高等学校工程专科教材

高 等 数 学

上 册

主编 盛祥耀 副主编 潘鹊屏
编者 潘鹊屏 黄奕佗 邢文斗 钱翼文
章 平 汪瑶同 王庚生

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是国家教委工程专科学校数学教材编审组，根据国家教委工程专科学校基础课程教学基本要求(高等数学)组织编写的全国统编教材。

考虑到专科层次的特点，全书始终贯彻“在基础课的教学中，要求以应用为目的，以必需、够用为度”的精神。本书分上、下两册出版，上册分成七章，内容是函数、极限、连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；微分方程。

本书可供高等工程专科院校师生使用。

高等学校工程专科教材
高 等 数 学
上 册
主编 盛祥耀 副主编 潘鹤屏
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
三河科教印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 13.25 字数 340 000
1992年8月第1版 1993 年3月第1次印刷
印数0 001—33 092
ISBN7-04-004147-2/O·1191
定价 4.95 元

前　言

根据国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神，为了适应高等工程专科学校培养高等技术应用型人材的需要，解决缺少工程专科教材问题，不断提高教学质量，我们在国家教委高等教育司领导下，在全国高等工程专科数学教材编审组的组织下，依据“高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求”编写了本教材。

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”和少而精原则，在保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少数理论证，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，内容通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学，努力体现高等工程专科特色。

本教材的教学时数为140学时左右，打 * 号的内容要另加学时。

本教材经全国高等工程专科数学教材编审组审定为高等工程专科学校各专业的高等数学课教材．也可作为专科层次的职工大学，夜大学，干部培训班的教材．

本教材由北京印刷学院盛祥耀教授任主编，南京交通高等专科学校潘鹊屏副教授任副主编．参加本书编写的有(以章节排列)南京交通高等专科学校潘鹊屏，郑州机械专科学校黄奕佗，沈阳工业高等专科学校邢文斗，上海轻工业高等专科学校钱翼文，南京交通高等专科学校章平，扬州工学院汪瑶同，哈尔滨机电专科学校王庚生等同志．黄奕佗、邢文斗二同志对本书初稿进行过一次修改，全书由主编和副主编修改定稿．

本教材由合肥联合大学周正中教授任主审．南京机械专科学校苏永法、新疆煤炭专科学校谭玉明等同志对本书的编写提出了

宝贵意见，对此我们一并表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正。

编　者

一九九二年四月

目　录

第一章　函数　极限　连续

函数是近代数学的基本概念之一．"高等数学"就是以函数为主要研究对象的一门数学课程．极限是贯穿"高等数学"始终的一个重要概念，它是这门课程的基本推理工具．连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础．

第一节　函　　数

一　函数的概念

读者在中学里已经学过有关函数的基本知识，但为了以后更好地学习高等数学，我们把有关的内容系统地复习一下．

定义　设D为一个非空实数集合，若存在确定的对应规则f，使得对于数集D中的任意一个数x，按照f都有唯一确定的实数y与之对应，则称f是定义在集合D上的函数．

D称为函数f的定义域，x称为自变量，y称为因变量，如果对于自变量x的某个确定的值x_0，因变量y能够得到一个确定的值，那么就称函数f在x_0处有定义，其因变量的值或函数f的函数值记为

$$y|_{x=x_0},\quad f(x)|_{x=x_0}\text{或}f(x_0).$$

实数集合$B=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$称为函数f的值域．这儿的$f(x)$是函数f在x的函数值，$f(x)$与f二者并不相同．但是，人们往往是通过函数值研究函数的，因此通常也称$f(x)$是x的函数，或者说y是x的函数，本书亦将采用这种习惯的叙述方式．

不难看出，函数是由定义域与对应规则所确定的，因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规则都分别相同时，它们才表示同一函数。而与自变量及因变量用什么字母表示无关，例如函数$y=f(x)$也可以用$y=f(\theta)$表示。

正因为如此，我们在给出一个函数时，一般都应标明其定义域，它就是自变量取值的允许范围。这可由所讨论的问题的实际意义确定；凡未标明实际意义的函数，其定义域是使该式有意义的自变量的取值范围。例如$y=x^2$的定义域为$(-\infty,\infty)$。人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域。

对于在同一个问题中的不同函数，应该采用不同的记号，如$f(x)$，$\varphi(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$，…，等等。

有时会遇到给定x值，对应的y值有多个的情形，为了叙述方便称之为多值函数。而符合上述定义的函数称为单值函数。对于多值的情形，我们可以限制y的值域使之成为单值再进行研究。例如：若$y=\text{arc}\sin x$，则可限制$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，而使它转化为函数$y=\arcsin x$，从而通过对$y=\arcsin x$的研究，了解$y=\text{arc}\sin x$的性态。

例1 确定函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$的定义域。

解 显然，其定义域为满足不等式

$$x^2-2x-3>0$$

的x值的集合，解此不等式，则得其定义域为：

$$x>3\text{或}x<-1,\ \text{即：}(-\infty,-1)\cup(3,+\infty).$$

也可以用集合形式表示为$D=\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)\}$。

例2 确定函数

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域。

解 该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases} 3+2x-x^2 \geqslant 0, \\ x-2>0 \end{cases}$$

的x值的全体，解此不等式组，得其定义域

$$2<x\leqslant 3，即(-2，3]。$$

也可以用集合形式表示为$D=\{x|x\in(2，3)\}$。

例3 设函数$f(x)=x^3-2x+3$，求$f(1)$，$f\left(-\dfrac{1}{a}\right)$，$f(t^2)$ $[f(b)]^2$，$\dfrac{1}{f(c)}$（其中$a\neq 0$，$f(c)\neq 0$）。

解 $f(1)=1^3-2\cdot 1+3=2$；

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{1}{a}\right)^3-2\left(-\frac{1}{a}\right)+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3$$

$$=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3}；$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3；$$

$$[f(b)]^2=(b^3-2b+3)^2；$$

$$\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{c^3-2c+3}。$$

注意，函数$y=c$（c为常数）的定义域为$(-\infty，+\infty)$，这时不论自变量取何值，对应的函数值均为c。

由上面两例，我们可以体会到：函数定义中的对应规则f，就象是一台机器，定义域中的任何一个x值进入这台机器后，即加工为值域内的一个函数值$f(x)$（图1-1）。

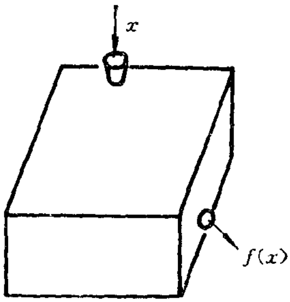


图 1-1

二　函数的表示法

函数$f(x)$的具体表达方式是不尽相同的，这就产生了函数的不同表示法，函数的表示法通常有三种：公式法、表格法和图示法。

1. 以数学式子表示函数的方法叫做函数的公式表示法，上述例子中的函数都是以公式表示的，公式法的优点是便于理论推导和计算。

2. 以表格形式表示函数的方法叫做函数的表格表示法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表、企业历年产值表等等，都是以这种方法表示的函数。表格法的优点是所求的函数值容易查得。

3. 以图形表示函数的方法叫做函数的图示法。这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势。

三　分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示，但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式。这样的函数叫做分段函数，分段函数在数学上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到。

例4　旅客乘坐火车可免费携带不超过20公斤的物品，超过20公斤而不超过50公斤的部分每公斤交费0.20元，超过50公斤部分每公斤交费0.3元。求运费与携带物品重量的函数关系

解　设物品重量为x公斤，应交运费为y元。由题意可知这时应考虑三种情况：

第一种情况是重量不超过20公斤，这时

$$y=0,\ x\in[0,\ 20].$$

第二种情况是重量大于20公斤但不超过50公斤，这时

$$y=(x-20)\times 0.2,\quad x\in(20,\ 50].$$

最后是重量超过50公斤，这时

$$y=(50-20)\times 0.2+(x-50)\times 0.3,\quad x>50.$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0,\ 20],\\ 0.2(x-20), & x\in(20,\ 50],\\ 0.2(50-20)+0.3(x-50), & x>50.\end{cases}$$

例5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求$f(2)$、$f(0)$和$f(-2)$。

解 因为$2\in(0,+\infty)$，$0\in\{0\}$，$-2\in(-\infty,0)$，所以

$$f(2)=1,\qquad f(0)=0,\qquad f(-2)=-1.$$

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算。

例5给出的函数称为符号函数，记为$\operatorname{sgn}x$。其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域$\{-1,0,1\}$，它的图形如图1-2所示。我们有时可以运用它将某些分段函数写的简洁一些。

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0,\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0,\end{cases}$$

可以记为

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{sgn}x.$$

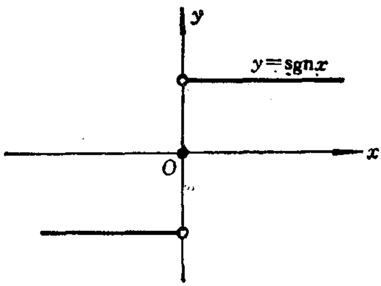


图 1-2

例6 函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x^2), & -\infty<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 2,\end{cases}$$

为定义在$(-\infty,\ 2]$上的一个分段函数。对于任何一个$x\in(-\infty,\ 0]$，其函数值均以$\cos(x^2)$计算；对于任何一个$x\in(0,\ 2]$，其函

数值均为1。

例7 语句“变量y是不超过x的最大整数部分”表示了一个分段函数，常称为“取整函数”，记为$y=[x]$。即若$n\leqslant x<n+1$，则$[x]=n$，其中n为整数。因此其数学表达式为

$$[x]=\begin{cases}\cdots, & \cdots\cdots, \\ -2, & -2\leqslant x<-1, \\ -1, & -1\leqslant x<0, \\ 0, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \\ 2, & 2\leqslant x<3, \\ \cdots, & \cdots\cdots.\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，它的图形如图1-3所示。

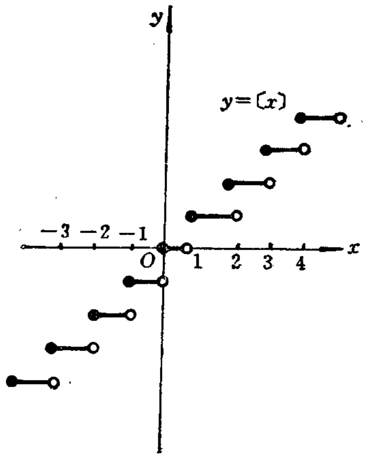


图 1-3

四 反 函 数

设$y=f(x)$为定义在D上的函数，其值域为A。若对于数集A

中的每个数y，数集D中都有唯一的一个数x使$f(x)=y$，这就是说变量x是变量y的函数。这个函数称为函数$y=f(x)$的反函数，记为$x=f^{-1}(y)$。其定义域为A，值域为D。函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$二者的图形是相同的。

由于人们习惯于用x表示自变量，用y表示因变量，为了照顾习惯，我们将函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$用$y=f^{-1}(x)$表示，注意，这时二者的图形关于直线$y=x$对称。

由函数$y=f(x)$求它的反函数的步骤是：由方程$y=f(x)$解出x，得到$x=f^{-1}(y)$；将函数$x=f^{-1}(y)$中的x和y分别换为y和x，这样，得到反函数$y=f^{-1}(x)$。

例8 求函数$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数。

解 由$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$可解得 $x=\log_2\left(\dfrac{1}{y-1}\right)$，交换$x$、$y$的位置，即得所求的反函数

$$y=\log_2\frac{1}{x-1}\text{或}y=-\log_2(x-1),$$

其定义域为$(1,+\infty)$。

应当指出，函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$之间存在着这样的关系

$$f^{-1}[f(x)]=x\text{和}f[f^{-1}(x)]=x.$$

例如：$y=\log_a x$的反函数是$y=a^x$ 则：

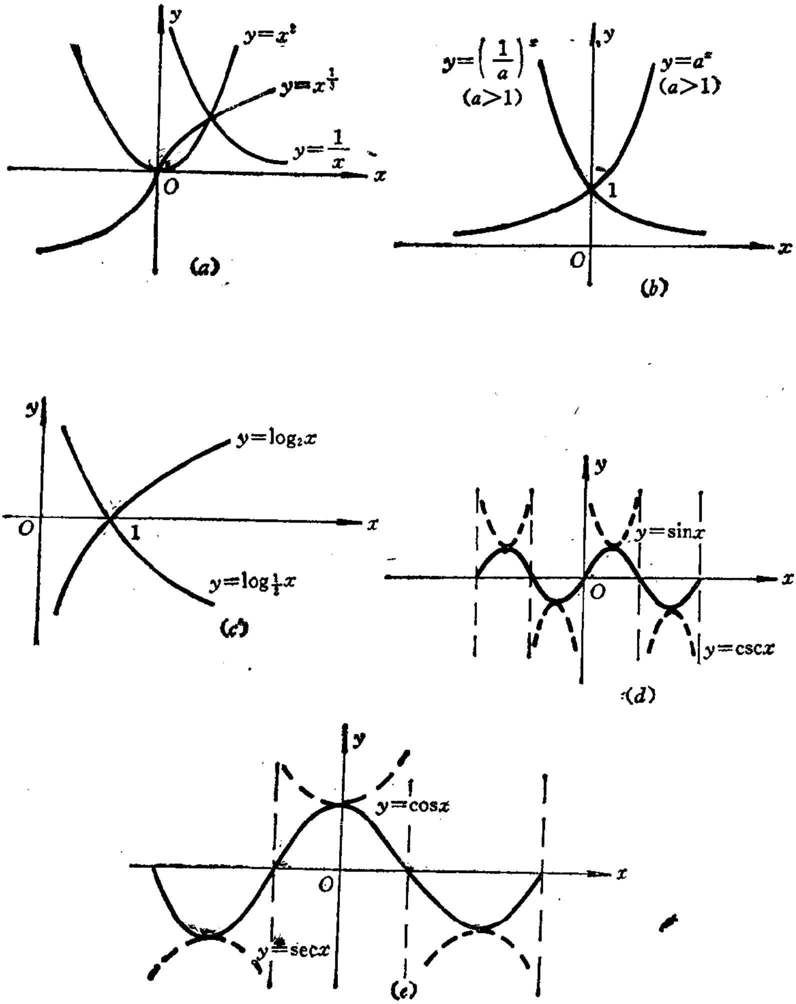
$$\log_a(a^x)=x,$$
$$a^{\log_a x}=x.$$

五 初等函数

1. 基本初等函数及其图形

读者在中学学习过的幂函数$y=x^a$（a为任意实数）；指数函数

$y=a^x(a>0$，且$a\neq1)$；对数函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq1)$；三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$和反三角函数$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$等五类函数统称为基本初等函数。它们的图形分别如图1-4所示：



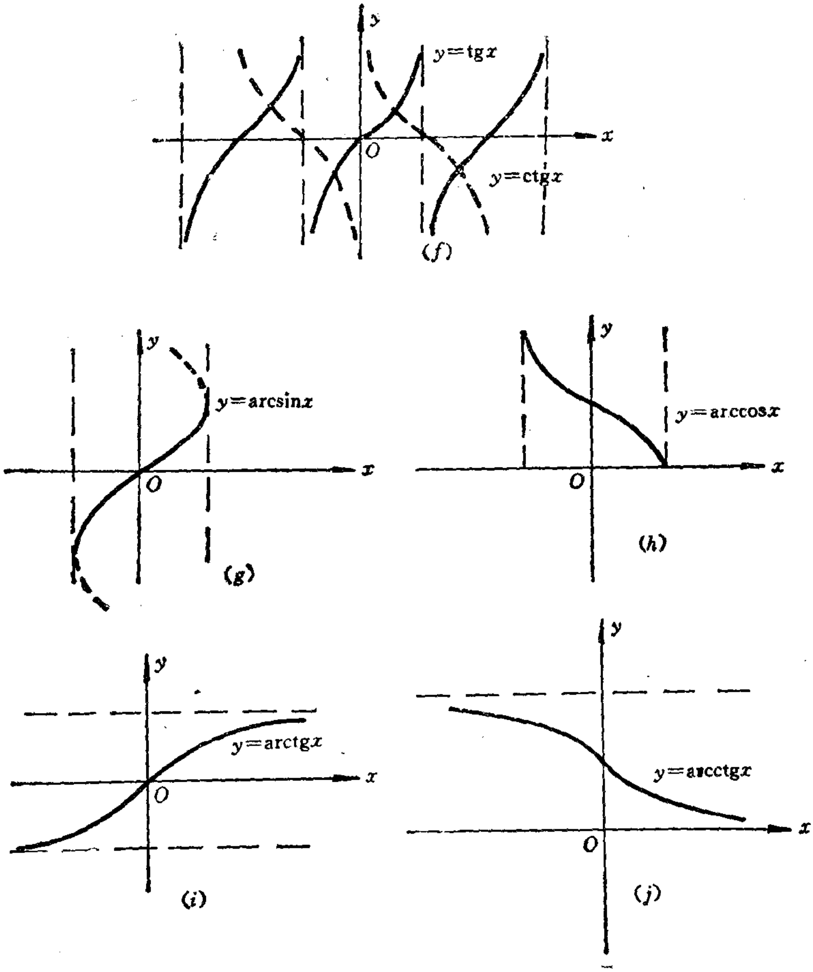


图 1-4

2. 复合函数

若函数$y=F(u)$，定义域为U_1，函数$u=\varphi(x)$的值域为U_2，其中$U_2\subseteq U_1$，则y通过变量u成为x的函数，这个函数称为由函数$y=F(u)$和函数$u=\varphi(x)$构成的复合函数，记为

$$y=F[\varphi(x)],$$

其中变量u称为中间变量。

例9 试求函数$y=u^2$与$u=\cos x$构成的复合函数。

解 将$u=\cos x$代入$y=u^2$中，即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$。

例10 试求函数$y=\sqrt{u}$与$u=1-x^2$构成的复合函数。

解 仿例9的解法，容易得到该复合函数

$$y=\sqrt{1-x^2},$$

其定义域为$[-1,1]$。

例11 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，

求$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$。

解 1° 求$f[\varphi(x)]$时，应将$f(x)$中的x视为$\varphi(x)$，因此

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{1+\sqrt{\sin x}}.$$

2° 求$\varphi[f(x)]$时，应将$\varphi(x)$中的x视为$f(x)$，因此

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\frac{1}{1+x}}.$$

例12 设$f(x-1)=x^2$，求$f(2x+1)$。

解 方法一 令$u=x-1$，得$f(u)=(u+1)^2$，再将$u=2x+1$代入，即得复合函数

$$\begin{aligned}f(2x+1)&=[(2x+1)+1]^2\\&=4(x+1)^2.\end{aligned}$$

方法二 因为$f(x-1)=x^2=[(x-1)+1]^2$，于是问题转化为求$y=f(x)=(x+1)^2$与$\varphi(x)=2x+1$的复合函数$f[\varphi(x)]$，因此

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2.$$

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数构成。比如，由函数$y=\ln u$，$u=\sin v$和$v=x^2+1$可以构成复合函数$y=\ln\sin(x^2+1)$，其中u和v都是中间变量。