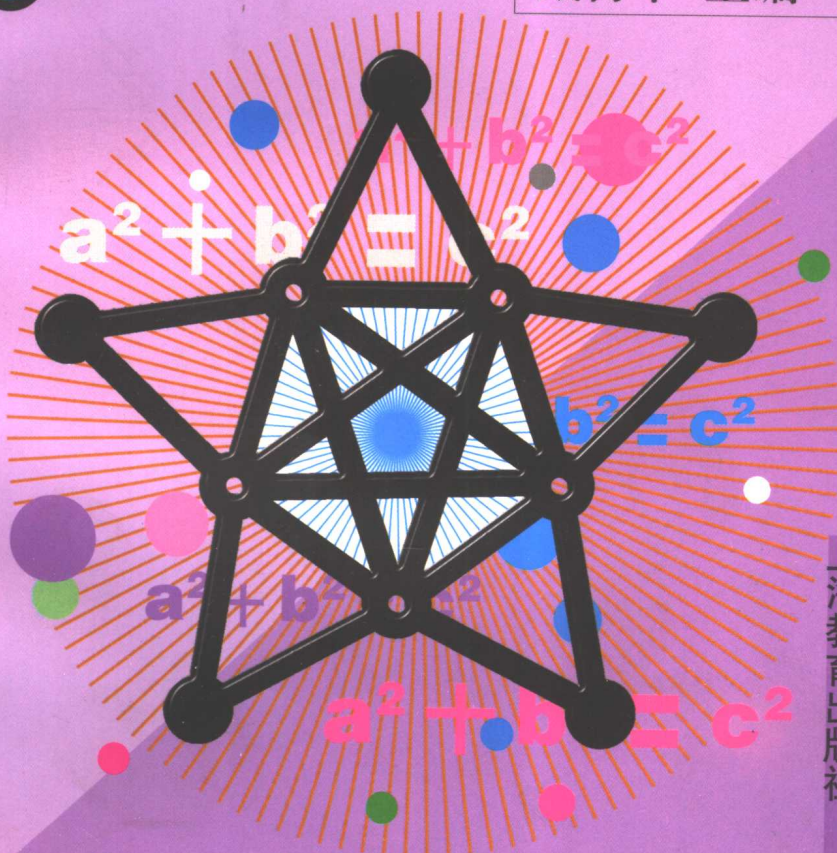


中小学数学
开放题丛书

全国教育科学
“九五”规划重点课题
研究成果

初中数学 开放题集

戴再平 主编



上海教育出版社

中小学数学开放题丛书

戴再平 主编

初中数学 开放题集

龚 雷 朱贺荣 编著

上海教育出版社

全国教育科学“九五”规划重点课题研究成果

中小学数学开放题丛书

主编 戴再平

初中数学开放题集

龚雷 朱贺荣 编著

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海申光制版彩刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.75 插页 4 字数 159,000

2000年5月第1版 2001年1月第3次印刷

印数 15,101—25,150本

ISBN 7-5320-6691-6/G·6844 定价:(软精)11.40元

序

江泽民同志说：“一个没有创新能力的民族难以屹立于世界民族之林”。时代呼唤着数学教育工作者要转变教育观念，改革人才培养模式，激发学生独立思考和创新的意识。目前的中小学数学教材中，习题基本上是为了使学生了解和牢记数学结论而设计的，在这种情况下，学生在学习过程中产生了以死记硬背代替主动参与，以机械方法代替智力活动的倾向，为了改变这一情况，使数学教育适应时代的需要，我们选择了数学开放题作为一个切入口，希望通过开放题的引入，促进我国数学教育的开放化与个性化，特别是有利于学生创新精神的培养和实践能力的形成。

数学开放题在过去的教学中曾经有过不少的例子，但是对它在数学教学中的地位肯定，还是近二十余年来的事。1993年，我们开始进行数学开放题的教学实验，有关的研究很快成为一个亮点；1997年，全国教育科学规划办批准“开放题——数学教学的新模式”立项为“九五”规划重点课题；1998年10月，近百名国内外数学教育学者和中小学教师云集上海，举行了“‘数学开放题及其教学’学术研讨会”，数学开放题更成为我国数学教育的一个研究热点，同时我国数学开放题的研究成果也引起了国际上同行的注意。

为反映我国数学开放题的研究进展情况，同时给中小学师生提供一批资料，在上海教育出版社的积极支持下，我们编写了《中小学数学开放题丛书》，在丛书的编写过程中，得到了各地包括香港地区的学者和教师的热忱支持与帮助，值得一提的是原国际数

学教育委员会执行委员、华东师范大学张奠宙教授对丛书的编写给予了热情的鼓励,并亲自参加撰稿,我们对这些先生和女士表示诚挚的感谢!

本丛书是全国教育科学“九五”规划重点课题的研究成果,值此新世纪到来之际,我们谨以本丛书作为向全国中小学师生的献礼。

数学开放题是一个新课题,一个新的事物,从这意义上说,本丛书终究是不可能完善的。“纸上得来终觉浅,绝知此事须躬行”。对本丛书存在的问题和不足,我们衷心地希望得到大家的批评与指正。

“开放题——数学教学的新模式”课题组

1999年7月

怎样阅读本书

本书的主要读者对象是初中学生,中学数学教师可将本书作为教学参考资料,初等数学爱好者也可从中获得不同于其他科普书籍的收益.这里介绍的阅读本书的方法主要是针对初中生而言的,初等数学爱好者也可参考.而对中学数学教师而言,一般都有自己的阅读方法.

本书的内容以题为中心,各题独立成篇.所以阅读本书时不必完全按书中的顺序,可以找自己感兴趣和适合自己知识水平的问题看.书中每个题的标题后面注明了本题适合几年级,或适合在学习了教材某一知识内容前(或后),这可以帮助读者了解该题是否适合自己的知识水平.

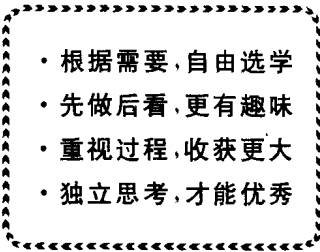
在题目中常有“尽可能多地找出……”之类的话,这是开放题的特殊之处.对某些问题,要写出全部的答案并不容易.有些问题甚至到现在仍没有人找出所有答案.我们把这些题编入本书,当然不是要求读者找出所有答案,而只是希望读者能尽自己的努力写出尽量多的答案——无论你能写出多少答案,只要你真正努力地去做了,那么你就是优秀的,而且还将会越来越优秀.

对每一个问题,书中提供了参考答案,有的还分析了解题思路.必须指出对有些问题并没有给出全部的答案,但我们尽量给出各种典型的答案;书中提供的解题思路也不是唯一的,甚至不一定是最好的(读者如想出比书中更好的方法,欢迎来信,以便再版时改进).此外,对开放题而言,独创性也是值得称道的.因此建议读者在阅读一个问题后,不要急于阅读后面的“分析与参考答案”,尽

自己的努力独立地找出问题的答案(哪怕只能找出一个答案也好).如果实在无法找出其他答案,再看书中的答案也不迟.看答案时要“看一段,想一段,做一段”,这样才能有更大的收获,也更有兴趣.

有些问题还有一个“说明”,这主要是帮助读者更深入地理解与该题有关的数学方法、背景知识等,是对鉴赏该题的一种提示.

个别问题可用电脑编程解答,我们给出了部分 BASIC 程序,对此不了解的读者可跳过这些内容不看.

- 
- 根据需要,自由选学
 - 先做后看,更有趣味
 - 重视过程,收获更大
 - 独立思考,才能优秀

目 录

第 一 章	数与式	1
1.1	钟面数字问题	1
1.2	勾股数	3
1.3	和与积相等的两个数	5
1.4	单项式的分类	8
1.5	单项式的异同	9
1.6	分数变大了吗	9
1.7	自然数乘方的个位数	11
1.8	举反例	13
1.9	单位分数	14
1.10	捉弄人的计算器	18
1.11	根式化简	20
第 二 章	方程与函数	23
2.1	时针与分针的夹角	23
2.2	编应用题	24
2.3	比较方程的异同	26
2.4	二次函数解析式	26
2.5	二次函数的图象信息	27
2.6	不完整的习题	29
2.7	抛物线与三角形	31
2.8	二元方程的整数解	33
2.9	双曲线上的动点	34

第 三 章	几何中的代数问题	38
3.1	矩形的自相似 3 分割	38
3.2	四叶形图	40
3.3	分割等腰三角形	42
3.4	整数三角形	44
3.5	线段上的正方形	47
3.6	三角形中的函数关系	48
3.7	省料的圆柱形罐头盒	49
3.8	周长为 24 的整边三角形	51
第 四 章	几何初步	53
4.1	八等分正方形	53
4.2	画圆的工具	55
4.3	三条直线分割平面	56
4.4	立体图形的特征	57
4.5	直线的交点	58
4.6	平行线的性质	60
4.7	夹在两平行线间的折线	62
4.8	独特的图形	64
4.9	方格纸内的三角形	65
4.10	正六边形顶点的射影	68
第 五 章	三角形	70
5.1	三角形全等的判定	70
5.2	在三角形中找结论	73
5.3	三角板拼图	74
5.4	折叠直角三角形	77
5.5	一般中的不一般	79
5.6	补充条件	82
5.7	三角形内角平分线的性质	82

5.8	直角三角形斜边上的高	85
第 六 章	四边形与多边形	87
6.1	等分梯形的面积	87
6.2	对称的六边形	91
6.3	分割方角形钢板	92
6.4	比较图形的异同	93
6.5	四边形的概念	94
6.6	等价命题	95
6.7	五角星的五个角之和	96
6.8	方格纸中的多边形	98
6.9	分割正方形	99
6.10	固定钢架	100
6.11	等腰梯形的判定	102
第 七 章	圆	104
7.1	找圆心	104
7.2	与三定圆都相切的圆	106
7.3	相切两圆的公切线	107
7.4	圆内接正三角形	108
7.5	相交两圆与过交点的直线	110
7.6	等腰三角形与轨迹	111
第 八 章	实际应用问题	114
8.1	校运动会的名次	114
8.2	无盖立方体盒子	116
8.3	赶火车	120
8.4	盐水配制	122
8.5	广告图案	124
8.6	哪种药效好	125
8.7	两个旅行者	127

8.8	照镜子	128
第 九 章	趣题与杂题	131
9.1	世界杯小组赛得分	131
9.2	火柴正方形问题	132
9.3	火柴摆图	134
9.4	兑换零钱	136
9.5	对分方格纸	138
9.6	脑筋急转弯	139
9.7	相似形图案设计	140
9.8	猜数游戏	141
9.9	在电话中说明图形	143
9.10	百鸡问题	144
9.11	补左视图	146
9.12	栽树问题	149
第 十 章	国外开放题选编	153
10.1	矩形园地上的花圃	153
10.2	数谜	154
10.3	四等分圆面积	156
10.4	矩形纸片折叠角度	158
10.5	掷石子问题	160
10.6	水槽问题	161
10.7	三角形的中线与面积	163
10.8	等分五个圆的面积	164
10.9	追逐曲线	165
10.10	等腰三角形的底角平分线	167
10.11	函数图象的共同点	168
第十一章	考题一束	170
11.1	内接等边三角形	170

11.2	切点的轨迹	172
11.3	小结证明过程	173
11.4	圆外切四边形	173
11.5	知识竞赛的成绩	174
11.6	基本长方形	176
11.7	五等分三角形面积	177
第十二章	数学开放题教学设计.....	180
12.1	数表的规律	180
12.2	平行四边形的判定	186
12.3	测量树的高度	192
12.4	因式分解(十字相乘法)	197
后记		203

第一章 数 与 式

1.1 钟面数字问题(本题适合初中一年级)

钟面上有 1, 2, 3, ..., 11, 12 共十二个数字, 如图 1.1-1 所示.

(1) 试在某些数的前面添加负号, 使它们的代数和为零;

(2) 能否改变钟面上的数, 比如只剩下六个偶数, 仍按第(1)小题的要求来做;

(3) 请试着改变第(1)小题, 使它更加有趣一些, 比如: 哪些时间里分针和时针所夹的那些数的前面添加负号, 钟面上的各数的代数和就为零;

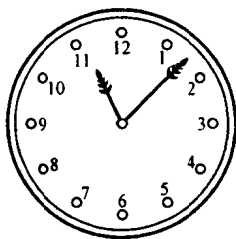


图 1.1-1

(4) 在解上述各题的过程中, 你能总结出一些什么数学规律?

【分析与参考答案】

(1) 我们先试着选定任意几个数字, 在其前面添加负号, 如

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2+1=2.$$

这当然不是我们要的答案, 但我们可以再将其调整, 比如改变 1 前面的符号, 得

$$-12-11-10+9+8+7+6-5+4+3+2-1=0. \quad \textcircled{A}$$

用这种方法当然可以得到许多解答, 但我们并不满足. 我们希望寻找其中的规律, 使我们能找到更多的解答. 我们发现:

▲在调整符号的过程中, 若将一个正数变号, 十二个数的代数和就减少这个正数的两倍; 若将一个负数变号, 十二个数的代数和

就增加这个负数的绝对值的两倍.

▲要使十二个数的代数和为零,其中正数的和的绝对值必须与负数的和的绝对值相等,均为十二个数之和的一半,即等于 39.

为了便于叙述,我们把④式所表示的一个解答(即一种满足题意要求的添加负号的方式)用一个记号表示为:(12,11,10,5,1).我们还可发现:

▲如果(12,11,10,5,1)是一个解答,那么(9,8,7,6,4,3,2)也必定是一个解答(对偶律);

▲由于最大三个数之和为 $33 < 39$,因此必须再加上一个 6 才有解答(12,11,10,6),所以添加负号的数至少要有四个;由对偶律,添加负号的数最多不超过八个.

根据以上规律,就能在很短的时间内得到许多解答,但是要写出所有解答,还必须把答案作适当的分类.本题共有 124 个解答.亲爱的读者,你能写出这 124 个解答来吗?这可要有高超的智慧和毅力的哟!

(2) 因为 $2+4+6+8+10+12=42$,它的一半为 21,而奇数不可能通过偶数求和得到,所以回答是否定的;

(3) 每当 3:45~3:50 或 9:15~9:20,分针和时针所夹的那些数前面添加负号,钟面上的各数代数和就是零;

(4) 第(1)小题中我们已提到一些规律,其他规律还是留给读者自己去发现创造.

【说明】 本题经测试,1993 年 6 月 15 日,浙江省德清县雷甸中学,初一(3)班 47 位同学,通过试错的方法,用 4 分钟,平均每人得到 2.1 个解答,掌握规律之后,同样用 4 分钟,平均每人得到 7.0 个;1997 年 4 月 8 日,杭州第二中学,初一选修班 31 位同学,用 3.5 分钟,掌握规律前后得到的解答平均每人分别为 4.1 个和 5.5 个.本题还可发展为:如果钟面上有 $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ 共 n 个数,结论又如何?

1.2 勾股数(本题适合初中二年级)

给出一组式子:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2,$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2,$$

.....

(1) 你能发现关于上述式子中的一些规律吗?

(2) 请你运用所发现的规律,或者通过试错的方法(利用计算器),给出第五个式子;

(3) 请你证明你所发现的规律.

【分析与参考答案】

(1) ① 这些式子每个都呈 $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c 为正整数) 的形式. 这样的 a, b, c 可作为直角三角形的三边, 其中 a, b 是直角边, c 是斜边, 我们把 a, b, c 称为一组“勾股数”, 也就是满足勾股定理的一组正整数;

② 每个等式中 a 是奇数, b 是偶数(实际上还是 4 的倍数), c 是奇数;

③ $c = b + 1$;

④ 各个式子中, a 的取值依次为 3, 5, 7, 9, $\dots$, 是连续增大的奇数, 所以 a 的第五个取值为 11;

⑤ 各个式子中, b 的取值依次为 4, 12, 24, 40, $\dots$, 它的规律可以作这样的探讨:

先把它们写成 $2k$ 的形式, 其中 k 为相邻两整数之积:

$$2 \times 2, 2 \times 6, 2 \times 12, 2 \times 20, \dots$$

即

$$2 \times (1 \times 2), 2 \times (2 \times 3), 2 \times (3 \times 4), 2 \times (4 \times 5), \dots$$

或把它们写成 $4k$ 的形式, 即

$$4 \times 1, 4 \times 3, 4 \times 6, 4 \times 10, \dots$$

这里的 k 的取值, 第一个为 1; 第二个比第一个大 2, 即为 3; 第三个比第二个大 3, 即为 6; 第四个比第三个大 4, 即为 10; ……

所以 b 的第五个取值为 $2 \times (5 \times 6)$ 或 $4 \times (10 + 5)$, 也就是 60;

(2) 根据上面所发现的规律, 我们猜想 a, b, c 的第五个取值分别为 11, 60 和 61, 经验算:

$$11^2 + 60^2 = 3721 = 61^2,$$

即第五个式子为:

$$11^2 + 60^2 = 61^2;$$

(3) 由(1)的④⑤③, 我们猜测第 n 个 a, b, c 的取值为:

$$a = 2n + 1,$$

$$b = 2 \times n(n + 1)$$

$$= 2n^2 + 2n,$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1.$$

下面来证明 $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\begin{aligned} \text{证明一} \quad \because a^2 + b^2 &= (2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad c^2 &= (2n^2 + 2n + 1)^2 \\ &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1, \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$$\text{证明二} \quad \because c = b + 1,$$

因此, 为了证明 $a^2 + b^2 = c^2$, 只要证明

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ &= (b + 1)^2 - b^2 \\ &= 2b + 1, \end{aligned}$$

事实上

$$a^2 = (2n + 1)^2$$

$$=2(2n^2+2n)+1$$

$$=2b+1,$$

于是得证.

让我们来反思一下题目中各式子的规律. 因为 a 为奇数, 所以 a^2 为奇数, 不妨表示为 $2b+1$. 于是有

$$a^2 = 2b+1$$

$$=(b+1)+b$$

$$=[(b+1)+b][(b+1)-b]$$

$$=(b+1)^2-b^2.$$

令 $b+1=c$, 即得

$$a^2+b^2=c^2.$$

如今年是 1999 年, 设 $1999^2+p^2=q^2$, 其中 p, q 为连续正整数, 即 $q=p+1$, 我们就可依上面的方法确定此式.

$$1999^2 = 3996001$$

$$=1998001+1998000$$

$$=1998001^2-1998000^2$$

$$\therefore 1999^2+1998000^2=1998001^2.$$

根据上述式子的规律性, 英国数学家波尔特编了一道趣题, 我们把它提供出来, 以供读者思考:

为了庆祝红宝石婚纪念日, 威廉和露西全家人一起举行聚会. 威廉回想起这段漫长的婚姻生活, 追忆当年在大学里因与年轻的露西同桌而产生爱情, 他突然发现现在他的年龄的平方与露西年龄的平方的差, 正好等于他们子女数目的平方. 请问当年他们结婚时, 两人各是几岁? 他共有子女几人? (注: 在西方, 结婚 40 周年纪念日被称为红宝石婚纪念日. 另外, 在英国, 法定结婚年龄为 16 岁.)

1.3 和与积相等的两个数 (本题适合初中一、二年级)

怎样的两个数, 它们的和等于它们的积? 你大概马上就会想到