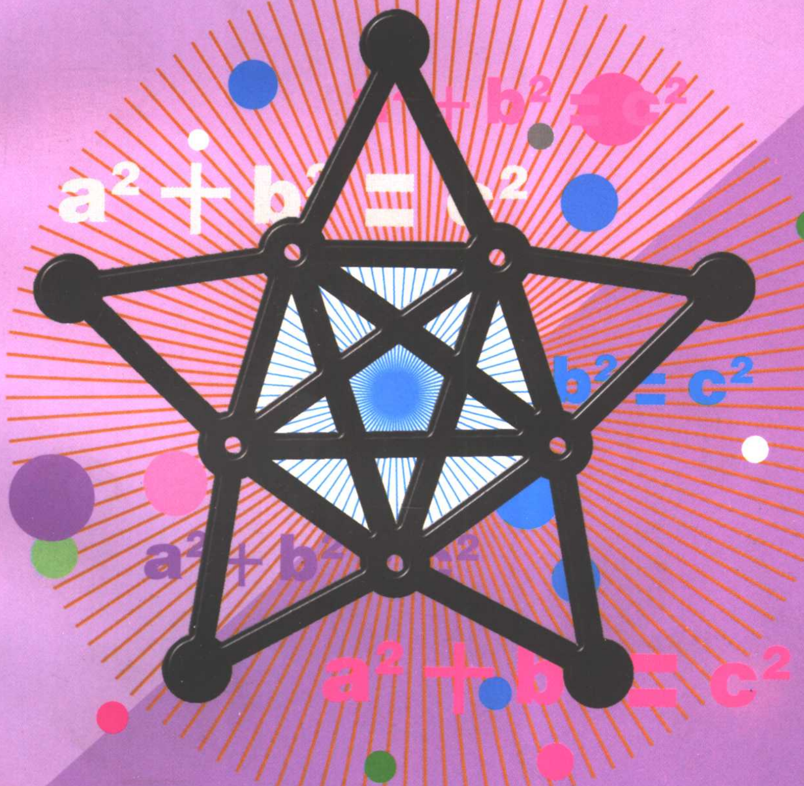
中小学数学
开放题丛书

全国教育科学
“九五”规划重点课题
研究成果

初中数学开放题集

戴再平 主编



上海教育出版社

中小学数学开放题丛书

戴再平 主编

初中数学开放题集

龚 雷 朱贺荣 编著

上海教育出版社

全国教育科学“九五”规划重点课题研究成果

中小学数学开放题丛书

主编 戴再平

初中数学开放题集

龚 雷 朱贺荣 编著

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

（上海永福路 123 号 邮政编码：200031）

各地新华书店经销 上海申光制版彩刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.75 插页 4 字数 159,000

2000 年 5 月第 1 版 2001 年 1 月第 3 次印刷

印数 15,101—25,150 本

ISBN 7-5320-6691-6/G・6844 定价：(软精)11.40 元

序

江泽民同志说："一个没有创新能力的民族难以屹立于世界民族之林".时代呼唤着数学教育工作者要转变教育观念，改革人才培养模式，激发学生独立思考和创新的意识.目前的中小学数学教材中，习题基本上是为了使学生了解和牢记数学结论而设计的，在这种情况下，学生在学习过程中产生了以死记硬背代替主动参与，以机械方法代替智力活动的倾向，为了改变这一情况，使数学教育适应时代的需要，我们选择了数学开放题作为一个切入口，希望通过开放题的引入，促进我国数学教育的开放化与个性化，特别是有利于学生创新精神的培养和实践能力的形成.

数学开放题在过去的教学中曾经有过不少的例子，但是对它在数学教学中的地位的肯定，还是近二十余年来的事.1993年，我们开始进行数学开放题的教学实验，有关的研究很快成为一个亮点；1997年，全国教育科学规划办批准"开放题——数学教学的新模式"立项为"九五"规划重点课题；1998年10月，近百名国内外数学教育学者和中小学教师云集上海，举行了"'数学开放题及其教学'学术研讨会"，数学开放题更成为我国数学教育的一个研究热点，同时我国数学开放题的研究成果也引起了国际上同行的注意.

为反映我国数学开放题的研究进展情况，同时给中小学师生提供一批资料，在上海教育出版社的积极支持下，我们编写了《中小学数学开放题丛书》，在丛书的编写过程中，得到了各地包括香港地区的学者和教师的热忱支持与帮助，值得一提的是原国际数

学教育委员会执行委员、华东师范大学张奠宙教授对丛书的编写给予了热情的鼓励，并亲自参加撰稿，我们对这些先生和女士表示诚挚的感谢！

本丛书是全国教育科学“九五”规划重点课题的研究成果.值此新世纪到来之际，我们谨以本丛书作为向全国中小学师生的献礼.

数学开放题是一个新课题，一个新的事物，从这意义上说，本丛书终究是不可能完善的.“纸上得来终觉浅，绝知此事须躬行”.对本丛书存在的问题和不足，我们衷心地希望得到大家的批评与指正.

“开放题——数学教学的新模式”课题组

1999年7月

怎样阅读本书

本书的主要读者对象是初中学生，中学数学教师可将本书作为教学参考资料，初等数学爱好者也可从中获得不同于其他科普书籍的收益．这里介绍的阅读本书的方法主要是针对初中生而言的，初等数学爱好者也可参考．而对中学数学教师而言，一般都有自己的阅读方法．

本书的内容以题为中心，各题独立成篇．所以阅读本书时不必完全按书中的顺序，可以找自己感兴趣和适合自己知识水平的问题看．书中每个题的标题后面注明了本题适合几年级，或适合在学习了教材某一知识内容前(或后)，这可以帮助读者了解该题是否适合自己的知识水平．

在题目中常有“尽可能多地找出……”之类的话，这是开放题的特殊之处．对某些问题，要写出全部的答案并不容易．有些问题甚至到现在仍没有人找出所有答案．我们把这些问题编入本书，当然不是要求读者找出所有答案，而只是希望读者能尽自己的努力写出尽量多的答案——无论你能写出多少答案，只要你真正努力地去做，那么你就是优秀的，而且还将会越来越优秀．

对每一个问题，书中提供了参考答案，有的还分析了解题思路．必须指出对有些问题并没有给出全部的答案，但我们尽量给出各种典型的答案；书中提供的解题思路也不是唯一的，甚至不一定是最好的(读者如想出比书中更好的方法，欢迎来信，以便再版时改进)．此外，对开放题而言，独创性也是值得称道的．因此建议读者在阅读一个问题后，不要急于阅读后面的“分析与参考答案”，尽

自己的努力独立地找出问题的答案(哪怕只能找出一个答案也好).如果实在无法找出其他答案,再看书中答案也不迟.看答案时要“看一段,想一段,做一段”,这样才能有更大的收获,也更有趣.

有些问题还有一个“说明”,这主要是帮助读者更深入地理解与该题有关的数学方法、背景知识等,是对鉴赏该题的一种提示.

个别问题可用电脑编程解答,我们给出了部分BASIC程序,对此不了解的读者可跳过这些内容不看.

- **根据需要,自由选学**
- **先做后看,更有趣味**
- **重视过程,收获更大**
- **独立思考,才能优秀**

目　录

第一章　数　与　式

1.1　钟面数字问题(本题适合初中一年级)

钟面上有 1,2,3,….11,12 共十二个数字,如图 1.1—1 所示.

(1) 试在某些数的前面添加负号,使它们的代数和为零;

(2) 能否改变钟面上的数,比如只剩下六个偶数,仍按第(1)小题的要求来做;

(3) 请试着改变第(1)小题,使它更加有趣一些,比如:哪些时间里分针和时针所夹的那些数的前面添加负号,钟面上的各数的代数和就为零;

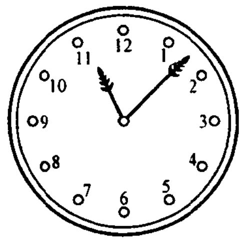


图 1.1—1

(4) 在解上述各题的过程中,你能总结出一些什么数学规律?

【分析与参考答案】

(1) 我们先试着选定任意几个数字,在其前面添加负号,如

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2+1=2.$$

这当然不是我们要的答案,但我们可以再将其调整,比如改变 1 前面的符号,得

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2-1=0. \qquad Ⓐ$$

用这种方法当然可以得到许多解答,但我们并不满足.我们希望寻找其中的规律,使我们能找到更多的解答.我们发现:

▲在调整符号的过程中,若将一个正数变号,十二个数的代数和就减少这个正数的两倍;若将一个负数变号,十二个数的代数和

就增加这个负数的绝对值的两倍.

▲要使十二个数的代数和为零,其中正数的和的绝对值必须与负数的和的绝对值相等,均为十二个数之和的一半,即等于39.

为了便于叙述,我们把Ⓐ式所表示的一个解答(即一种满足题意要求的添加负号的方式)用一个记号表示为:(12,11,10,5,1).我们还可发现:

▲如果(12,11,10,5,1)是一个解答,那么(9,8,7,6,4,3,2)也必定是一个解答(对偶律);

▲由于最大三个数之和为33<39,因此必须再加上一个6才有解答(12,11,10,6),所以添加负号的数至少要有四个;由对偶律,添加负号的数最多不超过八个.

根据以上规律,就能在很短的时间内得到许多解答,但是要写出所有解答,还必须把答案作适当的分类.本题共有124个解答.亲爱的读者,你能写出这124个解答来吗?这可要有高超的智慧和毅力的哟!

(2) 因为2+4+6+8+10+12=42,它的一半为21,而奇数不可能通过偶数求和得到,所以回答是否定的;

(3) 每当3:45～3:50或9:15～9:20,分针和时针所夹的那些数前面添加负号,钟面上的各数代数和就是零;

(4) 第(1)小题中我们已提到一些规律,其他规律还是留给读者自己去发现创造.

【说明】 本题经测试,1993年6月15日,浙江省德清县雷甸中学,初一(3)班47位同学,通过试错的方法,用4分钟,平均每人得到2.1个解答,掌握规律之后,同样用4分钟,平均每人得到7.0个;1997年4月8日,杭州第二中学,初一选修班31位同学,用3.5分钟,掌握规律前后得到的解答平均每人分别为4.1个和5.5个.本题还可发展为:如果钟面上有1,2,3,…,$n-1$,n共n个数,结论又如何?

1.2　勾股数（本题适合初中二年级）

给出一组式子：

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2,$$
$$\cdots\cdots$$

（1）你能发现关于上述式子中的一些规律吗？

（2）请你运用所发现的规律，或者通过试错的方法（利用计算器），给出第五个式子；

（3）请你证明你所发现的规律.

【分析与参考答案】

（1）①这些式子每个都呈 $a^2+b^2=c^2$（a,b,c 为正整数）的形式.这样的 a,b,c 可作为直角三角形的三边，其中 a,b 是直角边，c 是斜边，我们把 a,b,c 称为一组“勾股数”，也就是满足勾股定理的一组正整数；

② 每个等式中 a 是奇数，b 是偶数（实际上还是 4 的倍数），c 是奇数；

③ $c=b+1$；

④ 各个式子中，a 的取值依次为 3、5，7，9，…，是连续增大的奇数，所以 a 的第五个取值为 11；

⑤ 各个式子中，b 的取值依次为 4，12，24，40，…，它的规律可以作这样的探讨：

先把它们写成 $2k$ 的形式，其中 k 为相邻两整数之积：

$$2\times2,2\times6,2\times12,2\times20,\cdots$$

即

$$2\times(1\times2),2\times(2\times3),2\times(3\times4),2\times(4\times5),\cdots$$

或把它们写成 $4k$ 的形式，即

$$4\times1, 4\times3, 4\times6, 4\times10, \cdots$$

这里的 k 的取值，第一个为 1；第二个比第一个大 2，即为 3；第三个比第二个大 3，即为 6；第四个比第三个大 4，即为 10；……

所以 b 的第五个取值为 $2\times(5\times6)$ 或 $4\times(10+5)$，也就是 60；

(2) 根据上面所发现的规律，我们猜想 a,b,c 的第五个取值分别为 11，60 和 61，经验算：

$$11^2+60^2=3721=61^2,$$

即第五个式子为：

$$11^2+60^2=61^2;$$

(3) 由(1)的④⑤③，我们猜测第 n 个 a,b,c 的取值为：

$$a=2n+1,$$

$$\begin{aligned} b &= 2\times n(n+1) \\ &= 2n^2+2n, \end{aligned}$$

$$c=2n^2+2n+1.$$

下面来证明 $a^2+b^2=c^2$.

证明一 $\because$ $a^2+b^2=(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2$

$$=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1,$$

又 $$\begin{aligned} c^2 &= (2n^2+2n+1)^2 \\ &= 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1, \end{aligned}$$

$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$.

证明二 $\because c=b+1$,

因此，为了证明 $a^2+b^2=c^2$，只要证明

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2-b^2 \\ &= (b+1)^2-b^2 \\ &= 2b+1, \end{aligned}$$

事实上

$$a^2=(2n+1)^2$$

$$=2(2n^2+2n)+1$$
$$=2b+1,$$

于是得证.

让我们来反思一下题目中各式子的规律. 因为 a 为奇数，所以 a^2 为奇数，不妨表示为 $2b+1$. 于是有

$$\begin{aligned}a^2 &= 2b+1\\ &=(b+1)+b\\ &=[(b+1)+b][(b+1)-b]\\ &=(b+1)^2-b^2.\end{aligned}$$

令　$b+1=c$，即得

$$a^2+b^2=c^2.$$

如今年是 1999 年，设 $1999^2+p^2=q^2$，其中 p,q 为连续正整数，即 $q=p+1$，我们就可依上面的方法确定此式.

$$\begin{aligned}1999^2 &= 3996001\\ &=1998001+1998000\\ &=1998001^2-1998000^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1999^2+1998000^2=1998001^2.$$

根据上述式子的规律性，英国数学家波尔特编了一道趣题，我们把它提供出来，以供读者思考：

为了庆祝红宝石婚纪念日，威廉和露西全家人一起举行聚会. 威廉回想起这段漫长的婚姻生活，追忆当年在大学里因与年轻的露西同桌而产生爱情，他突然发现现在他的年龄的平方与露西年龄的平方的差，正好等于他们子女数目的平方. 请问当年他们结婚时，两人各是几岁？他共有子女几人？（注：在西方，结婚 40 周年纪念日被称为红宝石婚纪念日. 另外，在英国，法定结婚年龄为 16 岁.）

1.3　和与积相等的两个数（本题适合初中一、二年级）

怎样的两个数，它们的和等于它们的积？你大概马上就会想到