

高等院校专业基础课教材

电路分析 下册

林镇材 陈舜儿 编著

广东科技出版社



TM133

24

:2

电 路 分 析

下 册

高等院校专业基础课教材

林镇材 陈舜儿 编著

广东科技出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

电路分析(下册)/林镇材,陈舜儿编著. —广州:
广东科技出版社, 2000.6
ISBN 7-5359-2333-X

I. 电… II. ①林…②陈… III. 电路分析-教材
IV. TN711.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47374 号

出版发行: 广东科技出版社

(广州市环市东路水荫路 11 号 邮码: 510075)

E-mail: gdkjzbb@21cn.com

出 版 人: 黄达全

经 销: 广东新华发行集团股份有限公司

印 刷: 广东番禺市新华印刷有限公司

(广东省番禺市桥环城西路工农大街 45 号 邮码: 511400)

规 格: 787mm×1092mm 1/16 印张 12.25 字数 270 千

版 次: 2000 年 6 月第 1 版

2000 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 1~4 000 册

定 价: 24.00 元

如发现因印装质量问题影响阅读, 请与承印厂联系调换。

前 言

本书为高等院校理、工科电子专业学生专业基础课教材,亦可作为理科有关专业学生选修课以及电子专业高等教育自学考试的专业基础课教材。

本书根据高等院校审定的四年制无线电技术专业试用的教学大纲而编写。对电子专业本科生授课约 80 学时。在对教学内容适当筛选基础上,大专学生及其他层次学生授课时数可适当增加。

全书共十五章,分上、下两册。全书内容可分为直流电阻电路分析、动态电路分析、正弦稳态电路分析三大部分。上册共八章,其中一至四章为直流电阻电路分析,五至八章为动态电路分析;下册共七章,主要为正弦稳态电路分析。

凡在目录中标有 * 号的有关章节,可根据学生层次,以及各专业的课程设置而作为选用教材,不一定在规定的教学预定学时中讲授。例如上册的第八章“冲激函数在动态电路分析中的应用”是为在以后课程中不讲授“信号与系统”课程的学生而设的,以使學生能掌握有关这方面的基本内容。此外,在本书编写过程中有意识介绍了非线性元件及其电路、非线性时变元件、非平面电路等基本概念,作为后续有关课程的基础知识。

在参阅大量有关本课程的有关教材及资料的基础上,本书在编写过程中尽量做到标题直观贴切,叙述力求清楚准确,电路及元件采用最新标准统一符号,在每节正文后附有练习题,每章备有完整习题,力求全书的系统性与完整性。根据作者多年的教学经验,权衡利弊,在本书中不设习题答案。然而这将会给自学者及任课教师带来不便,故计划日后再行编写教师用书,以弥补不足。

考虑到“电路分析”课程一般不开设相应的实验课,为此,在有关章节中都配有 CAI (计算机辅助教学)的内容,使教学更为直观、生动,从而提高学生学习兴趣,使教学效果进一步提高。这是在教材编写中的一次大胆尝试,其效果有待在教学实践中检验。

本书由林镇材主编,陈舜儿负责全书 CAI 有关内容及部分章节的编写。由于编著者水平有限,难免有疏漏之处,恳请同行专家及读者批评指正。

编著者

1999 年 8 月于中山大学

目 录

第九章 交流动态电路分析	(1)
§ 9-1 周期性电压与电流	(1)
§ 9-2 正弦电压与电流	(2)
§ 9-3 正弦激励下 RC 电路的分析	(7)
§ 9-4 相量	(10)
§ 9-5 在正弦激励下用相量法求微分方程的特解	(13)
习题九	(16)
第十章 正弦稳态的基本分析方法	(18)
§ 10-1 有效值	(18)
§ 10-2 相量形式的基尔霍夫定律	(21)
§ 10-3 基本元件相量形式的伏安关系	(23)
§ 10-4 阻抗与导纳的导出、相量模型	(29)
§ 10-5 正弦稳态电路的基本分析与计算	(34)
§ 10-6 阻抗、导纳的性质及相量模型的等效电路	(37)
§ 10-7 网孔、节点分析法运用于相量模型	(43)
习题十	(47)
第十一章 正弦稳态电路的功率与能量	(51)
§ 11-1 电阻元件的功率与能量	(51)
§ 11-2 动态元件的功率与能量	(54)
§ 11-3 正弦稳态下二端网络的平均功率与功率因数	(59)
§ 11-4 二端网络的无功功率	(64)
§ 11-5 复功率	(69)
§ 11-6 正弦稳态下最大功率的传输定理	(72)
§ 11-7 三相电路的基本分析方法	(75)
习题十一	(86)
第十二章 网络的频率响应特性、谐振	(93)
§ 12-1 网络的频率响应特性	(93)
§ 12-2 谐振	(99)
§ 12-3 引入 CAI 分析网络的频率响应特性	(108)
习题十二	(113)
第十三章 周期性非正弦电路的稳态响应	(115)
* § 13-1 周期性非正弦信号的谐波分解——傅里叶级数	(115)
§ 13-2 周期性非正弦信号的有效值、平均值和电路的平均功率	(118)

§ 13-3 周期性非正弦激励下线性电路的稳态响应——谐波分析法	(121)
§ 13-4 时域分析与频域分析小结	(125)
§ 13-5 引入 CAI 进行傅里叶级数谐波分解和 CAI 综合电路分析	(126)
习题十三	(137)
第十四章 耦合电感与理想变压器	(139)
§ 14-1 耦合电感的伏安关系	(139)
§ 14-2 耦合电路的去耦等效模型	(144)
§ 14-3 含耦合电感电路的分析——空芯变压器电路	(147)
§ 14-4 理想变压器	(150)
习题十四	(153)
第十五章 双口网络	(157)
§ 15-1 双口网络的基本概念	(157)
§ 15-2 双口网络的方程与参数	(158)
§ 15-3 双口网络的联接	(168)
§ 15-4 双口网络的等效	(171)
§ 15-5 接上信号源与负载时双口网络的分析	(176)
习题十五	(182)
参考文献	(187)

第九章 交流动态电路分析

在以上章节中,我们所讨论的电路所含的电源均是直流电源,故称之为直流电阻电路及恒定电源作用下的一阶、二阶电路。若电路中所含的电源都是交流电源,则称这种电路为交流电路。通常交流电压源的电压以及交流电流源的电流是随正弦规律变化的,因此,交流电路一般是指正弦交流电路,常称之为正弦电路。而在电路中,除电源外只有电阻元件的电路,则称为交流电阻电路。若在电路中至少还有一个动态元件,则称该电路为交流动态电路。在分析方法上,由于电阻元件是无“记忆”元件,故交流电阻电路与直流电阻电路并无不同之处。为此,在本章中我们主要介绍交流动态电路的分析方法。

在实际应用中,例如工程技术上,供电系统是应用交流动态电路作为模型的。而通信与其他电子技术涉及的周期信号一般不一定为正弦信号,但按傅里叶级数分析仍可分解成无数多项与频率成整数倍的正弦信号之和,因此在一定程度上仍可按交流动态电路进行分析与研究。

此外,由前面所讨论的一阶电路可知,一阶动态电路在初态与激励共同作用下的响应即为电路的完全响应,也就是求解电路对应非齐次线性微分方程的完全解,而这完全解则是由对应齐次方程的通解与非齐次方程的特解组成。通解与激励无关,而它的特解则取决于激励的形式,一阶动态电路在正弦激励下其特解为同一频率的正弦电压或电流。

本章将介绍如何用“相量”去表征一个正弦电压和电流,从而进一步介绍如何用“相量法”较容易地去求正弦激励下微分方程的特解。

§ 9-1 周期性电压与电流

周期性电压与电流

若电压与电流随时间的变化而变化,则称之为时变电压与时变电流,如图 9-1 所示。在选定的参考方向下,给出这些电压或电流对时间的函数 $u(t)$ 或 $i(t)$,则在任一时刻 t ,电压或电流的数值即可确定。而这些时变电压和时变电流任一时刻的数值,则称之为“瞬时值”。同时我们根据瞬时电压与电流的正负号,结合其参考方向,即可确定电压降与电流的真实极性与真实方向。图 9-1 中,电压 u 的下标便表明了电压降的参考方向。

周期性的电压与电流是指时变电压与时变电流的每个数值经历了相等的时间后又重复出现,这种时变电压与电流具有周期性,常称之为周期电压和周期电流,用式子表示为

$$u(t) = u(t + kT) \quad (9-1)$$

式中, k 为任意正整数。该式表明,时刻 t 与时刻 $t + kT$ 的瞬时值是相等的,而 t 是任意的。

图 9-1(a)、(b)、(c)中所示的电压与电流即为周期性的电压与电流。 T 表示“周

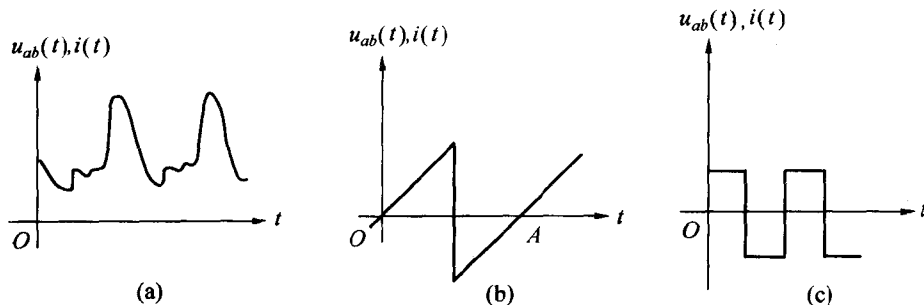


图 9-1 时变电压与电流

期”，它为电压与电流再次循环出现所需要的最小时间间隔，单位为秒。在 t 到 $t + T$ 间的波形称为这个波形的一个循环。如图 9-1(b)，原点与 A 之间的波形即为这个波形的一个循环。

在单位时间内的循环数则称为频率。用符号 f 表示。显然

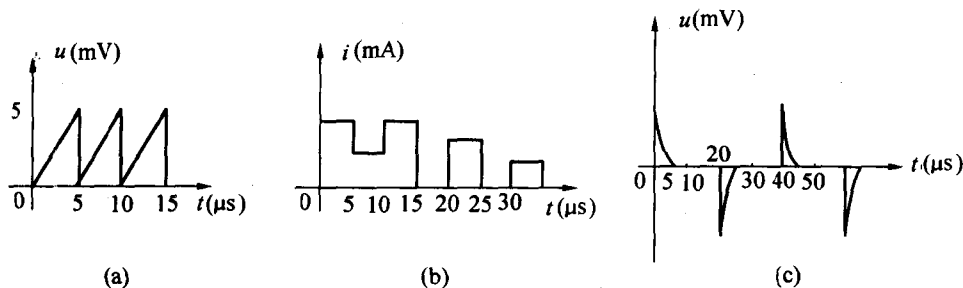
$$f = \frac{1}{T} \quad (9-2)$$

频率的单位为赫兹(Hz)。

若周期电压、电流的大小与方向均随时间而变化，则这种周期电压、电流是交变的，称之为交变电压与电流。通常交变电压、电流是在一个周期内的平均值为零，即其波形正半周与负半周面积相等，图 9-1(b)(c)属于这种含义。

练 习 题

9-1 电压、电流波形如图所示，指出哪些电压或电流波形属于周期性的。试求周期性电压或电流的周期和频率。



练习题 9-1 图

§ 9-2 正弦电压与电流

正弦电压与电流是指随时间按正弦规律变化的电压与电流，其波形均属正弦波。正弦波为周期波形的基本形式，它在电路理论分析及实际工程技术上占有重要的地位。正弦电压与电流的波形如图 9-2 所示。正弦波可用时间的正弦函数来表示，也可以用时间

的余弦函数来表示,本书统一用余弦函数来表示。如图 9-2 所示的正弦电压,其瞬时值可表示为

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad (9-3)$$

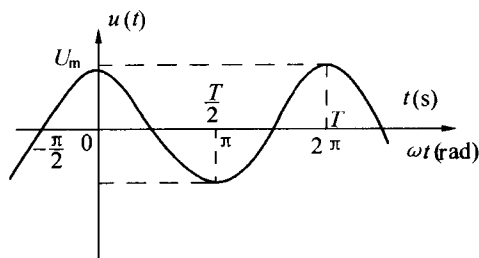


图 9-2 正弦电压与电流

式(9-3)中, U_m 称为电压振幅或最大值,它为一常量; ωt 为一个随时间变化的角度, ω 称为角频率,它是一个与频率 f 有关的常量。

下面我们来讨论 ω 与 f 的关系。由图 9-2 可以看出, $\omega(t)$ 变化一个循环,即一周期所需的时间为 T ;而余弦函数变化一个循环,即变化了 2π 弧度。可见,由图 9-2 所示的正弦波形的时间坐标从原点开始,完成一个循环变化后, ωt 的数值应为 2π ,经历的时间为 T ,即

$$\omega T = 2\pi$$

即

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (9-4)$$

由此可见, ω 是与频率 f 成正比的常数,它应理解为一种角速度,表示每秒变化的弧度数为 $2\pi/T$,故又称之为角频率,单位为弧度/秒(rad/s)。我国电网提供的正弦电压,频率为 50 Hz,即角频率为 100π rad/s。在电子技术中,我们通常说的频率是指 f ,应注意 f 与 ω 的实际区别。为便于比较,图 9-2 列出了两种横坐标,以 ωt 为横坐标的波形图适用于任何 ω 值,因而无论 ω 为多少,一个循环总是 2π 弧度。

实际上,时间起点(原点)不一定对准正弦波正峰值(正最大值)的瞬间。正弦波波形通常如图 9-3 所示。

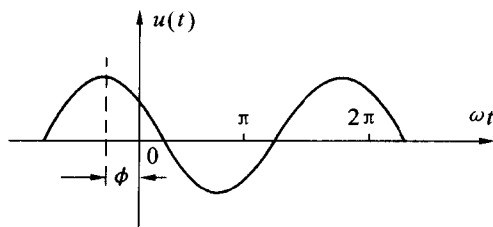


图 9-3 初相角的引入

图 9-3 所示的正弦电压波形的时间起点位于正弦波正最大值瞬间之后的角 ϕ 处(以角度计算), 即当 $\omega t = -\phi$ 时, 才有 $u(t) = U_m$ 。因此, 这样的正弦电压应用下式表示:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi) \quad (9-5)$$

式中, ϕ 称为初相角, 也常称初相, 它反映了正弦波初始值的大小, 即

$$u(0) = U_m \cos \phi$$

若正弦波的正最大值发生在原点之前(如图 9-3), 则式(9-5)中的 ϕ 为正值; 若正弦波的正最大值发生在时间起点之后, 则式(9-5)中的 ϕ 为负值。此外, 这里所说的正最大值是就最靠近时间起点而言, 即意味着初相 ϕ 的绝对值总是小于或等于 π 。

ϕ 原以弧度(rad)为单位, 在工程技术中为方便起见, 通常以度($^\circ$)为单位。

式(9-5)称为正弦波的一般数学表达式。式中, $(\omega t + \phi)$ 称为相位角, 又称相位。也就是说, 不同的相位对应有不同的瞬时值, 相位反映了正弦波变化的进程。而确定一个正弦电压或电流, 必须掌握它的 U_m 、 ω 、 ϕ , 为此, U_m 、 ω 、 ϕ 常称为正弦波的三要素。

式(9-5)还可以写成以下的形式:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= U_m \cos(2\pi f t + \phi) \\ &= U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right) \end{aligned} \quad (9-6)$$

显然, 一个直流电压(电流)源可看作频率为零、周期为无限大、初相为零、幅度为定值的特殊正弦电压(电流)。

【例 9-1】 某正弦电流的波形如图 9-4 所示。试求:

(1) 周期 T 及其频率 f 与角频率 ω ;

(2) 分别用余弦函数与正弦函数写出 $i(t)$ 的表示式。

解: (1) 由所给出的波形可知, 从第一个正半周波形下降过零到第二个正半周波形下降过零的时间为 $27.5 - 7.5 = 20(\text{ms})$, 即完成一个循环所需的时间(周期)为 20 ms 。根据式(9-2)、式(9-4), 得

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-3}} = 50(\text{Hz})$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi = 314(\text{rad/s})$$

(2) 由图 9-4 可知, 从坐标原点(时间起点)到第一个正最大值所需时间为 2.5 ms 。若以 ωt 为横坐标, 则对应的角度为

$$\omega \times 2.5 \times 10^{-3} = 100\pi \times 2.5 \times 10^{-3} = \frac{\pi}{4}(\text{rad})$$

由于正最大值发生在原点之后, 并且最大值为 50 A , 故有

$$i(t) = 50 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{4})(\text{A})$$

或可写成

$$i(t) = 50 \cos(100\pi t - 45^\circ)(\text{A})$$

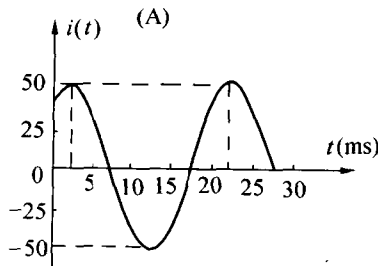


图 9-4 例 9-1 图

运用三角函数公式

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

可得

$$\begin{aligned} i(t) &= 50\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 50\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 50\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(\text{A}) \end{aligned}$$

在本节的最后,我们将介绍在电子技术中常提到的正弦波相位超前、滞后以及同相、正交、反相等概念。

如图 9-5 所示,两个正弦电流的频率相同而最大值与初相各异。用式子分别表示为

$$i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \phi_2)$$

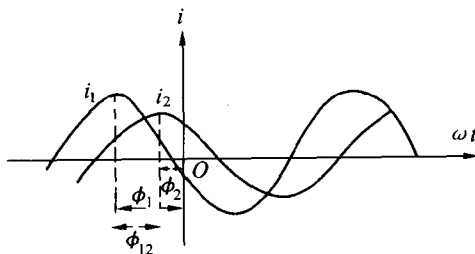


图 9-5 不同初相的正弦波

初相位不同,意味着这两个正弦电流随时间变化的步调不一致,也就是说,它们不可能同时到达各自的正最大值。由波形图可见,电流 i_1 比电流 i_2 早到达正最大值,即 i_1 的波形整体较 i_2 的波形整体在横轴上向前(左)移动了 $(\phi_1 - \phi_2)$ 。而两正弦电流的初相角之差,即为相位角之差,故称之为相位差角,简称相位差,用 ϕ_{12} 表示:

$$\phi_{12} = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2 \quad (9-7)$$

ϕ_{12} 反映了 i_1 的相位超前于 i_2 或 i_2 的相位滞后于 i_1 的角度。图 9-5 则示出了 i_1 在相位上比 i_2 超前 ϕ_{12} ,若用时间表示之,则 i_1 比 i_2 超前 $\phi_{12}/\omega(\text{s})$ 。

显然,当 ϕ_{12} 为零时,上述两正弦波为同相位(简称同相),此时两个波形步调必然一致:同时到达正最大值,同时过零,如图 9-6(a)所示。

当相位差 ϕ_{12} 恰好为 $\pm \frac{\pi}{2} (\pm 90^\circ)$ 时,两正弦波一个达正最大值而另一个必然过零[如图 9-6(b)所示],我们称这两个正弦波为相位正交。当相位差 ϕ_{12} 为 π (即 180°) 时,两正弦波一个达正最大值而另一个必然达负最大值[如图 9-6(c)],我们称这两个正弦波反相位,简称反相。

【例 9-2】 频率相同的正弦电压如下列两式。指出哪一正弦电压超前? 超前的角

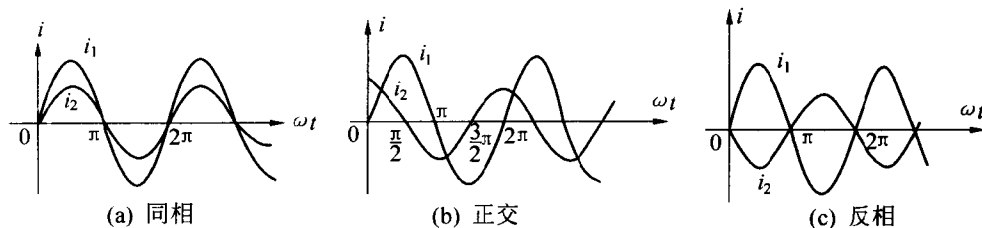


图 9-6 正弦波的同相、正交、反相

度是多少?

$$u_1(t) = U_m \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) (\text{V})$$

$$u_2(t) = U_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) (\text{V})$$

解:由式(9-7)可知:

$$\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{2}{3}\pi - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}\pi$$

$\phi_{12} > 0$, 表明 $u_1(t)$ 超前 $u_2(t)$, 超前的角度为 $\frac{7}{6}\pi$ 。然而, 在允许 $\phi_{12} > \pi$ (即 180°) 的情况下, 我们也可以说 $u_2(t)$ 超前 $u_1(t)$, 其超前角度为 $2\pi - \phi_{12} = 2\pi - \frac{7}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ 。可见, 在允许 $\phi_{12} > \pi$ 的情况下, 一个正弦波既可以说超前于、也可以说滞后于另一正弦波。为避免混淆, 通常规定相位差 ϕ_{12} 的范围在 $-\pi \sim +\pi$, 即用 $2\pi - \phi_{12}$ 来表示相位差角。值得注意的是, 此时应注意原超前的波形应改为滞后, 原滞后的波形应改为超前。

为此, 本例的正确答案应是 $u_2(t)$ 超前 $u_1(t)$, 超前的角度为 $\frac{5}{6}\pi$ 。

练 习 题

9-2 试求下式各正弦波的频率与周期。

$$(1) 5\cos 314t \quad (2) 3\cos 2\pi t \quad (3) 7\sin(4t + 15^\circ) \quad (4) \cos(3t + \frac{\pi}{4}) + 3\sin(3t - \frac{\pi}{6})$$

$$\text{答案: } (50 \text{ Hz}, 0.02 \text{ s}; 1 \text{ Hz}, 1 \text{ s}; \frac{2}{\pi} \text{ Hz}, \frac{\pi}{2} \text{ s}; \frac{3}{2\pi} \text{ Hz})$$

9-3 试计算下列各组正弦波的相位差。

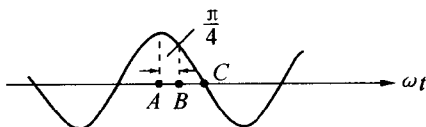
$$(1) i(t) = 10\cos(314t - 10^\circ) (\text{A}) \text{ 与 } u(t) = 20\cos(314t + 60^\circ) (\text{V})$$

$$(2) u_1(t) = -5\cos(60t + 75^\circ) (\text{V}) \text{ 与 } u_2(t) = 3\cos(60t + 15^\circ) (\text{V})$$

$$(3) i_1(t) = -5\sin 3t (\text{A}) \text{ 与 } i_2(t) = -8\cos(3t + 30^\circ) (\text{A})$$

$$\text{答案: } [i(t) \text{ 落后 } u(t) 70^\circ; u_1(t) \text{ 落后 } u_2(t) 120^\circ; i_2(t) \text{ 超前 } i_1(t) 120^\circ]$$

9-4 电流波形如图所示。已知它的最大值为 2 V, 试写出坐标原点(时间起点)分别在 A、B、C 时 $i(t)$ 的数学表达式。



练习题 9-4 图

§ 9-3 正弦激励下 RC 电路的分析

在讨论一阶电路中,我们已对在恒定电源激励下 RC 电路的零状态响应进行了分析与计算。本节将讨论 RC 电路[如图 9-7(a)]在正弦电流作用下,求解响应 $u_c(t)$ 的方法。

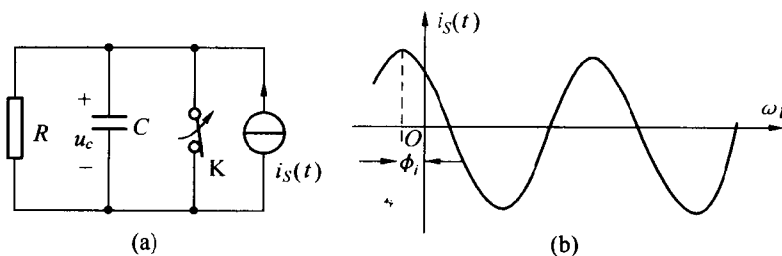


图 9-7 RC 电路及其激励正弦电流

设 $t=0$ 时正弦电流输入 RC 电路,相应于图 9-7(a)中开关 K 在 $t=0$ 时打开,该正弦电流的波形如图 9-7(b)所示,其表达式

$$i_s(t) = I_{sm} \cos(\omega t + \phi_i) \quad t \geq 0 \quad (9-8)$$

式(9-8)中, ϕ_i 为初相角,它的大小决定了开关 K 断开瞬间 $i_s(t)$ 的大小与方向。

图 9-7 电路与[例 6-7]RC 电路[见《电路分析》(上册)]完全相同,差别仅在于前者激励以正弦电流取代脉冲序列电流。为此,电路的微分方程与在一阶 RC 电路的零状态响应所列出的微分方程相似,只是方程右边为一正弦时间函数,即

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} = I_{sm} \cos(\omega t + \phi_i) \quad t \geq 0 \quad (9-9)$$

式(9-9)为一阶非齐次方程,它的解由对应齐次方程的通解 u_{ch} 与特解 u_{cp} 所组成,而其齐次方程通解则与恒定输入时一阶电路的齐次方程通解完全一样,即

$$u_{ch} = K e^{-t/RC} \quad (9-10)$$

因此,要求式(9-9)所示的非齐次方程的解,只要求出它的特解 u_{cp} 即可。而线性常系数微分方程的右端为一正弦时间函数时,它的特解应为同一频率的正弦时间函数,可表示为

$$u_{cp} = U_{cm} \cos(\omega t + \phi_u) \quad (9-11)$$

式(9-11)所示的特解说明, ω 与输入到 RC 电路中的正弦激励电流的 ω 完全一样,只要求出该特解的最大值 U_{cm} 及初相角 ϕ_u ,那么这特解即可确定。

因此,为求 U_{cm} 与 ϕ_u ,可将式(9-11)代入式(9-9),得

$$-CU_{cm}\omega\sin(\omega t + \phi_u) + \frac{U_{cm}}{R}\cos(\omega t + \phi_u) = I_{sm}\cos(\omega t + \phi_i) \quad (9-12)$$

因为若干个同频率正弦函数之和仍为同一频率的正弦函数,故式(9-12)也可以表示为

$$\sqrt{U_{cm}^2\omega^2C^2 + \frac{U_{cm}^2}{R^2}}\cos(\omega t + \phi_u + \arctg\omega CR) = I_{sm}\cos(\omega t + \phi_i) \quad (9-13)$$

要使式(9-13)在任何时刻都成立,应有

$$\sqrt{U_{cm}^2\omega^2C^2 + \frac{U_{cm}^2}{R^2}} = I_{sm}$$

即

$$U_{cm} = \frac{I_{sm}}{\sqrt{\omega^2C^2 + (\frac{1}{R})^2}} \quad (9-14)$$

$$\phi_u + \arctg\omega CR = \phi_i$$

由此得

$$\phi_u = \phi_i - \arctg\omega CR \quad (9-15)$$

根据输入的正弦激励电流以及电路的参数,运用式(9-14)、式(9-15),便可以求出特解的 U_{cm} 与 ϕ_u 。而 $\arctg\omega CR$ 为一个 $0\sim 90^\circ$ 的角度,它的正切为 ωCR 。据上述分析,在画特解波形时,设 ϕ_u 为负值, U_{cp} 的波形如图 9-8(a) 所示。为方便比较,我们重画输入正弦激励电流的波形,如图 9-8(b) 所示。

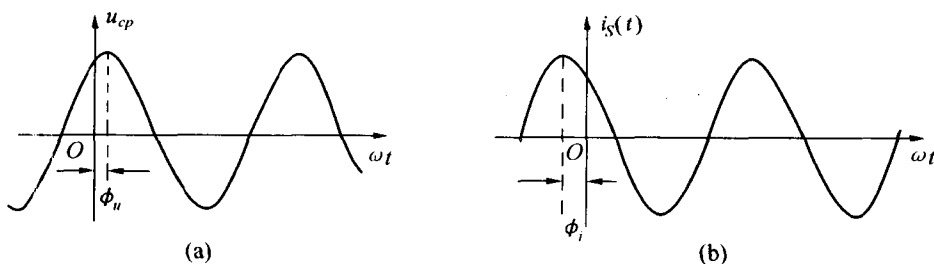


图 9-8 u_{cp} 的波形与激励正弦电流波形

在求出特解后,微分方程的完全解

$$u_{c\text{完全}}(t) = Ke^{-t/RC} + U_{cm}\cos(\omega t + \phi_u) \quad t \geq 0 \quad (9-16)$$

式(9-16)中的 U_{cm} 及 ϕ_u 均由式(9-14)及式(9-15)确定。当 $t=0$ 时,由式(9-16)可得待定常数 K 。即

$$\begin{aligned} u_{c\text{完全}}(0) &= K + U_{cm}\cos\phi_u \\ K &= u_{c\text{完全}}(0) - U_{cm}\cos\phi_u \end{aligned} \quad (9-17)$$

按图 9-7(a) 的实际情况, $u_{c\text{完全}}(0)=0$, 得

$$K = -U_{cm}\cos\phi_u$$

则可求出该 RC 电路在正弦电流的激励下,电路的响应:

$$u_{c\text{完全}}(t) = -U_{cm} \cos \phi_u e^{-t/RC} + U_{cm} \cos(\omega t + \phi_u) \quad t \geq 0 \quad (9-18)$$

其电路的响应波形如图 9-9 所示。综上所述,可以得出如下几点:

(1)按图 9-7(a)所示电路求出的响应实为零状态响应。

(2)由式(9-18)可知,电路的响应为两项之和。其中,第一项为负的指数函数,当 t 足够大时[约 $(4 \sim 5)\tau$, $\tau = R \cdot C$],该项接近零并最后为零,常称为暂态响应。第二项可以理解为换路后足够长的时间,即暂态响应消失后,电路进入新的稳态的响应,该项也就是我们所求的微分方程的特解,故称之为稳态响应。显然,电路换路后是不能马上进入新的稳态的,需经历存在暂态响应的一段时间后,电路的响应才过渡到稳定的正弦电压

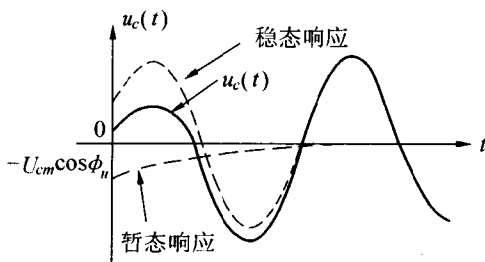


图 9-9 RC 电路响应波形图

波形。而暂态过程的存在是由于要满足动态元件——电容的初始条件。由于电容元件的初始状态为零,而电容的电压不能突变,故经历一段过渡时间后,电容两端电压才能变为由激励所决定的正弦电压。应当注意,包括暂态响应在内的 $u_{c\text{完全}}(t)$ 不是正弦电压,只有在暂态响应消失而进入稳态后,其响应才是正弦电压。

(3)一般来说,电路的暂态响应存在会影响电路从一个状态到另一新的状态的速度。从这个意义上来说,我们希望使式(9-18)表示电路响应的第一项即暂态响应消失。从式(9-18)可以看到,在零状态条件下,当 ϕ_u 为 $\pm \frac{\pi}{2}$ 时,暂态响应该项为零,电路换路后马上进入新的正弦稳态。此时据式(9-15)可知:

$$\phi_u = \phi_i - \arctg \omega CR = \pm \frac{\pi}{2}$$

即

$$\phi_i = \pm \frac{\pi}{2} + \arctg \omega CR$$

这可以控制输入激励电流的初相位及电路的参数加以实现。

反之,另一特殊情况必须引起注意:在零状态的条件下,当 $\phi_u = 2n\pi$ 时,暂态响应 $e^{-t/RC}$ 前面的系数为 $\pm U_{cm}$ (当 n 取不同值时),会出现所谓过电压现象,即响应电压的某瞬时值会超过稳态电压的最大值。发生这种情况时,RC 电路的响应 $u_c(t)$ 的波形如图 9-10 所示。由式(9-15)可知,当 $\phi_u = 0$ 或 $\phi_u = \pi$ 时,对应此时的正弦输入电流的初相位应为 $\arctg \omega CR$ 或 $\pi + \arctg \omega CR$ 。这种过电压现象情况应尽可能避免,以免在某一瞬间击穿电路的有关元件。

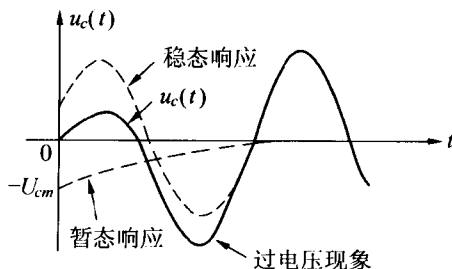
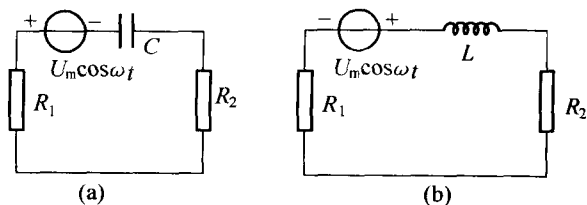


图 9-10 发生过电压现象的 $u_c(t)$ 波形

练 习 题

9-5 在 RL 串联电路中, 已知外施电压 $u_s(t) = 5\cos t$ 在 $t \geq 0$ 时施于电路, $R = 3\Omega$, $L = 2H$, $i(0) = 0$, 试求 $t \geq 0$ 时的 $i(t)$ 。并求在电路进入稳态后, $i(t)$ 与外施电压 $u_s(t)$ 之间的相位关系。

9-6 一般情况下, 如图所示两电路在电源接通后经历多长时间才进入正弦稳态?



练习题 9-6 图

答案: $[4C(R_1 + R_2); \frac{4L}{(R_1 + R_2)}]$

§ 9-4 相 量

在上一节的分析中, RC 电路在正弦激励下响应求解过程, 其微分方程特解采用代入法求出。若电路更为复杂, 采用代入法便显得相当麻烦。为此, 必须寻找一种简便的、求正弦激励下对应线性常系数微分方程特解的方法, 这就是本节提出的相量法。

相量法就是用相量来表征一个正弦波, 并根据复数的有关定理, 求正弦激励下线性常系数微分方程的特解。

一、相量的导出

根据数学上的欧拉恒等式, 有

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

式中, ϕ 为一实数(单位: 弧度)。把该公式推广到以 ϕ 为 t 的实函数情况, 即 $\phi = \omega t$ 。其中 ω 为常量, 单位为 rad/s 。可得

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

通过上式, 将一个实变数的复指数函数与两个实变数 t 的正弦函数联系起来, 因而可用复数来表征一个正弦时间函数。 $\cos\omega t$ 为 $e^{j\omega t}$ 的实部, $\sin\omega t$ 为 $e^{j\omega t}$ 的虚部, 可得

$$\cos\omega t = \Re(e^{j\omega t})$$

$$\sin\omega t = \Im(e^{j\omega t})$$

为此, 作为一个正弦电流:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (9-19)$$

可以写成

$$\begin{aligned} i(t) &= \Re[I_m e^{j(\omega t + \phi)}] = \Re[I_m e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}] \\ &= \Re[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \Re[\dot{I}_m \angle \omega t] \end{aligned} \quad (9-20)$$

而

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\phi} = I_m \angle \phi \quad (9-21)$$

式(9-21)中, $\dot{I}_m$ 是一个与时间无关的复值常数, 它的模为该正弦电流的振幅, 其幅角为该正弦电流的初相角。 $\dot{I}_m$ 称为该正弦电流的峰值(振幅)相量。同理, 对于一个正弦电压, 也可以导出它的电压峰值(振幅)相量, 记为 $\dot{U}_m$ 。

二、相量的概念

我们从欧拉公式出发, 导出了正弦电流以及正弦电压的峰值(振幅)相量(以下简称相量)。

从式(9-20)我们可以看到, 复值常数 $\dot{I}_m$ 代表了式(9-19)所示的正弦电流的核心信息, 它含有正弦电流的两大要素: 振幅与初相。只要给定角频率 ω , 就可以确定一正弦电流。在正弦交流电路处于稳态时, 电压与电流均为同频率的正弦波, 频率通常为已知, 因此 $\dot{I}_m$ 便是足以表征这个正弦电流的复值常数。所以我们说, 电流相量与电压相量可以用来表征正弦电流与正弦电压。然而, 应当注意, 电流相量或电压相量并不等于它表征的正弦电流与正弦电压, 只有在表征这个正弦电流(电压)的相量乘以 $e^{j\omega t}$ 后, 再取其实部才等于它表征的正弦电流(电压)。

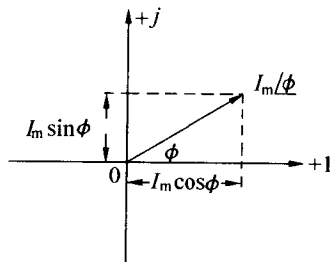


图 9-11 电流相量图

相量作为复数, 它可以在复平面图上用有方向的线段来表示, 如图 9-11。相量在复平面上的示意图, 称为相量图。

相量与 $e^{j\omega t}$ 的乘积为时间 t 的复值函数, 在复平面中代表着以恒定角速度 ω 逆时针方向旋转的相量。该乘积的幅角为 $\phi + \omega t$, 它不是常量, 而是随时间的增长而增长。因此, 它的角速度为

$$\frac{d}{dt}(\phi + \omega t) = \omega$$

在相量图中, 逆时针方向以角速度 ω 旋转的相量在不同时刻在实轴的投影, 就是式(9-19)所示的正弦电流, 如图 9-12 所示。

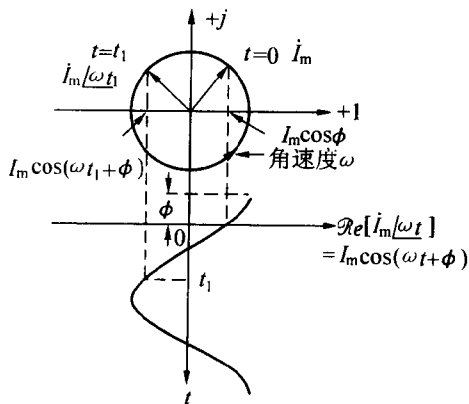


图 9-12 旋转相量在不同时刻在实轴的投影

【例 9-3】 已知 $i_1(t) = 10\cos(100\pi t - 20^\circ)$ (A), $i_2(t) = 15\sin(100\pi t + 45^\circ)$

(A), $i_3(t) = -5\cos(100\pi t + 60^\circ)$ (A)。试求 $\dot{I}_{1m}$ 、 $\dot{I}_{2m}$ 与 $\dot{I}_{3m}$ 。

$$\text{解: } i_1(t) = \operatorname{Re}[10e^{j(100\pi t - 20^\circ)}] = \operatorname{Re}[10e^{-j20^\circ} \cdot e^{j100\pi t}]$$

故

$$\dot{I}_{1m} = 10e^{-j20^\circ} = 10 \angle -20^\circ \text{ (A)}$$