

高等数学

基本教程

■ 代数

〔法〕J. 奎奈 著

胡作玄 郭书春 译

高等教育出版社

[法] J. 奎奈 著

高等数学基本教程

1 代 数

胡作玄 郭书春 译

高等教育出版社

出版前言

本书是根据法国 Cours élémentaire de mathématiques supérieures, 1—Algèbre 一书翻译而成的。原书是法国高等工业院校的教材, 可以作为我国工科院校, 特别是电类专业的师生与工程技术人员参考。

[法] J. 奎奈 著

高等数学基本教程

1 代 数

胡作玄 郭书春 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

陕西省印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 250,000

1982年12月第1版 1983年12月第1次印刷

印数 00,001—14,300

书号 13010·0840 定价 1.65 元

目 录

| | |
|------------------------|----|
| 第一章 集合 | 1 |
| 1.1 集合和关系 | 1 |
| 1.2 等同, 属于 | 2 |
| 1.3 集合的子集 | 4 |
| 1.4 集合的运算 | 5 |
| 1.5 集合的积 | 11 |
| 1.6 二元关系 | 12 |
| 1.7 等价关系 | 13 |
| 1.8 顺序关系 | 15 |
| 1.9 上有界子集, 下有界子集, 有界子集 | 16 |
| 1.10 映射 | 18 |
| 1.11 方程 | 21 |
| 1.12 映射的复合 | 23 |
| 1.13 逆象 | 26 |
| 练习 | 27 |
| 第二章 基本结构 | 29 |
| 2.1 内合成法则 | 29 |
| 2.2 同态 | 35 |
| 2.3 群 | 38 |
| 2.4 子群 | 42 |
| 2.5 群的同态 | 44 |
| 2.6 环 | 45 |
| 2.7 子环 | 49 |
| 2.8 环的同态 | 50 |
| 2.9 一个交换环的理想 | 51 |
| 2.10 牛顿二项式 | 51 |
| 2.11 算术级数 | 53 |

| | | |
|--------|---------------------|-----|
| 2.12 | 域 | 55 |
| 2.13 | 几何级数 | 56 |
| | 练习 | 57 |
| 第三章 实数 | | 60 |
| 3.1 | 自然数 | 60 |
| 3.2 | 数学归纳法 | 62 |
| 3.3 | 计数系统 | 63 |
| 3.4 | 整数 | 68 |
| 3.5 | \mathbb{Z} 的理想的结构 | 70 |
| 3.6 | 有理数 | 71 |
| 3.7 | 有理数序列 | 72 |
| 3.8 | 实数 | 75 |
| 3.9 | 一个非负实数的 n 次根 | 77 |
| 3.10 | 要点重述 | 77 |
| | 练习 | 78 |
| 第四章 复数 | | 80 |
| 4.1 | 复数的表示 | 80 |
| 4.2 | 复数域 | 81 |
| 4.3 | 复数的笛卡儿形式 | 81 |
| 4.4 | 共轭复数 | 83 |
| 4.5 | 复数的模 | 84 |
| 4.6 | 复数序列 | 86 |
| 4.7 | 一个复数的几何表示 | 87 |
| 4.8 | 复数的三角形式 | 89 |
| 4.9 | 复数 j , 旋转算子 | 93 |
| 4.10 | 棣美弗公式 | 94 |
| 4.11 | 一个复数的 n 次根 | 95 |
| 4.12 | 一个复数的平方根的计算 | 98 |
| 4.13 | 应用于解复系数二次方程 | 100 |
| 4.14 | 复指数的指数函数 | 102 |
| 4.15 | 用一个指数函数表示复数 | 103 |

| | | |
|--------------------|--------------------|-----|
| 4.16 | 欧拉公式的三角应用 | 103 |
| 4.17 | 一个正弦量的复数表示 | 105 |
| 4.18 | 一个正弦函数的导数的指数函数表示 | 109 |
| 4.19 | 在电学中的应用 | 109 |
| 4.20 | 线路的串联和并联 | 113 |
| | 练习 | 115 |
| 第五章 线性代数引论 | | 117 |
| 5.1 | 外合成法则 | 117 |
| 5.2 | 向量空间 | 117 |
| 5.3 | 向量空间中的计算规则 | 121 |
| 5.4 | 量子空间 | 122 |
| 5.5 | 线性映射 | 126 |
| 5.6 | 向量空间的同构 | 127 |
| 5.7 | 一个线性映射的象和核 | 128 |
| 5.8 | 线性映射的向量空间 | 129 |
| 5.9 | 互补量子空间 | 131 |
| 5.10 | 双线性映射, 代数 | 133 |
| 5.11 | 子代数 | 135 |
| 5.12 | 代数的同态 | 135 |
| | 练习 | 136 |
| 第六章 有限维向量空间 | | 138 |
| 6.1 | 基 | 138 |
| 6.2 | 有限维向量空间 | 140 |
| 6.3 | 小于等于 n 维的向量空间的特征 | 142 |
| 6.4 | 一个线性映射的确定 | 144 |
| 6.5 | 一个有限维向量空间的量子空间 | 144 |
| 6.6 | 一个线性映射的秩 | 147 |
| 6.7 | 线性形式的核 | 147 |
| 6.8 | 线性递归 | 148 |
| | 练习 | 154 |
| 第七章 矩阵 | | 156 |

| | | |
|------|-------------------|-----|
| 7.1 | 矩阵和线性映射 | 156 |
| 7.2 | 矩阵的运算 | 158 |
| 7.3 | 方阵的环 | 163 |
| 7.4 | 矩阵的转置 | 164 |
| 7.5 | 变换矩阵 | 165 |
| 7.6 | 对角矩阵 | 167 |
| | 练习 | 168 |
| 第八章 | 线性方程组 | 172 |
| 8.1 | 二阶行列式 | 172 |
| 8.2 | 二阶方阵的行列式 | 175 |
| 8.3 | 自同态的行列式 | 176 |
| 8.4 | 多个未知元的两个线性方程的方程组 | 177 |
| 8.5 | 二未知元二线性方程的方程组 | 178 |
| 8.6 | 二阶方阵的逆 | 179 |
| 8.7 | 三个未知元两个齐次线性方程的方程组 | 181 |
| 8.8 | 三线性映射 | 182 |
| 8.9 | 三向量的行列式 | 183 |
| 8.10 | 三阶方阵的行列式 | 184 |
| 8.11 | 多个未知元三线性方程的方程组 | 185 |
| 8.12 | 三个未知元三线性方程的方程组 | 186 |
| 8.13 | 三阶方阵的逆 | 188 |
| | 练习 | 191 |
| 第九章 | 多项式和有理分式 | 195 |
| 9.1 | 多项式环 | 195 |
| 9.2 | 多项式的次数 | 197 |
| 9.3 | 多项式的赋值 | 198 |
| 9.4 | 整除性 | 199 |
| 9.5 | 多项式的欧几里得除法 | 200 |
| 9.6 | 多项式环的理想的结构 | 202 |
| 9.7 | 按升幂排列的除法 | 204 |
| 9.8 | 多项式函数 | 206 |

| | | |
|-------|-----------------|-----|
| 9.9 | 多项式在一点的值的实际求法 | 207 |
| 9.10 | 有理根 | 209 |
| 9.11 | 形式导数 | 210 |
| 9.12 | 逐次导数 | 211 |
| 9.13 | 泰勒公式 | 212 |
| 9.14 | 有理分式 | 214 |
| 9.15 | 有理函数 | 215 |
| 9.16 | 分解成简单形式 | 217 |
| | 练习 | 223 |
| 第十章 | 方阵的对角化 | 226 |
| 10.1 | 自同态的特征值和特征向量 | 226 |
| 10.2 | 可对角化的自同态与对角化矩阵 | 227 |
| 10.3 | 特征向量的线性无关性 | 228 |
| | 练习 | 232 |
| 第十一章 | 矩阵计算在四端网络电路上的应用 | 234 |
| 11.1 | 概要 | 234 |
| 11.2 | 参数的决定 | 237 |
| 11.3 | 不同参数之间的关系 | 237 |
| 11.4 | 线性四端网络的不同组合方式 | 239 |
| 11.5 | 六个练习 | 252 |
| 第十二章 | 欧几里得几何学 | 280 |
| 12.1 | 数量积 | 280 |
| 12.2 | 史瓦兹不等式 | 281 |
| 12.3 | 长度 | 282 |
| 12.4 | 距离 | 284 |
| 12.5 | 正交性 | 285 |
| 12.6 | 欧几里得平面的正交性 | 285 |
| 12.7 | 三维欧几里得空间的正交性 | 287 |
| 12.8 | 一个向量空间的定向 | 289 |
| 12.9 | 极坐标, 柱坐标 | 290 |
| 12.10 | 混合积 | 292 |

| | |
|----------------|-----|
| 12.11 向量积..... | 292 |
| 练习..... | 295 |
| 练习解答..... | 297 |
| 第一章..... | 297 |
| 第二章..... | 301 |
| 第三章..... | 305 |
| 第四章..... | 308 |
| 第五章..... | 310 |
| 第六章..... | 313 |
| 第七章..... | 316 |
| 第八章..... | 320 |
| 第九章..... | 322 |
| 第十章..... | 325 |
| 第十二章..... | 328 |
| 三角公式..... | 330 |

第一章 集 合

1.1 集合和关系

一个多世纪前,由G·康托尔引入的集合语言,已经渗透到数学的所有分支;在法国,它被各级教育,其中包括幼儿教育所使用.因而,我们使用这种语言,不仅因为它方便,而且尤其还因为,今后要想无视它是根本不可能的.

集合和关系的概念是最原始的概念,就是说,不可能由其它概念出发来定义它们.

从直观上讲,一个关系是关于集合 E 的一个断言,这个断言对一个已知集合 E_0 来说,或者被证实或者被否定;根据这种情况,我们就说 E_0 满足或不满足这个关系.

● 一个关系的否定

已知一个关系 R ,我们在逻辑上定义一个新关系,称作 R 的否定,并记作(非 R),或 $\neg R$. R 的否定的否定就是关系 R 本身.

我们还可以说,关系 R 与 $\neg R$ 是矛盾的,也就是说

- 对于每一个集合,这两个关系中的一个是真确的.
- 然而,没有任何一个集合,它们两者都真确.

例如,在自然数的集合中,关系

R : 整数 x 是偶数,

$\neg R$: 整数 x 不是偶数(换言之,就是奇数.)

是矛盾的.

● 合取,析取

一个关系为真,当且仅当 R_1 和 R_2 都真,我们就称这种关系是

这两个关系 R_1 和 R_2 的合取, 并记作 $(R_1 \text{ 与 } R_2)$, 或 $R_1 \wedge R_2$. 最后我们把关系 R_1 和 R_2 的析取定义为这样一种关系, 它是真的, 当且仅当这两个关系 R_1 和 R_2 至少有一个为真, 并记作 $(R_1 \text{ 或 } R_2)$, 或 $R_1 \vee R_2$.

● 蕴涵

从这三个基本定义出发, 我们引出了蕴涵: 已知两个关系 R_1 和 R_2 , 关系 $(R_2 \text{ 或 } (\text{非 } R_1))$ 记作 $R_1 \Rightarrow R_2$, 并且读作“ R_1 蕴涵 R_2 ”. 如果蕴涵 $R_1 \Rightarrow R_2$ 为真, 那么每一个满足 R_1 的集合都满足 R_2 .

蕴涵关系导入了两个关系等价的概念: 如果有两个关系 R_1 和 R_2 , 其中每一个都蕴涵另一个, 那么就说它们是等价的, 并记作 $R_1 \Leftrightarrow R_2$.

蕴涵 $R_2 \Rightarrow R_1$ 称作蕴涵 $R_1 \Rightarrow R_2$ 之逆. 蕴涵 $(\text{非 } R_2) \Rightarrow (\text{非 } R_1)$ 被称作 $R_1 \Rightarrow R_2$ 的逆否. 一个蕴涵与它的逆否总是等价的.

例: 设关系

R_1 : 三角形 ABC 的三边相等,

R_2 : 三角形 ABC 的三角相等.

我们有蕴涵 $R_1 \Rightarrow R_2$ (这是一个很熟悉的定理: 如果一个三角形三条边相等, 则它的三个角也相等).

我们也有逆蕴涵 $R_2 \Rightarrow R_1$ (这是定理: 如果一个三角形三个角相等, 则它的三条边也相等).

因而, 这两个关系是等价的:

$$R_1 \Leftrightarrow R_2.$$

1.2 等同, 属于

等同关系和属于关系也都是最原始的概念.

两个集合 E 和 F 等同, 记作 $E = F$ (读作“ E 等于 F ”); 直观上它意味着字母 E 和 F 代表同一个对象.

对于每一个集合 E , $E=E$. 关系 $E=F$ 等价于关系 $F=E$. 最后, 若 $E=F$ 并且 $F=G$, 则 $E=G$. E 和 F 等同的否定记作 $E \neq F$ (并且读作“ E 不等于 F ”, 或者“ E 不同于 F ”).

一个集合 x 属于一个集合 E , 记作 $x \in E$ (并且读作“ x 属于 E ”). 此时, 我们说 x 是 E 的元素. x 属于 E 的否定, 记作 $x \notin E$ (当然读作“ x 不属于 E ”).

为了使两个集合 E 和 F 相等, 其必要且充分条件是属于 E 与属于 F 的关系是等价的:

$$x \in E \iff x \in F.$$

特别, 上面所说的那些话保证了没有任何元素的集合的唯一性. 我们容许这样一个集合的存在, 把它称为空集, 并记作 \emptyset .

如果一个集合 E 是非空的, 并且关系 $x \in E$ 与 $y \in E$ 的合取蕴涵 $x = y$, 我们就说这个集合 E 只有一个元素. 我们把这样一个集合记作 $\{x\}$, 并且称作单集, 我们同样定义有两个元素的集合, 把它称为元素对; 此时, 我们使用记号 $\{x, y\}$.

更一般地, 我们可以用其元素的名单来定义一个集合: $E = \{x, y, z, \dots\}$; 我们说集合 E 被表示成它的外延. 在某些情况中, 我们也可以由一个特征关系 R 来定义一个集合 E ; 此时, 我们说集合 E 被表示成它的内涵.

通常, 我们用平面上一条封闭曲线限定的部分表示一个集合 (图1.1).

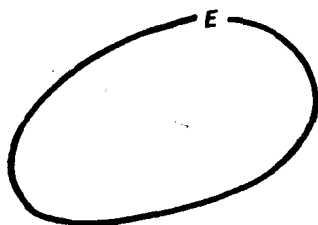


图 1.1 集合

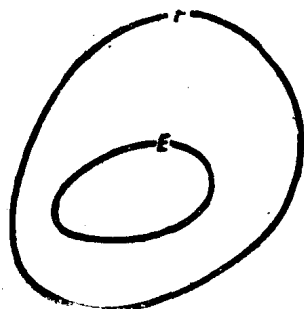


图 1.2 包含

1.3 集合的子集

设 E 和 F 是两个集合. 如果 E 的每一个元素都是 F 的元素, 我们就说 E 包含在(或内含于) F 中, 记作 $E \subset F$. 我们还可以说 E 是 F 的子集(或一部分)(图1.2).

例

1. 空集包括在每一个集合中.
2. 全体偶数的集合是全体自然数集合的一个子集.

显然, 包含关系具有下列性质:

- a) 每一个集合都包含在它本身中.
- b) 如果一个集合 E 包含在一个集合 F 中, 又如果 F 包含在 E 中, 那么 E 等于 F .

c) 设 E, F 和 G 是三个集合, 若 $E \subset F$, 且 $F \subset G$, 则 $E \subset G$.

一个集合 E 的诸子集构成一个集合, 自然称作 E 的子集的集合, 并记作 $\mathcal{D}(E)$.

例

1. 对于每一个集合 E , E 的空子集及集合 E 本身, 都属于集合 $\mathcal{D}(E)$.

2. 当 $E = \phi$ 时, 集合 $\mathcal{D}(E)$ 只有一个元素, 即 E 的空子集:

$$\mathcal{D}(\phi) = \{\phi\}.$$

集合的子集之余集. 设 E 是一集合, 而 P 是 E 的一个子集. E 的不属于 P 的诸元素的集合称作 P 在 E 中的余集, 记作 $C_E P$, 如果不会发生任何混淆的话, 可以简单地记作 \bar{P} . (图1.3)

我们也将使用记号 $E - P$,

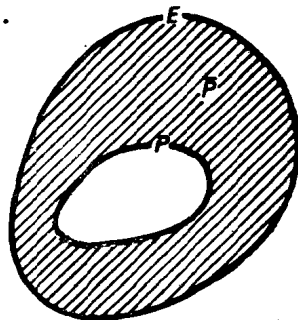


图 1.3 子集的余集

它以后将被进一步推广.

求余集一事显然具有下列性质:

a) E 的一个子集 P 的余集 \bar{P} 在 E 中的余集不是别的, 正是子集 P 本身:

$$\overline{\bar{P}} = P.$$

这就是为什么我们常常说子集 P 和 \bar{P} 在 E 中是互余的.

b) 设 P 和 Q 是 E 的两个子集. 当且仅当 $\bar{Q} = \bar{P}$ 时, 关系 $P = Q$ 成立; 当且仅当 $\bar{Q} \subset \bar{P}$ 时, 关系 $P \subset Q$ 成立.

例

1. E 的空子集在 E 中的余集等于整个 E :

$$C_E \emptyset = E.$$

同样, E 的等于整个 E 的子集的余集不是别的, 正是 E 的空子集.

$$C_E E = \emptyset.$$

2. 若 $E = \{a, b, c, d\}$ 且 $P = \{a, c\}$, 则

$$C_E P = \{b, d\}.$$

3. 全体奇数组成的子集 P 在全体自然数集合 N 中的余集是全体偶数集合.

分割. 设 E 是一个集合, 而 $\mathcal{D}(E)$ 是其子集的集合. 所谓 E 的一个分割, 是指 $\mathcal{D}(E)$ 的每个这样的子集 Q , 它由 E 的非空子集所组成, 使得 E 的每一个元素属于 Q 的一个且是唯一一个元素.

例 E 的一个有别于 E 的非空子集 P 及其余子集 \bar{P} 构成的 $\mathcal{D}(E)$ 的一个子集, 就是 E 的一个分割. 同样, 偶数集合与奇数集合就构成 N 的一个分割.

1.4 集合的运算

两个集合的交. 设 E 和 F 是两个集合. 我们把由同时属于 E 和 F 的诸元素构成的集合称作 E 和 F 的交, 记作 $E \cap F$ (图1.4)

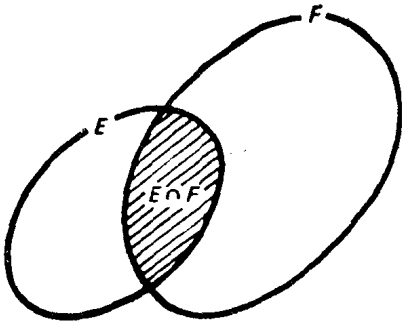


图 1.4 两个集合的交

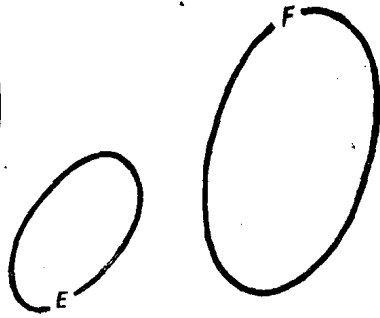


图 1.5 不相交的集合

(符号 \cap 读作“交”。)

当 E 和 F 的交是一个空集时，我们说集合 E 和 F 是不相交的 (图 1.5)。

例

1. 2 的整倍数集合与 3 的整倍数集合的交集是 6 的倍数集合。

2. 集合 E 的子集 P 与它在 E 中的余集 \bar{P} 的交是空集:

$$P \cap \bar{P} = \emptyset.$$

3. 更一般地，一个集合 E 的属于 E 的同一个分割的两个子集是不相交的。

下列性质是显然的:

a) 不管 E 是什么样的集合，都有

$$E \cap E = E;$$

b) 不管 E 和 F 是什么样的集合，都有

$$E \cap F = F \cap E;$$

c) 不管 E , F 和 G 是什么样的集合，都有

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

由于括号在今后无用处，我们将把这两端的共同值记作 $E \cap F$

$\cap G$ (图1.6).

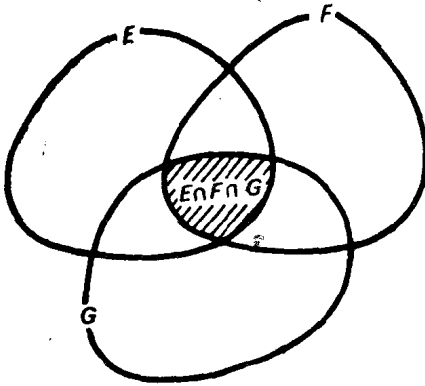


图 1.6 三个集合的交

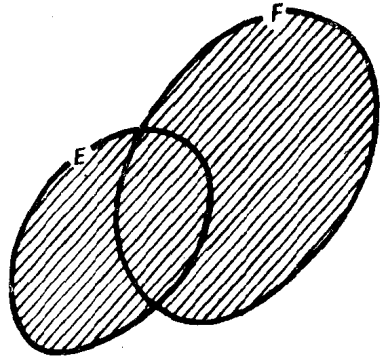


图 1.7 两个集合的并

两个集合的并. 设 E 和 F 是两个集合. 我们把由至少属于集合 E 和 F 中之一的诸元素构成的集合叫做 E 和 F 的并, 记作 $E \cup F$ (图1.7)(符号 \cup 读作“并”).

我们可以更简单地说, 并是其元素或属于 E 或属于 F 的集合; 但是“或者”这个词有两种含义:

可兼的“或者”, 它意味着, 属于 E 和 F 的一个元素可能同时属于这两个集合;

不可兼的“或者”, 它意味着, 属于 E 或 F 的一个元素或者属于 E , 或者属于 F , 但不属于 $E \cap F$.

可兼的“或者”表示并的概念. 不可兼的“或者”引导出对称差的概念(见后).

例

1. 4 的整数倍的集合与形如 $4p+2$ (其中 p 遍取于 \mathbf{Z}) 的整数集合的并是偶数集合.

2. 一个集合 E 的子集 P 与它在 E 中的余集的并就是整个 E .

$$P \cup \bar{P} = E.$$

下列性质是显然的:

a) 对不管什么样的集合 E , 都有

$$E \cup E = E;$$

b) 对不管什么样的集合 E 和 F , 都有

$$E \cup F = F \cup E;$$

c) 对不管什么样的集合 E , F 和 G , 都有

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G).$$

由于括号今后无用处, 我们将把这两端的共同值记作 $E \cup F \cup G$ (图 1.8).

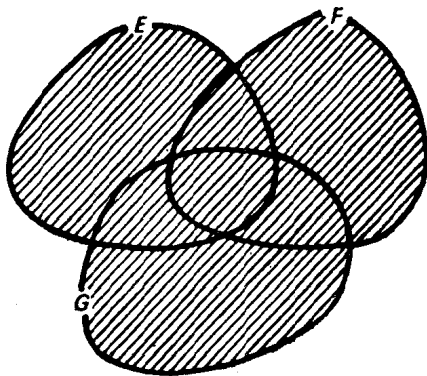


图 1.8 三个集合的并

并和交可以在某种意义上与包含相容并存; 更确切地说, 设 E , F 和 G 是三个集合. 如果 E 包含在 F 中, 那么

$$(E \cap G) \subset (F \cap G) \quad (1)$$

和

$$(E \cup G) \subset (F \cup G). \quad (2)$$

比如, 我们证明关系(1). 设 x 是 $E \cap G$ 的一个元素, 就是说是 E 和 G 的一个共同元素. 因为 E 包含在 F 中, 所以 x 属于 F , 又属于 G , 此即所要证明的.

交集和并集的关系. 设 E , F 和 G 是三个集合, 那么: