高等数学基本教程

1 代数

〔法〕J. 奎奈 著

胡作玄 郭书春 译

高等教育出版社

〔法〕J. 奎奈　著

高等数学基本教程

1 代　数

胡作玄 郭书春　译

高等教育出版社

出 版 前 言

本书是根据法国 Cours élémentaire de mathématiques supérieures, 1—Algèbre 一书翻译而成的。原书是法国高等工业院校的教材，可以作为我国工科院校，特别是电类专业的师生与工程技术人员参考。

〔法〕J. 奎奈 著

高等数学基本教程

1 代 数

胡作玄 郭书春 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

陕西省印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 250,000

1982 年 12 月第 1 版 1983 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—14 300

书号 13010·0840 定价 1.65 元

目　　录

第一章 集　合

1.1 集合和关系

一个多世纪前，由G·康托尔引入的集合语言，已经渗透到数学的所有分支；在法国，它被各级教育，其中包括幼儿教育所使用. 因而，我们使用这种语言，不仅因为它方便，而且尤其还因为，今后要想无视它是根本不可能的.

集合和关系的概念是最原始的概念，就是说，不可能由其它概念出发来定义它们.

从直观上讲，一个关系是关于集合E的一个断言，这个断言对一个已知集合E_0来说，或者被证实或者被否定；根据这种情况，我们就说E_0满足或不满足这个关系.

● 一个关系的否定

已知一个关系R，我们在逻辑上定义一个新关系，称作R的否定，并记作(非R)，或$\neg R$. R的否定的否定就是关系R本身.

我们还可以说，关系R与$\neg R$是矛盾的，也就是说

● 对于每一个集合，这两个关系中的一个是真确的.

● 然而，没有任何一个集合，它们两者都真确.

例如，在自然数的集合中，关系

R: 整数x是偶数，

$\neg R$: 整数x不是偶数(换言之，就是奇数.)

是矛盾的.

● 合取，析取

一个关系为真，当且仅当R_1和R_2都真，我们就称这种关系是

这两个关系 R_1 和 R_2 的合取，并记作(R_1 与 R_2)，或 $R_1 \wedge R_2$. 最后我们把关系 R_1 和 R_2 的析取定义为这样一种关系，它是真的，当且仅当这两个关系 R_1 和 R_2 至少有一个为真，并记作(R_1 或 R_2)，或 $R_1 \vee R_2$.

● 蕴涵

从这三个基本定义出发，我们引出了蕴涵：已知两个关系R_1和R_2，关系(R_2 或(非 R_1))记作 $R_1 \Rightarrow R_2$，并且读作"R_1 蕴涵 R_2". 如果蕴涵 $R_1 \Rightarrow R_2$ 为真，那么每一个满足 R_1 的集合都满足 R_2.

蕴涵关系导入了两个关系等价的概念：如果有两个关系 R_1 和 R_2，其中每一个都蕴涵另一个，那么就说它们是等价的，并记作 $R_1 \Longleftrightarrow R_2$.

蕴涵 $R_2 \Rightarrow R_1$ 称作蕴涵 $R_1 \Rightarrow R_2$ 之逆. 蕴涵(非 R_2)$\Rightarrow$(非 R_1)被称作 $R_1 \Rightarrow R_2$ 的逆否. 一个蕴涵与它的逆否总是等价的.

例：设关系

R_1：三角形ABC的三边相等，

R_2：三角形ABC的三角相等.

我们有蕴涵$R_1 \Rightarrow R_2$(这是一个很熟悉的定理：如果一个三角形三条边相等，则它的三个角也相等).

我们也有逆蕴涵$R_2 \Rightarrow R_1$(这是定理：如果一个三角形三个角相等，则它的三条边也相等).

因而，这两个关系是等价的：

$$R_1 \Longleftrightarrow R_2.$$

1.2 等同，属于

等同关系和属于关系也都是最原始的概念.

两个集合 E 和 F 等同，记作 $E=F$(读作"E 等于 F")；直观上它意味着字母 E 和 F 代表同一个对象.

对于每一个集合E，$E=E$. 关系 $E=F$等价于关系 $F=E$. 最后，若 $E=F$ 并且 $F=G$，则 $E=G$. E和F等同的否定记作 $E\neq F$（并且读作"E不等于F"，或者"E不同于F"）.

一个集合 x *属于*一个集合 E，记作$x\in E$（并且读作"x属于E"）. 此时，我们说x是E的*元素*. x属于E的否定，记作$x\notin E$（当然读作"x不属于E"）.

为了使两个集合E和F相等，其必要且充分条件是属于E与属于F的关系是等价的：

$$x\in E \Longleftrightarrow x\in F.$$

特别，上面所说的那些话保证了没有任何元素的集合的唯一性. 我们容许这样一个集合的存在，把它称为*空集*，并记作$\varnothing$.

如果一个集合E是非空的，并且关系$x\in E$与$y\in E$的合取蕴涵$x=y$，我们就说这个集合E只有一个元素. 我们把这样一个集合记作$\{x\}$，并且称作*么集*，我们同样定义有两个元素的集合，把它称为*元素对*；此时，我们使用记号$\{x,y\}$.

更一般地，我们可以用其元素的名单来定义一个集合：$E=\{x,y,z,\cdots\cdots\}$；我们说集合E被表示成它的*外延*. 在某些情况中，我们也可以由一个特征关系R来定义一个集合E；此时，我们说集合E被表示成它的*内涵*.

通常，我们用平面上一条封闭曲线限定的部分表示一个集合（图1.1）.

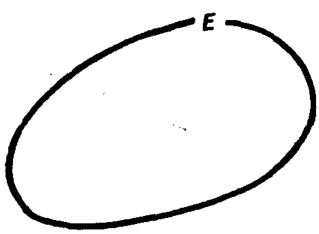

图1.1 集合

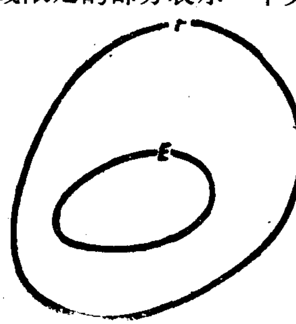

图1.2 包含

1.3 集合的子集

设E和F是两个集合．如果E的每一个元素都是F的元素，我们就说E包含在(或内含于)F中，记作$E\subset F$．我们还可以说E是F的子集(或一部分)(图1.2)．

例

1．空集包括在每一个集合中．

2．全体偶数的集合是全体自然数集合的一个子集．

显然，包含关系具有下列性质：

a）每一个集合都包含在它本身中．

b）如果一个集合E包含在一个集合F中，又如果F包含在E中，那么E等于F．

c）设E，F和G是三个集合，若$E\subset F$，且$F\subset G$，则$E\subset G$．

一个集合E的诸子集构成一个集合，自然称作E的子集的集合，并记作$\mathscr{P}(E)$．

例

1．对于每一个集合E，E的空子集及集合E本身，都属于集合$\mathscr{P}(E)$．

2．当$E=\phi$时，集合$\mathscr{P}(E)$只有一个元素，即E的空子集：

$$\mathscr{P}(\phi)=\{\phi\}.$$

集合的子集之余集．设E是一集合，而P是E的一个子集．E的不属于P的诸元素的集合称作P在E中的余集，记作C_EP，如果不会发生任何混淆的话，可以简单地记作$\bar{P}$．(图1.3)

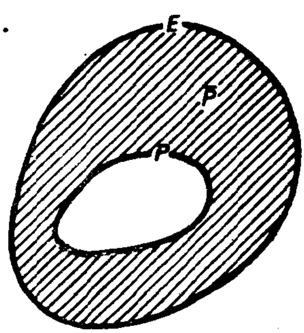

图 1.3 子集的余集

我们也将使用记号$E-P$，

它以后将被进一步推广.

求余集一事显然具有下列性质:

a) E的一个子集P的余集$\bar{P}$在E中的余集不是别的，正是子集P本身:

$$\bar{\bar{P}}=P.$$

这就是为什么我们常常说子集P和$\bar{P}$在E中是互余的.

b) 设P和Q是E的两个子集. 当且仅当$\bar{Q}=\bar{P}$时,关系$P=Q$成立;当且仅当$\bar{Q}\subset\bar{P}$时,关系$P\subset Q$成立.

例

1. E的空子集在E中的余集等于整个E:

$$\mathbf{C}_E\varnothing=E.$$

同样,E的等于整个E的子集的余集不是别的,正是E的空子集·

$$\mathbf{C}_E E=\varnothing.$$

2. 若$E=\{a,b,c,d\}$　且$P=\{a,c\}$,则

$$\mathbf{C}_E P=\{b,d\}.$$

3. 全体奇数组成的子集P在全体自然数集合N中的余集是全体偶数集合.

分割. 设E是一个集合,而$\mathscr{P}(E)$是其子集的集合. 所谓E的一个分割,是指$\mathscr{P}(E)$的每个这样的子集Q，它由E的非空子集所组成,使得E的每一个元素属于Q的一个且是唯一一个元素.

例　E的一个有别于E的非空子集P及其余子集$\bar{P}$构成的$\mathscr{P}(E)$的一个子集,就是E的一个分割. 同样，偶数集合与奇数集合就构成$\mathbf{N}$的一个分割.

1.4　集合的运算

两个集合的交. 设E和F是两个集合. 我们把由同时属于E和F的诸元素构成的集合称作E和F的交，记作$E\cap F$(图1.4)

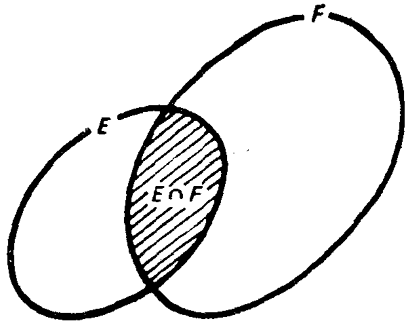

图 1.4　两个集合的交

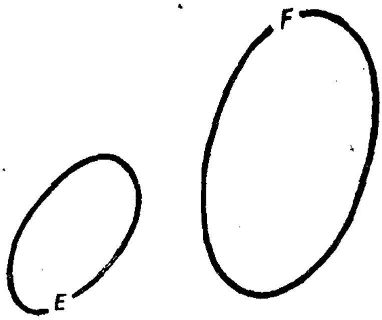

图 1.5　不相交的集合

(符号∩读作“交”.)

当E和F的交是一个空集时，我们说集合E和F是不相交的(图1.5).

例

1. 2的整倍数集合与3的整倍数集合的交集是6的倍数集合.

2. 集合E的子集P与它在E中的余集的交是空集:

$$P \cap \bar{P} = \varnothing.$$

3. 更一般地,一个集合E的属于E的同一个分割的两个子集是不相交的.

下列性质是显然的:

a) 不管E是什么样的集合,都有

$$E \cap E = E;$$

b) 不管E和F是什么样的集合,都有

$$E \cap F = F \cap E;$$

c) 不管E, F和G是什么样的集合,都有

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

由于括号在今后无用处,我们将把这两端的共同值记作$E \cap F$

$\cap G$(图1.6).

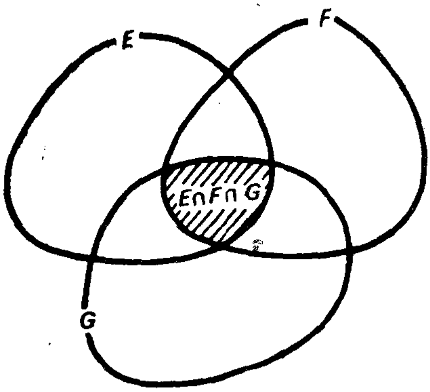

图 1.6 三个集合的交

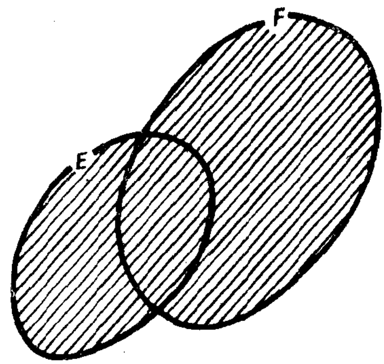

图 1.7 两个集合的并

两个集合的并. 设E和F是两个集合. 我们把由至少属于集合E和F中之一的诸元素构成的集合叫做E和F的并,记作$E\cup F$(图1.7)(符号$\cup$读作"并").

我们可以更简单地说,并是其元素或属于E或属于F的集合;但是"或者"这个词有两种含义:

可兼的"或者",它意味着,属于E和F的一个元素可能同时属于这两个集合;

不可兼的"或者",它意味着,属于E或F的一个元素或者属于E,或者属于F,但不属于$E\cap F$.

可兼的"或者"表示并的概念. 不可兼的"或者"引导出对称差的概念(见后).

例

1. 4的整数倍的集合与形如$4p+2$(其中p遍取于$\mathbf{Z}$)的整数集合的并是偶数集合.

2. 一个集合E的子集P与它在E中的余集的并就是整个E.

$$P \cup \bar{P} = E.$$

下列性质是显然的:

a) 对不管什么样的集合 E,都有

$$E \cup E = E;$$

b) 对不管什么样的集合 E 和 F,都有

$$E \cup F = F \cup E;$$

c) 对不管什么样的集合 E, F 和 G,都有

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G).$$

由于括号今后无用处,我们将把这两端的共同值记作 $E \cup F \cup G$(图1.8).

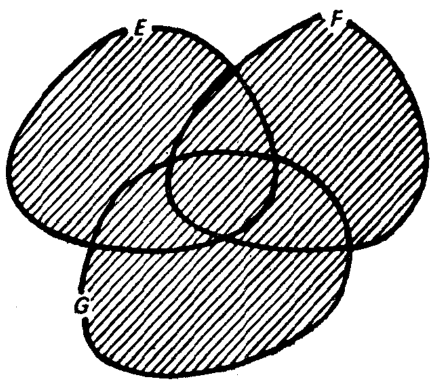

图 1.8 三个集合的并

并和交可以在某种意义下与包含相容并存;更确切地说,设 E, F 和 G 是三个集合. 如果 E 包含在 F 中,那么

$$(E \cap G) \subset (F \cap G) \tag{1}$$

和

$$(E \cup G) \subset (F \cup G). \tag{2}$$

比如,我们证明关系(1). 设 x 是 $E \cap G$ 的一个元素,就是说是 E 和 G 的一个共同元素. 因为 E 包含在 F 中,所以 x 属于 F,又属于 G,此即所要证明的.

交集和并集的关系. 设 E, F 和 G 是三个集合,那么: