教学过程的设计,主要论述数学教学原则问题、数学教学过程的主要因素分析、如何选择数学教学策略、非智力因素对数学学习的影响以及数学课堂教学的设计等问题.教学设计是现代教学论研究的重要方面,本书重点研究教学过程的设计,力求用新的思想观点来研究数学教学过程中的问题.

第四章数学教学技能,主要研究数学课堂教学技能及其形成.这一章内容突出数学教师的职业技能,研究方法是理论与实践并重,教学中采用微格教学的培训方法,较好地反映本课程理论性与实践性的特点.

第五章中学数学逻辑基础,研究逻辑学中与中学数学紧密相关的概念、判断、推理等基本问题,阐明逻辑基础知识与中学数学内容及其教学的联系,为师范院校学生深入理解数学知识、把握好数学知识的教学奠定基础.

第六、七、八章的内容分别为数学基础知识的学与教、数学思维与数学能力、中学数学思想方法,研究中学数学主要内容(包括数学概念、数学命题、数学技能和问题解决)的学与教的问题,突出数学思想与方法的学与教、数学思维品质的培养和数学能力的发展等.这些问题都是数学教育领域中研究的主要问题,在本书中占有重要地位.这三章内容的编写都注意把对“如何教”问题的研究建立在对“如何学”问题研究的基础之上,抓住了问题的根本.三章内容在层次上是递进的,也体现了研究的步步深入.

第九章数学教学评价,阐述数学教学评价及其功能,主要研究对学生数学学习效果的评价与对教师教学工作的评价问题.该部分内容为师范生在未来的数学教学工作中很好地评价学生的学习和利用评价正确引导学生学习,以及正确评价自己及他人的教学工作打下基础.

第十章数学教师与数学教学研究,以培养适应新世纪数学教育教学的研究型教师为目标,主要研究数学教师的素质、数学教学研究的内容和方法以及数学教育论文的撰写.使师范生对教育科研有明确的认识和努力方向.

数学教育的改革与发展是最后一章,其内容是探讨中学数学教育改革的基本动因,介绍近代数学教育改革的情况及当前数学教育改革的形势,并展望新世纪数学教育的发展.使师范生在步入工作岗位之前,就能对数学教育改革的前沿状况有较为清楚的了解和认识.

总之,本教程的编写本着继承与发展相结合,理论与实际相结合,学法与教法相结合,教学与研究相结合的原则,努力做到观点新、内容实、定位准.

本教程由张景斌担任主编,连四清和刘晓玫担任副主编,在首都师范大学数学系数学教育教研室集体讨论的基础上编写而成.具体分工如下:周春荔撰写第一章和第十一章;李延林撰写第二章;张景斌负责全书的整体设计并撰写第三章和第四章;刘晓玫负责全书的整体设计并撰写第五章和第八章;连四清负责全书的整体设计并撰写第六章;朱文芳和张燕勤撰写第七章;张洪达撰写第九章和第十章;全书由张景斌、连四清、刘晓玫做统一的修改并定稿.

首都师范大学数学系数学教育教研室 1998 年编写的讲义是本书写作的基础,李建才教授指导并参与了本书前期的大量工作,曹才翰、钟善基、李求

来、李玉琪等专家对我们的工作也给予了热情的指导,对此我们表示衷心的感谢!衷心感谢梅向明教授为本教程作序。

写作中我们参考了大量的相关著作和论文,虽然将主要参考文献列出,但不免会有遗漏,恳请作者原谅,并在此对我们所参考文献的作者表示衷心的感谢!

本教程是北京市普通高等学校教育教学改革试点项目“建立中学数学教材教法课程的新体系”的主要研究成果之一。北京市教委和首都师范大学的大力支持使本教程得以尽快与广大读者见面。

由于我们的水平有限,本书一定有不少的缺点,恳请各位专家、读者给予批评指正。

作 者

2000年6月于首都师范大学

第一章 数学的价值

要正确地认识数学教育,首先必须科学、全面地认识数学的价值.要科学、全面地认识数学的价值,又有赖于对数学的正确认识.人们对数学的认识是随着时代的发展而发展的,而且每个人对数学都有自己的理解.

§ 1.1 数学是什么

数学史表明,在 19 世纪以前,古典数学的主要成就是算术、几何学、代数学、微积分.这些数学学科所研究的都是客观事物的空间形式和数量关系.对此,恩格斯曾经概括为:“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系.”^①他还说,数学是“一种研究思想事物(虽然它们是现实的摹写)的抽象的科学.”^②恩格斯的这些论述划清了数学同自然科学的界限,坚持了唯物主义的观点,因而受到数学家普遍的赞成,至今仍被经常采用.由于近、现代数学的发展,数学研究的对象已经越出了对数量关系和空间形式最初意义的理解.比如,“数量”不仅指实数,而且包括向量、张量、矩阵,甚至还包括代数结构中的元;空间也不只是三维空间,还有 n 维空间、无穷维以及具有某种结构的抽象空间.此外,形式、结构、关系等都已成为现代数学的研究对象.比如布尔巴基学派就认为最普遍、最基本的数学结构有代数结构、序结构、拓扑结构.这是三个母结构,此外还有许多各式各样的子结构.由母结构和某些子结构一起,形成某个数学分支的结构.因此,有的数学家据此而认为:“数学是研究结构的科学”,“数学是模式的科学”.这些都远远超出了原来对数量关系的理解.因此,对数学研究的对象需要进行进一步的哲学概括,它既要包括 19 世纪以前恩格斯所概括的基本内容,又要反映 20 世纪以来数学的发展变化.

在一般意义下,抽象空间也好,形式、关系、结构也好,本质上都是一种量或量的一种表现形式.因此,依据 20 世纪数学发展的状况来概括,数学不外乎是研究量和量的变化的.“量”是贯穿到一切科学领域之内的,因此数学的用处也就渗透到一切科学领域之中.凡是要研究量、量的关系、量的变化、量的关系

① 恩格斯:《反杜林论》第 35 页,北京,人民出版社,1970 年.

② 恩格斯:《自然辩证法》第 192 页,北京,人民出版社,1971 年.

的变化、量的变化的关系的时候,就少不了数学.不仅如此,量的变化还有变化,而这种变化一般也是用量来刻画的.例如,速度是用来描写物体位置变化快慢的,而加速度则是用来刻画速度的变化的.量与量之间有各种各样的关系,各种各样不同的关系之间可能还有关系.为数众多的关系还有主从之分,也就是说,可以从一些关系推导出另一些关系.所以数学还研究变化的变化,关系的关系,共性的共性,循环往复,逐步提高,以至无穷.因此,从现代数学来讲,数学是研究量和量变的科学.其中纯数学是研究纯粹的量的科学,它是数学的基础部分.

从数学与现实世界的关系来看,数和形的概念是数学的两大柱石.数学是从人的需要中产生的,是从丈量土地和测量容积,从计算时间和制造器皿产生的.数与形的概念不是从其他任何地方,而是从现实世界中得来的.纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,所以是非常现实的材料.这些材料经过纯化、想象、创造,以极度抽象的形式出现,最后使数学以一个真正提问者的身份出现,它借助于逻辑组合、一般化、特殊化,巧妙地对概念进行分析综合提出新的富有成果的问题.数学成为了“思维的自由创造物与想象物”,虚数、四元数、群、环、域、无限维空间等概念在近、现代数学中相继产生,此时数学表现为脱离现实世界,与现实世界相对立的形式.其实,数学有如生长在现实世界土壤上的一棵参天大树,顶端的枝叶看起来似乎飘逸在云中,但它们是下段根茎的合乎逻辑的延伸.这些抽象概念之间的相互导出,也并不证明它们的先验的来源,而只是证明它们的合理的相互关系.

对数学与客观世界的关系,要有明确清醒的认识.数的概念、形的概念一开始就是抽象的.在现实世界看到的是3个人、5头牛等这样的数量,而看不见抽象的概念中的3或5;在现实世界看到的是圆的车轮、皎洁的满月、圆圆的烧饼这样的形体,而看不见抽象的概念中的圆.然而,数学研究是与抽象的概念中的3、5这样的数和抽象的概念中的点、线、面、体、三角形、圆这样的形打交道,再从这些概念出发组合、推理、一般化、特殊化产生更为抽象的概念.这样一来,抽象有了层次.这时,较低层次的概念就成了较高层次概念的数学现实.随着科学技术的发展,现实、实践的意义也在发展.因此我们应该看到,尽管数学是抽象的科学,研究人员整天对纯粹的数学概念进行研究,对它们的性质进行探索,这种对数学对象的研究、探索事实上就应被看作数学实践活动的一个重要内容.而正是这种对数学对象研究、探索的实践活动为进一步的创造性工作(新的数学抽象)提供了必要的基础.

通过以上分析,我们至少可以这样说:数学是以量和量变为研究对象的科学,是内容具体、形式抽象、理论严谨、结论确定、应用广泛、方法精巧和地位特

殊的一门基础科学. 以上对数学科学的分析, 将成为数学学科教育特点的重要根据之一.

§ 1.2 数学的社会价值

数学从它产生之日起就与社会有着密切联系, 随着数学的发展, 人们似乎觉得数学与社会的关系较自然科学似乎更加间接、更加模糊. 数学到底在社会上起多大作用的问题, 其答案构成一个谱. 谱的一端是“数学无用论”, 另一端是“数学万能论”, 依据对数学理解的不同, 每个人都站在这个闭区间的某一点上. 数学的用处也分为许多层次, 某一层次上有用的东西, 在另一层次上也许没用. 问题不同应用数学的方式也会不同: 首先是描述的层次, 其次是计量的层次, 再就是模型、系统与结构层次, 最后是规律、方法与理论思维的层次. 可见研究数学与社会的关系并不是轻而易举之事.

恩格斯明确指出, 数学是从人的需要中产生的, “必须研究自然科学各个部门的顺序的发展. 首先是天文学——游牧民族为了定季节, 就已经绝对需要它. 天文学只有借助于数学才能发展, 因此也开始了数学的研究——后来, 在农业发展的某一阶段和某个地区(埃及的堤水灌溉), 而特别是随着城市和大建筑物的产生以及手工业的发展, 力学也发展起来了. 不久, 航海和战争也都需要它. ——它也需要数学的帮助, 因而又推动了数学的发展.”^①丰富的历史资料告诉我们: 从数学知识的发源来看, 人们的社会实践是数学知识的源泉; 从数学知识的发展来看, 社会的需要是数学发展的实际支点和刺激; 从数学研究的手段与领域看, 社会生产和科技的进步, 不但为数学研究开辟了日益增多的新领域, 而且为数学研究提供了新的手段. 特别是在电子计算机广泛使用的今天, 使数学逐渐跻身于科学实验的行列. 当然, 从数学科学的客观真理性来看, 社会实践也是检验数学内容客观真理性的唯一标准.

近、现代社会的发展更是离不开数学. 从数学的社会功能来看, 可将数学知识分成四种形态: (1) 作为语言(符号系统)的数学, 数学的符号系统现在已成为通用的语言; 在现代社会中, 许多事物均用数学来表征. (2) 作为算法系统的数学, 这是应用最广的数学形态. (3) 作为形式系统的数学, 现代数学知识大都采取形式化公理系统表述的体系, 其中主要问题是对结构的分析. (4) 作为模型系统的数学. 数学研究从现实世界抽象出来的各种模型并发现其间的结构及其关系. “我们认为, 所有这些对数学有用的理解都来源于这样的事实, 即

^① 恩格斯:《自然辩证法》第 162 页, 北京, 人民出版社, 1971 年.

数学提供了一种有力的、简洁的和准确无误的交流信息的手段。”^①不管怎么说,数学最大的社会功能是推动科学技术的发展,正如培根所说数学是“通向科学大门的钥匙”,而科学技术的发展则是现代社会进步的主要动力。

越来越多的人认识到:国家的繁荣富强,关键在于高新的科技和高效率的经济管理.高技术是保持国家竞争力的关键因素.高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础则是数学.数学科学不仅帮助人们在经营中获利,而且给予人们以能力,包括直观思维、逻辑思维、精确计算以及结论的明确无误.“高新技术本质上是一种数学技术”,这种观点已为越来越多的人所接受.正如美国科学院院士 J. G. Glimm 所说:“数学对经济竞争力至为重要,数学是一种关键的普遍适用的,并授予人以能力的技术.”时至今日,数学已兼有科学与技术两种品格,这是其他学科难以见到的.学科的强大生命力在于对社会进步的贡献,数学也不例外.数学的贡献在于对整个科学技术(尤其是高新技术)水平的推进与提高,对科技人才的培养,对经济建设的繁荣,对全体人民的科学思维与文化素质的哺育,这四个方面的作用是极为巨大的,也是其他学科所不能比拟的.

在看到社会需要数学的同时,也要看到现代社会为数学的发展提供了条件.任何国家和地区,数学的发展大致可分为三个阶段:精英化阶段、职业化阶段、大众化阶段.19 世纪中期以后,数学的社会化使社会上出现了专业数学家,后来又出现了大学数学系.除了极少数有天赋的人之外,多数数学家都是通过学校教育培养出来的,比如第二次世界大战以后成长起来的数学家 99% 以上是通过正规教育途径培养起来的.另外,人们越来越认识到,“数学是一种潜在的资源.当你挖掘这个资源时,你会发现数学的真正价值.你会发现埋在故纸堆中的许多思想,可以成为你解决大小问题的工具,只要你去理解它,掌握它.”^②只有当广大群众对数学的理解深入以后,数学的潜在社会功能才能更充分地发挥出来.综上所述,如何通过学校教育培养高质量的数学人才并尽快地推进数学发展的大众化阶段,使更多的人理解数学,始终是数学学科教育的重要课题.

① 范良火译:《数学算术——英国学校数学教育调查委员会报告》第 19 页,北京,人民教育出版社,1994 年.

② 胡作玄:《数学与社会》第 28 页,长沙,湖南教育出版社,1991 年.

§ 1.3 数学的文化价值

文化,从广义来说,指人类在社会实践中所创造的物质财富与精神财富的总合.从狭义来说,指社会的意识形态,以及与之相适应的制度和组织机构.按照现代人类文化学的研究,文化即是指由某种因素(居住地域、民族性、职业等)联系起来的各个群体所特有的行为、观念和态度等,也即各个群体所特有的“生活方式”.数学无疑是人类文化的组成部分,被称作数学文化.

数学是一种文化,是20世纪60年代数学教育界提出的一种新观点.最早系统提出数学文化观的是美国学者怀尔德(R. Wilder, 1896~1982),在他的著作《数学概念的进化》和《作为文化系统的数学》中从文化生成的理论、发展理论等方面提出数学文化系统的概念及有关理论.怀尔德认为数学是一个由于其内在力量与外在力量共同作用而处于不断发展和变化之中的文化系统.数学文化即是由数学传统及数学本身所组成.书中明确列举了影响数学文化发展的11种力量.它们是:(1)环境的力量.环境力量可以导致新的数学概念和理论的建立,后者则又产生了可以用以解决实际问题的更为有效的技术.比如:第二次世界大战就曾极大地影响了当时数学的发展,它直接促进了系统分析、博弈论、运筹学、信息论等学科的研究以及新的、更为有效的电子计算机的研制.(2)遗传的力量.即指已有的数学工作对于进一步研究的影响.(3)符号化.认为对于新的、更为合适的符号的追求是数学发展的一个重要力量.(4)文化传播.是指不同文化的交流和相互影响,认为充分的文化交流是数学发展的一个重要条件.譬如,古希腊数学即为古巴比伦与古埃及数学和古希腊哲学相结合的产物;而中国古代数学由于缺乏必要的外部交流是最终陷入了停顿状态的一个重要原因.(5)抽象.这是数学的一个重要特点,是数学的威力之所在.(6)一般化.是指更高层次的抽象,例如,某些原来彼此独立地发展起来的理论后来被发现具有共同的特性,这时,我们就可以通过一般化建立一个新的理论,并使原有各个理论成为它的特例.群论的建立就是一个典型的例子.(7)一体化.是指原先互不相关的理论互相渗透,从而形成了一个具有更大潜力的新的理论.譬如,解析几何就是代数和几何的一体化.(8)多样化.是指由一个理论或概念去引出多种不同的新的理论领域.它们分别体现了原有理论或概念的不同特性.例如,由欧氏几何引出非欧几何和公理化方法,就是多样化的具体表现.(9)文化阻滞.是指由于文化传统的影响而阻碍对于某种更为先进的指导思想、更为有效的数学理论或方法的吸收.例如,阿拉伯数字在传播过程中就曾受到许多国家原有数学符号的阻滞.(10)文化抵制.是指对外来数学成分更为强烈、

更为自觉的排斥.这种抵制可能由于一般文化环境也可能由于数学传统所造成.例如,欧洲中世纪对古希腊数学的查禁就是文化抵制的典型.^①选择.此处既包括理论和概念的选择,也包括研究问题、方法以及符号和术语的选择.

在此基础上,怀尔德还提出了数学发展的23条规律.比如,重大问题的多重的独立的发现或解决,是一条规律,而不是例外.例如:苏格兰人约翰·耐普尔(J. Napier)与瑞士钟表匠标尔格(J. Burgi)彼此独立地创立了对数算法;17世纪下半叶,牛顿与莱布尼茨彼此独立地创立了微积分理论;19世纪初,德国数学家高斯、匈牙利数学家亚·鲍耶、俄国数学家罗巴切夫斯基几乎同时发现了非欧几何的新思想与新体系.再如,假设接受的一方已经达到必要的文化水平,那么不同文化与不同领域之间的传播经常会导致新概念的产生并加速数学的发展.数学的发展并不是以破坏或取消原有理论的方式进行的,而是用深化和推广原有理论的方式、用以前的发展作准备而提出新的概括理论的方式进行的.这种认为数学科学是一种文化的观点,如今已被数学教育界所认同,并为数学教育的研究提供了理论支撑.

我们应该看到,数学文化不同于艺术、技术一类的文化,数学文化属于科学文化,是一种理性文化.理性的探索有一个永恒的主题,这就是认识宇宙,也认识人类自己,在这个探索中数学有着特别的作用.数学曾经是科学革命的旗帜,是现代科学技术的语言和工具.现代科学的发展与成熟的关键步骤是使自己数学化.

首先,作为人类文化组成部分的数学,它的一个重要特点是追求一种完全确定、完全可靠的知识.数学的对象必须有明确无误的概念,其方法必须由明确无误的命题开始,服从明确无误的推理规则,借以达到正确的结论.数学方法既成为人类认识方法的一个典范,也成为人在认识宇宙和人类自己时必须持有的客观态度的一个标准.就数学本身而言,达到数学真理的途径既有逻辑的方面也有直觉的方面,但就其与其他科学比较而言,就其影响人类文化的其他部门而言,它的逻辑方法是最突出的.每个论点都必须有根据,都必须持之有理.除了逻辑的要求和实践的检验以外,任何其他的习俗、宗教的权威、皇帝的敕令都是无济于事的.这是一种追求真理的精神.数学的这样的一种求真的态度,倾毕生之力用理性的思维去解开那伟大而永恒的谜——宇宙和人类的真面目是什么?——这是人类文化发展高度的标志.这个伟大的理性探索是数学发展必不可少的文化背景,反过来,也是数学贡献于文化的最突出的功绩之一.

数学作为人类文化组成部分的另一个特点是:它不断追求最简单的、最深层次的、超出人类感官所及的宇宙的根本.所有这些研究都是在极度抽象的形

式下进行的.这是一种化繁为简以求统一的过程.从古希腊起人们就有一个信念,世界是合理的、简单的,因而是可以理解的.对于数学研究还要加上一点:这个世界的合理性,首先在于它可以用数学来描述.

作为人类文化组成部分的数学的再一个特点,是它不仅研究宇宙的规律,而且也研究它自己.在发挥自己力量的同时又研究自己的局限性,从不担心否定自己.数学不断反思,不断批判自己,并且以此开辟自己前进的道路.大家都说,数学最需要严格性,数学家就要问什么叫严格性?大家都说,数学在证明一串串的定理,数学家就要问什么叫证明?数学越发展,取得的成就越大,数学家就越要问自己的基础是不是巩固.越是在表面上看来没有问题的地方,越要找出问题来.当然,任何科学要发展就要变,但是只是在与实际存在的事物、现象或实验的结果发生矛盾时才变.惟有数学,时常是在理性思维感到有了问题时就要变.而且,其他科学中“变”的倾向时常是由数学中的“变”直接或间接引起的.大概到了19世纪末,数学向自己提出问题:我真是一个没有矛盾的体系吗?我真正提供了完全可靠、确定无疑的知识吗?我自认为是在追求真理,可是“真”究竟是指什么?我证明了某些对象的存在,或者说我无矛盾地创造了自己的研究对象,可是它确实存在吗?如果我不能真正的把这些东西构造出来,又怎么知道它是存在的呢?等等.数学在从整体上反思自己、解剖自己、不断完善自己.有人这样形象地描述:“数学是一株参天大树,它向天空伸出自己的枝叶,吸收阳光.它不断扩展自己的领地,在它的树干上有越来越多的鸟巢,它为越来越多的学科提供支持,也从越来越多的学科中吸取营养.它又把自己的根伸向越来越深的理性思维的土地中,使它越来越牢固地站立.从这个意义上讲,数学是人类理性发展的最高的成就之一”^①.

数学深刻地影响人类精神生活,可以概括为一句话,就是它大大地促进了人的思想解放,提高与丰富了人类的整个精神水平.从这个意义上讲,数学使人成为更完全、更丰富、更有力量的人.古希腊欧几里得几何学的诞生,标志着有了我们现在意义下的数学科学.它第一次提出了认识宇宙的数学设计图的使命,第一次提出了人类理性思维应该遵循的典范.欧洲文艺复兴时期数学直接继承了希腊数学的成就,终于成了当时科学技术革命的旗帜.它的主题仍然是“认识宇宙,也认识人类自己.”哥白尼对宗教是很虔诚的,他从不认为自己的学说有违教义.但他相信希腊人的思想,即宇宙是和谐的,是按数学理论设计的.哥白尼的《天体运行论》实质上就是一本数学定理的汇集.哥白尼提出的日心说,“完全是来自希腊的数学理论.无怪他的理论开始时只是得到数学家

^① 齐民友:《数学与文化》第8页,长沙,湖南教育出版社,1991年.

的支持.哥白尼以为自己找到了上帝设计宇宙的更和谐更简洁的数学方案,殊不知,他却彻底否定了上帝的宠儿——人——在宇宙中的中心地位.”^①牛顿力学本质上也是数学.当时机械唯物论的决定论,是科学技术革命的指导思想,而数学是它的最主要的武器.17世纪数学的发展以微积分的问世达到了顶峰,取得了极其辉煌的胜利.这时由希腊起源的这种文化,由资本主义的兴起与发展,从地域上说已成了全世界的文化.作为希腊文化的重要组成部分的数学,也就不再只是希腊数学,而成为全人类的数学文化.后来的非欧几何的出现是人类思想的一次大革命,它仍然是一次思想解放,是从人自己的定见下解放出来.数学的对象越来越多的是“人类悟性的自由创造物”,这件事曾引起多少人对数学的误解和指责,实际上是人类的一大进步.人在自己的成长中发现,单纯凭着直接的经验去认识宇宙是多么的不够.人既然在物质上创造出了自然界中本来没有的东西——一切工具、仪器、电脑等,来认识和改造世界,为什么不能在思维中创造出种种超越直接经验的数学结构来表现自然界的本来面目呢?非欧几何的确立从根本上动摇了牛顿的时空观,为相对论的出现开辟了道路.

21世纪信息时代的到来,数学更加显得重要,因为高新技术本质上是数学技术.人们越来越认识到没有现代数学就不会有现代文化,没有现代数学的文化是注定要衰落的.数学作为文化的一部分,其最根本的特征是它表达了一种探索精神.数学的出现,确实是为了满足人类的物质生活需要,可是离开了这种探索精神,数学是无法满足人类的物质生活需要的.我们应当从数学文化的视角来认识数学学科教育.数学学科教育说到底,应是通过一定的数学知识的学习,培养人们的求真、创新的探索精神.

§ 1.4 数学的教育价值

所谓数学的教育价值即数学教育对人的发展的价值.如何认识数学科学的教育价值,这是数学教育的一个基本理论问题,也是数学教育工作者为了卓有成效地进行数学教育而必须具备的一种数学教育理论修养.古往今来,大凡受过适度教育的人,都要接受不同程度的数学教育.那么,为什么要进行数学教育?为什么把数学设为学校的主科?要回答这个问题,有赖于对数学学科教育价值的理解.而正确认识数学的社会价值与数学的文化价值,才能全面认识数学对发展人的素养的功能,这是正确理解数学的教育价值的基础.

^① 齐民友:《数学与文化》第38页,长沙,湖南教育出版社,1991年.

1.4.1 数学科学的实践价值

所谓数学科学的实践价值,是指数学科学对于认识客观世界、改造客观世界的实践活动所具有的教育作用 and 意义. 正如数学家拉普拉斯所说:“数学是一种手段,而不是目的,是人们为解决科学问题而必须精通的一种工具.”^①这种工具的作用主要表现为:

(1) 数学是科学的语言. 任何科学都有自己的语言,这种语言能高度准确地描述科学所固有的特性. 同样,数学也是一种语言,从它的结构和内容来看,是一种比任何国家的语言都要完善的语言. 数学是一种符号语言,具有简约性、确定性,是表示量的关系的语言,因此是一种普适语言.

在初中代数中指出,用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子,叫代数式. 用代数式总能表达一个意思,因此代数式是数学语言中的词汇或短句. 而列方程就是把日常生活语言翻译成代数语言. 要想掌握代数这个工具,就要学会认读代数式,会翻译其含义,并且会由代数式展开推理. 这是学好代数,以至于学好数学的基本功. 数学语言由于其本质上包含着思维的经济性,使得我们可用少量的语言和公式来描述不同质的过程. 好的数学语言本身还可成为数学发现的有力工具. 譬如, $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$ 的符号记法能使你发现即使几十个数值例子都不大可能发现的东西——三次方程根与系数的关系. “实际上,对于各行各业的技术术语而言,同样都要训练有素才能灵活运用. 但是,不能认为这些术语和符号的引入,增加了这些理论的难度. 相反地,这些术语或符号的引入,往往是为了理论的易于表述和解决问题. 特别是在数学中,只要细加分析,即可发现符号化给数学理论的表述和论证带来极大的方便,甚至是必不可少的.”^②可见,学好数学语言正是为今后到科学技术领域遨游的必要条件.

(2) 数学是计算的工具. 数值计算是数学的基本功用之一. 一门学科从定性的描述到定量的分析,是这门学科达到成熟阶段的重要标志. 因此,数学科学的实践价值的一个方面就在于它是计算的工具. 现在数值计算都可以使用计算器或计算机,还学数学做什么? “实际上,数学是一门艺术,是一门通过发展概念和技巧以使人们更为轻快地前进从而避免靠蛮力计算的艺术.”^③比如,计算:

① [美]M. 克莱因:《古今数学思想》,上海科学技术出版社,1979年.

② [美]R. E. 莫里兹:《数学家言行录》第74页,南京,江苏教育出版社,1990年.

③ [英]M. 阿蒂亚:《数学的统一性》第125页,南京,江苏教育出版社,1995年.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}.$$

靠蛮力计算甚至用计算器都可求得结果,然而观察分母特点,进行拆分,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \\ &1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9, \end{aligned}$$

省时省力又准确.可见,数学教化人们的是计算的艺术.

(3) 数学是科学抽象的工具.运用数学的抽象,数学模型的方法,在理想状态下分析最纯粹的过程,是科学研究的重要手段.数学作为科学抽象的工具,在科学史上可以找到无数的事例.著名的“七桥问题”,在普通市民走来走去找不到出路的时候,数学家欧拉把其抽象为“一笔画”问题,一举证明所要求的走法不存在.牛顿研究天体力学,中心的物理概念是引力.而引力的作用是完全不能用物理的术语解释的.牛顿不给解释,只给出一个显明而有用的数量公式,表明引力是怎样作用的.这就是为什么牛顿在《自然哲学的数学原理》的开端处说,我计划在这里只给出这些力的数学概念,不考虑它们的物理原因的根底.虽然牛顿放弃物理的机械解释而改用数学的描写,甚至使杰出的科学家也感到震惊.“但是,只有依靠数学的描写(即使完全缺乏物理的了解时也依靠它)才使得牛顿的惊人的贡献成为可能,更不用说后来的发展了.”^①近现代的科学成就,如相对论、量子力学、信息论、控制论等,都是因为有了相应的数学为之提供了科学抽象的工具,才使得它们成为现代科学发展的里程碑.通过数学学科教育,可以使人们熟练地掌握打开科学大门的钥匙.

1.4.2 数学科学的认识价值

所谓数学科学的认识价值,是指学习和掌握数学科学知识及其过程在发展人的认识能力上所具有的教育作用 and 意义.认识价值是评价一门科学是否具有教育价值的最根本的标准和出发点.数学科学的认识价值表现为:

(1) 数学是锻炼思维的体操,启迪智慧的钥匙.每个正常人的思维能力的先天素质可能差别不大.但是,思维能力作为一种潜能,必须通过刻苦的训练才能显现出来,才能转化为一种认识能力,而数学在这种能力的训练中具有不可或缺的突出作用.善于推理的能力不是天生就有的,只有通过教育才能使人在这方面的潜能得到发展.人类的推理能力在于,在完全相信可以进行推理之

^① [美]M. 克莱因:《古今数学思想》(第二册)第 41 页,上海,上海科学技术出版社,1979 年.

前,可以用其他的方法来确证推理要素的真与假,以及推理是否完善.因为有如下一特点,因此可以确认数学是最适合进行推理的科学:任何术语都被清楚地解释;证明过程都严格地合乎逻辑而不含糊,不受任何权威意见之制约与限制;任何悖于常理的概念与理论,只要它能对数学的发展有促进作用,就不会长期为人们所拒绝.

在数学中,人类的理性可以最大限度地发挥出来,并以此来促进人类理性的发展.这表明:首先,逻辑思维能力是思维能力的核心,通过数学培养学生逻辑思维能力最好、最经济.因此,加里宁说:“数学是锻炼思维的体操”,化学家罗蒙诺索夫说:“至于数学,即使是只不过使人们的思维有条理,也应该学习.”这些话都是至理名言.其次,数学对人类思维能力训练和培养的价值不仅体现在逻辑推理方面,而且还体现在合情推理方面.数学是学习发现问题、提出问题、分析问题、解决问题思维程序,培养探索解决问题能力的最经济的场地.最后,数学方法的思维功能是数学教育功能最突出的体现.在数学的具有思维价值的内容体系中,数学方法是核心内容.因为数学思维从宏观上看是一种观念形态的策略创造,数学教学的重点就在于培养学生如何用数学的眼光、数学的方法去透视事物、提出并解决数学问题,而数学方法就是数学思维策略创造的结晶.要学会策略创造就要从数学方法的尝试与学习开始.

(2) 数学是辩证的辅助工具和表现方式.数学抽象思维除了它的抽象概括性、简明性、严谨性之外,还有辩证性.数学概念的形成,数学思想的更新,数学方法的演进,处处充满了辩证的逻辑.数学思维本身是生动活泼的发明创造,其中包括想象、类比、联想、直觉、顿悟等方面,表现得淋漓尽致.抽象与具体,理论与实际,以及量与质、数与形、已知与未知、正与负、常量与变量、直与曲、连续与离散、有限与无限、精确与模糊等等对立的数学概念,在一定条件下实现相互转化,这表明数学中充满了辩证法.人们要认识世界只有形式逻辑思维方式远远不够,还必须用辩证唯物的观点看世界.“数学使思维产生活力,并使思维不受偏见、轻信与迷信的影响与干扰”^①,足见数学对于提高人才素质有重大的教育价值和意义.

1.4.3 数学科学的德育价值

所谓数学的德育价值,是指数学在形成和发展人的科学世界观、道德品质和个性特征所具有的教育作用 and 意义.“要确立辩证的同时又是唯物主义的自

① [美]R. E. 莫里兹:《数学家言行录》第 20 页,南京,江苏教育出版社,1990 年.

然观,需要具备数学和自然科学的知识”^①.数学教育对发展人们的辩证唯物主义世界观方面的作用,毋庸置疑;然而数学教育对学生渗透“道德基础和道德原则”教育的问题,在传统数学教育中却没有得到应有的重视.人的毅力、刻苦精神、对真理的追求、对问题的实事求是态度、协作共事的作风,这些做人的基本准则,作为一个科学工作者的基本品格,都不是先天铸就的,而是后天通过教育、学习、实践培养锻炼逐步形成并完善的.其中数学学科教育对此具有重要的功能.前苏联数学家、数学教育家 A. Я. 辛钦曾说:“数学课对于培养正确与严密的思维能力方面的作用和意义已经被人们讨论得很多了.相反,关于数学课对于形成学生性格和道德个性几乎还没有被谁谈到过.这是十分清楚的,从学科的抽象性讲,数学科学当然不能像历史、文学那样,为学生提供一个印象直接,伦理方面有助于性格形成的形象画面或激情.但是,由此得出结论,认为数学课在形成学生的道德个性方面是完全应该抛弃的,则是最肤浅的看法.根据我的多年经验,钻研数学科学必然会在青年人身上循序渐进地培养出许多道德色彩明显,并进而能够成为其主要品德因素的特点.这是教师应该承受的任务.把这一过程变得更加积极,把成果变得更加扎实,这对教师来说是责无旁贷的任务.”^②在通过数学教育形成学生的性格特征中,辛钦着重谈及了四点:真诚、正直、坚韧和勇敢.

数学是一门论证科学,其论证的严谨使人诚服,数学的真理性使人坚信不移.数学无声地教育人们尊重事实,服从真理这样一种科学的精神.

数学是一门精确的科学,在数学演算中,来不得半点马虎;在数学推理中,更容不得粗心大意.粗枝大叶、敷衍塞责是与数学的严谨性格格不入的,因此数学使人缜密,数学可以造就人精力集中、做事认真负责.

数学是一门循序渐进、逻辑性很强的抽象科学.学习数学,攻坚具有挑战性的问题,会逐渐铸就人们脚踏实地、坚韧勇敢、顽强进取的精神.

一个人学习数学,工作以后很可能由于长期不接触数学,而“把数学都还给老师了”.但由于学习数学过程中领悟的数学的精神、思想和方法,作为一种品格力量,却一直发挥着作用.这集中体现了数学教育的德育价值.

1.4.4 数学科学的美学价值

所谓数学的美学价值,是指数学在培养发展学生审美情趣和能力方面所具有的教育作用和意义.什么是美?美是心借物的形象来表现情趣,是合规律

① 恩格斯:《反杜林论》第8页,北京,人民出版社,1970年.

② 引自 B. B. 格涅涅科:《当代的数学和数学教育》,莫斯科教育出版社,1985年.