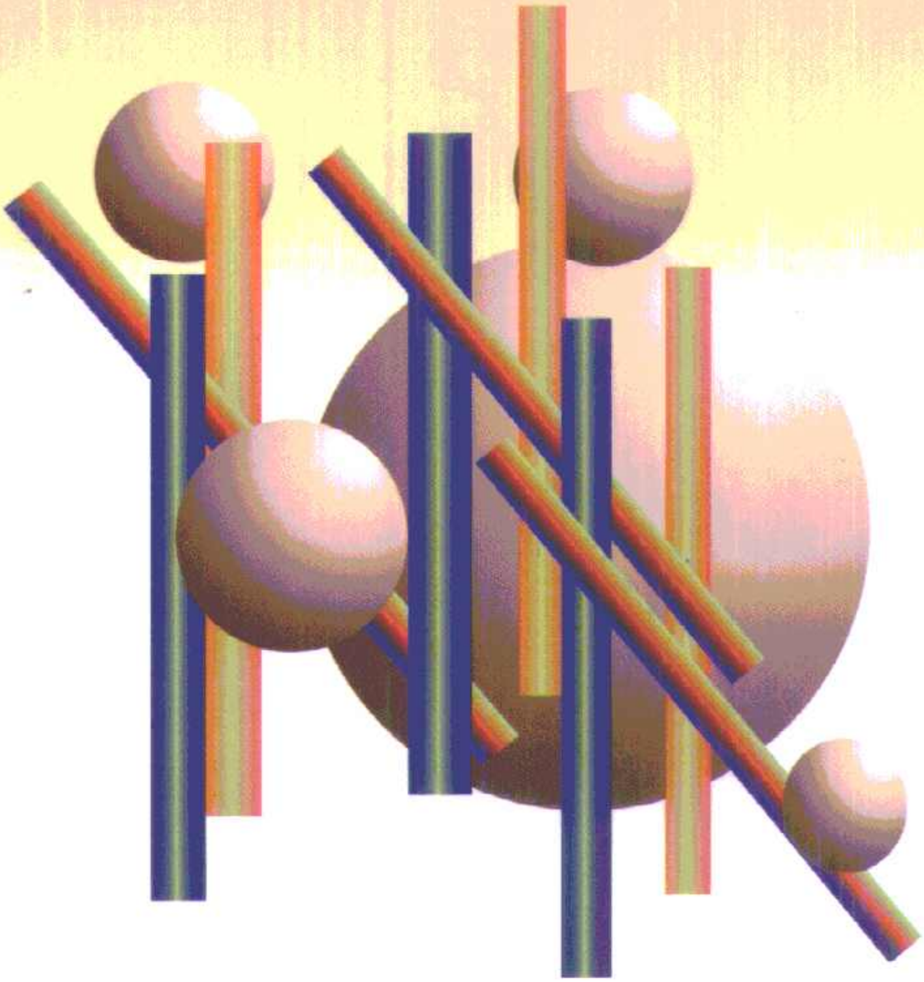
普通高等教育"九五"国家级重点教材

普通高等教育机电类规划教材

误差理论与数据处理

第4版

合肥工业大学　费业泰　主编



机械工业出版社
China Machine Press

普通高等教育"九五"国家级重点教材
普通高等教育机电类规划教材

误差理论与数据处理

第 4 版

主编　费业泰
参编　陈晓怀　秦　岚　宋明顺
　　　李桂成　许陇云
主审　陈林才

机 械 工 业 出 版 社

《误差理论与数据处理》教材，自1981年出版第1版以来，已出版3版。根据1996年10月全国高等学校仪器仪表类专业教学指导委员会第一次会议决定，《误差理论与数据处理》为测控技术与仪器（检测技术及仪器、精密仪器、光学技术与光电仪器）专业的必修课，并修订教材第4版。

本书第4版，在保持原有优秀教材特色基础上，删减和补充了部分章节及内容，以适应更多专业的教学需要。本书第4版主要讲述机械量、几何量和各种有关物理量测试技术中的静态与动态测量的误差理论与数据处理，内容包括：绪论、误差的基本性质与处理、误差的合成与分配、测量不确定度、线性参数的最小二乘法处理、回归分析、动态测试数据基本方法、动态测量误差及其评定等。各章附有习题供选用，书末有附录，为常用数据表。

本书为高等学校测控技术及仪器专业教材，也可作为机械类专业、信息类专业和其他有关专业教材，同时可供科研及生产单位的研究设计和计量测试等工程技术人员使用。

本书第2版被评为全国高校机电类专业优秀教材，本书第4版经专家评审及教育部批准为国家级重点教材。

图书在版编目（CIP）数据

误差理论与数据处理/费业泰主编．—4版．—北京：机械工业出版社，2000.5

普通高等教育机电类规划教材

ISBN 7-111-07599-4

Ⅰ．误…　Ⅱ．费…　Ⅲ．①误差理论-高等学校-教材②误差-测量-数据处理-高等学校-教材　Ⅳ．TG8

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第14032号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

责任编辑：贡克勤　版式设计：霍永明　责任校对：韩　晶

封面设计：方　芬　责任印制：何全君

中国农业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2000年5月第4版·第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·14.5印张·346千字

90 601—94 600册

定价：20.50元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前　言

根据1978年4月原第一机械工业部高等学校对口专业座谈会精神，精密仪器专业决定首次在高等学校设立《误差理论与数据处理》课程，同时决定编写我国高等学校第一本《误差理论与数据处理》教材。此后，在高等学校仪器仪表类专业教材编审委员会直接组织与指导下，确定了这门新课程的体系与内容，并制定了课程大纲和教学大纲。自1981年出版第1版教材以来，由于使用的学校多，在广泛征求各校教师意见的基础上，经过几次修订，于1987年出版第2版，1995年出版第3版。根据我国经济形势发展，为了适应拓宽专业的需要，1996年10月召开的高等学校仪器仪表类专业教学指导委员会决定，将《误差理论与数据处理》列为测控技术及仪器（检测技术与仪器、精密仪器、光学技术与光电仪器）类专业各小组的必修课，并修订教材第4版。本教材于1982获机械工业部优秀图书奖，1993年获高等学校机电类专业优秀教材奖，经专家评审，教育部于1997年批准本教材为国家级重点教材。

本书主要讲述几何量、机械量以及其他有关物理量的静态测量和动态测量的误差理论与数据处理。内容包括：误差的基本性质与处理；误差的合成与分配；测量不确定度；线性参数的最小二乘法处理；回归分析；动态测试数据处理基本方法；动态测量误差及其评定等。为了加深对本教材各章内容的理解，自第2版起增加了几个附录，供教学参考或选用。本书第4版对附录作了较多删减，仅保留必要数表。

使用本书的高等学校和专业类型皆较多，除了仪器仪表类（现为测控技术及仪器专业）各专业，还有机械类及其他有关专业，除本科外，还有部分专业硕士研究生。为了适用不同专业需要，根据高等学校仪器仪表类专业教学指导委员会决定，本课程为56学时，第4版教材在保持原教材特色基础上，除了对第3版少数不妥之处作进一步修改，使之更加精炼和更富有教材性外，删减了陈旧章节，较多地补充了新内容，其中主要有：新增第四章测量不确定度，同时删去第3版教材中第三章测量不确定度概述及原附录B关于给定实验不确定度的建议书；第五章线性参数的最小二乘法处理，在保持高斯法基本运算基础上，加强矩阵应用；第六章回归分析，删去回归正交设计，增加线性递推回归应用；第七章动态测试数据处理基本方法，删去动态测试数据处理基本步骤，增加传统谱估计法和现代谱估计法；新增第八章动态测试误差及其评定。此外，删去原附录A。

本课程是高等学校测控技术及仪器专业（原仪器仪表类专业）必修的专业基础课，通过教学学生必须掌握各章内容，相关课程需密切配合进行安排，在学习本课程前应掌握概率论与数理统计知识以及测试技术基本知识。特别是第七章传统谱估计法和现代谱估计法，由于本课程教学时数限制，教材中只能介绍几个主要内容，而不允许作更详细论述。因此学生在学习本章前需对信号分析基本知识有所了解，其他相关课程安排需与本课程教学相配合，或讲授本章时作必要的相关内容补充，否则教学上将会存在一定困难。此外，本课程是实践性较强的一门专业基础课，在进行教学时必须布置一定数量的习题并上机实践，有条件时还应安排必要的实验。

本书第 4 版由合肥工业大学费业泰主编并编写第一、二章及第三章部分内容，陈晓怀编写第三章部分内容及第四章，重庆大学秦岚编写第五章，中国计量学院宋明顺编写第六章，吉林工业大学李桂成编写第七章，上海理工大学许陇云编写第八章。此外，合肥工业大学黄强先参加全书编写的其他有关工作，吉林工业大学李娟协助第七章编写。本书主审为天津大学陈林才教授，并请北京理工大学林洪桦教授为特约审稿。

在本书前三版，哈尔滨工业大学丁振良、上海理工大学姚景风、合肥工业大学邓善熙和东南大学王明峰等教授参加编写，承担了部分编写工作。在本书各版修订工作中，中国计量科学研究院刘智敏，清华大学严普强，天津大学徐苓安，燕山大学史锦珊，华中理工大学李柱、谢铁邦，北京理工大学林洪桦、沙定国，华北航天工业学院单济涛，重庆大学廖念钊，上海交通大学张鄂、施文康，华南理工大学刘桂雄，哈尔滨科技大学王天荣，中国矿业大学潘宁，四川大学陈文章、赵世平，西安交通大学范裕健、蒋庄德，西安理工大学童竞，中南林学院徐学林，合肥工业大学黄强先等 30 余所高等院校及科研单位的教授、专家也给予了积极热情的支持与帮助，并提出了许多宝贵意见。本书被评为优秀教材和国家级重点教材，以上诸位学者做出了不同程度的贡献，在此表示感谢！

由于科学技术不断发展和编者水平所限，本书第 4 版定会存在缺点和不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

1999 年 8 月

第一章　绪　　论

第一节　研究误差的意义

人类为了认识自然与改造自然，需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究，由于实验方法和实验设备的不完善，周围环境的影响，以及受人们认识能力所限等，测量和实验所得数据和被测量的真值之间，不可避免地存在着差异，这在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得愈来愈小，但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为大量实践所证明，为了充分认识并进而减小或消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为

①正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差。

②正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

③正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济条件下，得到理想的结果。

第二节　误差的基本概念

一、误差的定义及表示法

所谓误差就是测得值与被测量的真值之间的差，可用下式表示

$$误差=测得值-真值 \tag{1-1}$$

例如在长度计量测试中，测量某一尺寸的误差公式具体形式即为

$$误差=测得尺寸-真实尺寸 \tag{1-2}$$

测量误差可用绝对误差表示，也可用相对误差表示。

（一）绝对误差

某量值的测得值和真值之差为绝对误差，通常简称为误差。

$$绝对误差=测得值-真值 \tag{1-3}$$

由式（1-3）可知，绝对误差可能是正值或负值。

所谓真值是指在观测一个量时，该量本身所具有的真实大小。量的真值是一个理想的概念，一般是不知道的。但在某些特定情况下，真值又是可知的。例如：三角形三个内角之和为180°；一个整圆周角为360°；按定义规定的国际千克基准的值可认为真值是1kg等。为

了使用上的需要，在实际测量中，常用被测的量的实际值来代替真值，而实际值的定义是满足规定精确度的用来代替真值使用的量值。例如在检定工作中，把高一等级精度的标准所测得的量值称为实际值。如用二等标准活塞压力计测量某压力，测得值为 $9000.2\mathrm{N/cm^2}$，若该压力用高一等级的精确方法测得值为 $9000.5\mathrm{N/cm^2}$，则后者可视为实际值，此时二等标准活塞压力计的测量误差为 $-0.3\mathrm{N/cm^2}$。

在实际工作中，经常使用修正值。为消除系统误差用代数法加到测量结果上的值称为修正值，将测得值加上修正值后可得近似的真值，即

$$\text{真值} \approx \text{测得值} + \text{修正值} \tag{1-4}$$

由此得

$$\text{修正值} = \text{真值} - \text{测得值} \tag{1-5}$$

修正值与误差值的大小相等而符号相反，测得值加修正值后可以消除该误差的影响，但必须注意，一般情况下难以得到真值，因为修正值本身也有误差，修正后只能得到较测得值更为准确的结果。

（二）相对误差

绝对误差与被测量的真值之比值称为相对误差，因测得值与真值接近，故也可近似用绝对误差与测得值之比值作为相对误差，即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}} \tag{1-6}$$

由于绝对误差可能为正值或负值，因此相对误差也可能为正值或负值。

相对误差是无名数，通常以百分数（%）来表示。例如用水银温度计测得某一温度为 20.3℃，该温度用高一等级的温度计测得值为 20.2℃，因后者精度高，故可认为 20.2℃ 接近真实温度，而水银温度计测量的绝对误差为 0.1℃，其相对误差为

$$\frac{0.1}{20.2} \approx \frac{0.1}{20.3} \approx 0.5\%$$

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量以及不同的物理量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定较为确切。

例如用两种方法来测量 $L_1 = 100\mathrm{mm}$ 的尺寸，其测量误差分别为 $\delta_1 = \pm 10\mu\mathrm{m}$，$\delta_2 = \pm 8\mu\mathrm{m}$，根据绝对误差大小，可知后者的测量精度高。但若用第三种方法测量 $L_2 = 80\mathrm{mm}$ 的尺寸，其测量误差为 $\delta_3 = \pm 7\mu\mathrm{m}$，此时用绝对误差就难以评定它与前两种方法精度的高低，必须采用相对误差来评定。

第一种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_1}{L_1} = \pm\frac{10\mu\mathrm{m}}{100\mathrm{mm}} = \pm\frac{10}{100000} = \pm 0.01\%$$

第二种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_2}{L_1}=\pm\frac{8\mu\mathrm{m}}{100\mathrm{mm}}=\pm\frac{8}{100000}=\pm0.008\%$$

第三种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_3}{L_2}=\pm\frac{7\mu\mathrm{m}}{80\mathrm{mm}}=\pm\frac{7}{80000}\approx\pm0.009\%$$

由此可知，第一种方法精度最低，第二种方法精度最高。

（三）引用误差

所谓引用误差指的是一种简化和实用方便的仪器仪表示值的相对误差，它是以仪器仪表某一刻度点的示值误差为分子，以测量范围上限值或全量程为分母，所得的比值称为引用误差，即

$$\text{引用误差}=\frac{\text{示值误差}}{\text{测量范围上限}} \tag{1-7}$$

例如测量范围上限为 19600N 的工作测力计（拉力表），在标定示值为 14700N 处的实际作用力为 14778.4N，则此测力计在该刻度点的引用误差为

$$\frac{14700\mathrm{N}-14778.4\mathrm{N}}{19600\mathrm{N}}=\frac{-78.4}{19600}=-0.4\%$$

二、误差来源

在测量过程中，误差产生的原因可归纳为以下几个方面：

（一）测量装置误差

1. 标准量具误差

以固定形式复现标准量值的器具，如氪 86 灯管、标准量块、标准线纹尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，它们本身体现的量值，不可避免地都含有误差。

2. 仪器误差

凡用来直接或间接将被测量和已知量进行比较的器具设备，称为仪器或仪表，如阿贝比较仪、天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表，它们本身都具有误差。

3. 附件误差

仪器的附件及附属工具，如测长仪的标准环规，千分尺的调整量棒等的误差，也会引起测量误差。

（二）环境误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压（引起空气各部分的扰动）、振动（外界条件及测量人员引起的振动）、照明（引起视差）、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规

定的正常工作条件所具有的误差称为基本误差，而超出此条件时所增加的误差称为附加误差。

（三）方法误差

由于测量方法不完善所引起的误差，如采用近似的测量方法而造成的误差，例如用钢卷尺测量大轴的圆周长 s，再通过计算求出大轴的直径 $d=s/\pi$，因近似数 π 取值的不同，将会引起误差。

（四）人员误差

由于测量者受分辨能力的限制，因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化，固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等所引起的误差。

总之，在计算测量结果的精度时，对上述四个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

三、误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、随机误差（也称偶然误差）和粗大误差三类。

（一）系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。

例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

系统误差又可按下列方法分类：

1. 按对误差掌握的程度分

已定系统误差是指误差绝对值和符号已经确定的系统误差。

未定系统误差是指误差绝对值和符号未能确定的系统误差，但通常可估计出误差范围。

2. 按误差出现规律分

不变系统误差是指误差绝对值和符号为固定的系统误差。

变化系统误差是指误差绝对值和符号为变化的系统误差。按其变化规律，又可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

（二）随机误差

在同一测量条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差称为随机误差。

例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的弹性变形等引起的示值不稳定。

（三）粗大误差

超出在规定条件下预期的误差称为粗大误差，或称“寄生误差”。此误差值较大，明显歪曲测量结果，如测量时对错了标志、读错或记错了数、使用有缺陷的仪器以及在测量时因操作不细心而引起的过失性误差等。

上面虽将误差分为三类，但必须注意各类误差之间在一定条件下可以相互转化。对某项具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为随机误差，反之亦然。如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差，对某一块量块的制造误差是确定数值，可认为是系统

误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又成为随机误差。在使用某一量块时，没有检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用，则制造误差属随机误差。若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响；或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和随机误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来作为系统误差处理，或把某些系统误差当作随机误差来处理。

第三节　精　　度

反映测量结果与真值接近程度的量，称为精度，它与误差的大小相对应，因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高，误差大则精度低。

精度可分为

1）准确度　它反映测量结果中系统误差的影响程度。

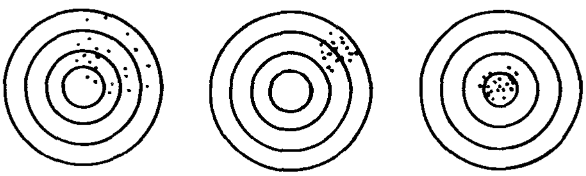
2）精密度　它反映测量结果中随机误差的影响程度。

3）精确度　它反映测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度，其定量特征可用测量的不确定度（或极限误差）来表示。

精度在数量上有时可用相对误差来表示，如相对误差为0.01%，可笼统说其精度为10^{-4}，若纯属随机误差引起，则说其精密度为10^{-4}，若是由系统误差与随机误差共同引起，则说其精确度为10^{-4}。

对于具体的测量，精密度高的而准确度不一定高，准确度高的而精密度也不一定高，但精确度高，则精密度与准确度都高。

如图1－1所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况，图1－1a的系统误差小而随机误差大，即准确度高而精密度低。图1－1b的系统误差大而随机误差小，即准确度低而精密度高。图1－1c的系统误差与随机误差都小，即精确度高，我们希望得到精确度高的结果。



a)　　b)　　c)

图　1－1

误差来源、分类和精度评定的系统图见图1－2。

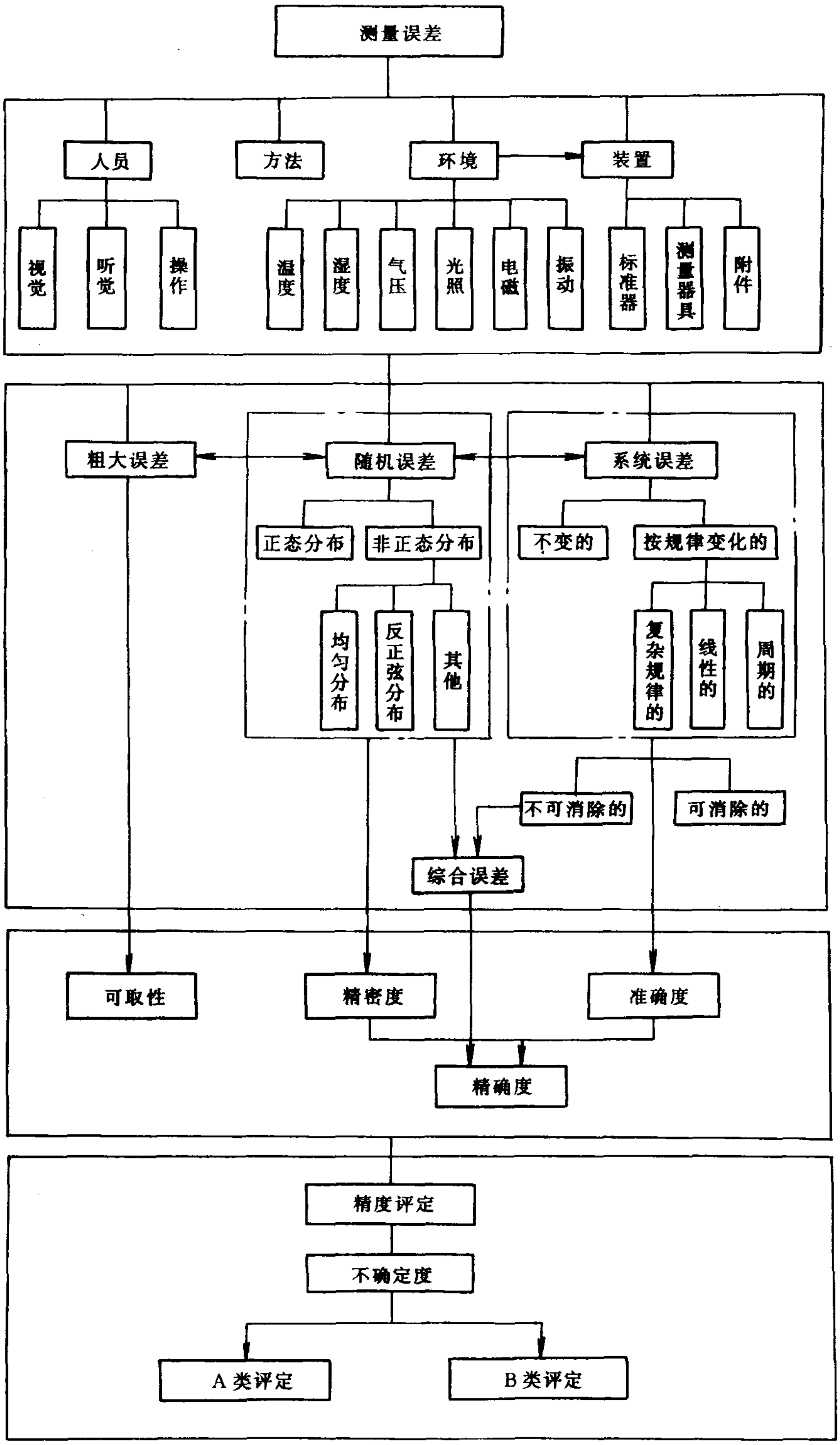

测量误差
人员
方法
环境
装置
视觉
听觉
操作
温度
湿度
气压
光照
电磁
振动
标准器
测量器具
附件
粗大误差
随机误差
系统误差
正态分布
非正态分布
不变的
按规律变化的
均匀分布
反正弦分布
其他
复杂规律的
线性的
周期的
不可消除的
可消除的
综合误差
可取性
精密度
准确度
精确度
精度评定
不确定度
A 类评定
B 类评定

图 1-2

第四节　有效数字与数据运算

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量或数据运算的结果，是一个十分重要的问题。测量结果既然包含有误差，说明它是一个近似数，其精度有一定限度，在记录测量结果的数据位数或进行数据运算时的取值多少时，皆应以测量所能达到的精度为依据。如果认为，不论测量结果的精度如何，在一个数值中小数点后面的位数愈多，这个数值就愈精确；或者在数据运算中，保留的位数愈多，精度就愈高，这种认识都是片面的。若将不必要的数字写出来，既费时间，又无意义。一方面是因为小数点的位置决定不了精度，它仅与所采用的单位有关，如 35.6mm 和 0.0356m 的精度完全相同，而小数点位置则不同。另一方面，测量结果的精度与所用测量方法及仪器有关，在记录或数据运算时，所取的数据位数，其精度不能超过测量所能达到的精度；反之，若低于测量精度，也是不正确的，因为它将损失精度。此外，在求解方程组时，若系数为近似值，其取值多少对方程组的解有很大影响。例如，下面的方程组（a）和（b）及其对应解为

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-1.0001y=0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{cases} x=10001 \\ y=10000 \end{cases} \tag{a}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-0.9999y=0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{cases} x=-9999 \\ y=-10000 \end{cases} \tag{b}$$

两个方程组仅有一个系数相差万分之二，但所得结果差异极大，由此也可看出研究有效数字和数据运算规则的重要性。

一、有效数字

含有误差的任何近似数，如果其绝对误差界是最末位数的半个单位，那么从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字止的所有数字，不论是零或非零的数字，都叫有效数字。若具有 n 个有效数字，就说是 n 位有效位数。例如取 $\pi=3.14$，第一位有效数字为 3，共有三位有效位数；又如 0.0027，第一位有效数字为 2，共有两位有效位数；而 0.00270，则为三位有效位数。

若近似数的右边带有若干个零的数字，通常把这个近似数写成 $a\times10^n$ 形式，而 $1\leqslant a<10$。利用这种写法，可从 a 含有几个有效数字来确定近似数的有效位数。如 2.400×10^3 表示四位有效位数；2.40×10^3 和 2.4×10^3，分别表示三位和两位有效位数。

在测量结果中，最末一位有效数字取到哪一位，是由测量精度来决定的，即最末一位有效数字应与测量精度是同一量级的。例如用千分尺测量时，其测量精度只能达到 0.01mm，若测出长度 $l=20.531$mm，显然小数点后第二位数字已不可靠，而第三位数字更不可靠，此时只应保留小数点后第二位数字，即写成 $l=20.53$mm，为四位有效位数。由此可知，测量结果应保留的位数原则是：其最末一位数字是不可靠的，而倒数第二位数字应是可靠的。测量误差一般取 1～2 位有效数字，因此上述用千分尺测量结果可表示为 $l=(20.53\pm0.01)$mm。

在比较重要的测量时，测量结果和测量误差可比上述原则再多取一位数字作为参考，如测量结果可表示为 15.214 ± 0.042。因此，凡遇有这种形式表示的测量结果，其可靠数字为倒数第三位数字，不可靠数字为倒数第二位数字，而最后一位数字则为参考数字。

二、数字舍入规则

对于位数很多的近似数，当有效位数确定后，其后面多余的数字应予舍去，而保留的有效数字最末一位数字应按下面的舍入规则进行凑整：

①若舍去部分的数值，大于保留部分的末位的半个单位，则末位加 1 。

②若舍去部分的数值，小于保留部分的末位的半个单位，则末位不变。

③若舍去部分的数值，等于保留部分的末位的半个单位，则末位凑成偶数。即当末位为偶数时则末位不变，当末位为奇数时则末位加 1。

例如，按上述舍入规则，将下面各个数据保留四位有效数字进行凑整。

原有数据	舍入后数据
3.14159	3.142
2.71729	2.717
4.51050	4.510
3.21550	3.216
6.378501	6.379
7.691499	7.691
5.43460	5.435

由于数守舍入而引起的误差称为舍入误差，按上述规则进行数字舍入，其舍入误差皆不超过保留数字最末位的半个单位。必须指出，这种舍入规则的第 3 条明确规定，被舍去的数字不是见 5 就入，从而使舍入误差成为随机误差，在大量运算时，其舍入误差的均值趋于零。这就避免了过去所采用的四舍五入规则时，由于舍入误差的累积而产生系统误差。

三、数据运算规则

在近似数运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，所有参与运算的数据，在有效数字后可多保留一位数字作为参考数字，或称为安全数字。

①在近似数加减运算时，各运算数据以小数位数最少的数据位数为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据小数位相同。

例如，求$2643.0+987.7+4.187+0.2354=?$

$$\begin{aligned}2643.0+987.7+4.187+0.2354 &\approx 2643.0+987.7+4.19+0.24\\ &=3635.13\approx 3635.1\end{aligned}$$

②在近似数乘除运算时，各运算数据以有效位数最少的数据位数为准，其余各数据要比有效位数最少的数据位数多取一位数字，而最后结果应与有效位数最少的数据位数相同。

例如，求 $15.13\times 4.12=?$

$$15.13\times 4.12=62.3356\approx 62.3$$

③在近似数平方或开方运算时，平方相当于乘法运算，开方是平方的逆运算，故可按乘除运算处理。

④在对数运算时，n 位有效数字的数据应该用 n 位对数表，或用（$n+1$）位对数表，以免损失精度。

⑤三角函数运算中，所取函数值的位数应随角度误差的减小而增多，其对应关系如下表所示。

角度误差	10″	1″	0.1″	0.01″
函数值位数	5	6	7	8

以上所述的运算规则，都是一些常见的最简单情况，但实际问题的数据运算皆较复杂，往往一个问题要包括几种不同的简单运算，对中间的运算结果所保留的数据位数可比简单运算结果多取一位数字。

习　题

1-1　测得某三角块的三个角度之和为 180°00′02″，试求测量的绝对误差和相对误差。

1-2　在万能测长仪上，测量某一被测件的长度为 50mm，已知其最大绝对误差为 1μm，试问该被测件的真实长度为多少？

1-3　用二等标准活塞压力计测量某压力得 100.2Pa，该压力用更准确的办法测得为 100.5Pa，问二等标准活塞压力计测量值的误差为多少？

1-4　在测量某一长度时，读数值为 2.31m，其最大绝对误差为 20μm，试求其最大相对误差。

1-5　使用凯特摆时，g 由公式$g=4\pi^2(h_1+h_2)/T^2$ 给定。今测出长度(h_1+h_2)为(1.04230 ± 0.00005)m，振动时间 T 为(2.0480 ± 0.0005)s。试求 g 及其最大相对误差。如果(h_1+h_2)测出为(1.04220 ± 0.0005)m，为了使 g 的误差能小于 0.001m/s^2，T 的测量必须精确到多少？

1-6　检定 2.5 级（即引用误差为 2.5%）的全量程为 100V 的电压表，发现 50V 刻度点的示值误差 2V 为最大误差，问该电压表是否合格？

1-7　为什么在使用微安表等各种电表时，总希望指针在全量程的 2/3 范围内使用？

1-8　用两种方法测量 $L_1=50$mm，$L_2=80$mm。分别测得 50.004mm，80.006mm。试评定两种方法测量精度的高低。

1-9　多级弹导火箭的射程为 10000km 时，其射击偏离预定点不超过 0.1km，优秀射手能在距离 50m 远处准确地射中直径为 2cm 的靶心，试评述哪一个射击精度高？

1-10　若用两种测量方法测量某零件的长度 $L_1=110$mm，其测量误差分别为 $\pm11\mu$m 和 $\pm9\mu$m；而用第三种测量方法测量另一零件的长度 $L_2=150$mm，其测量误差为 $\pm12\mu$m，试比较三种测量方法精度的高低。

第二章　误差的基本性质与处理

任何测量总是不可避免地存在误差，为了提高测量精度，必须尽可能消除或减小误差，因此有必要对各种误差的性质、出现规律、产生原因、发现与消除或减小它们的主要方法以及测量结果的评定等方面，作进一步的分析。

第一节　随 机 误 差

一、随机误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量时，得到一系列不同的测量值（常称为测量列），每个测量值都含有误差，这些误差的出现又没有确定的规律，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就误差的总体而言，却具有统计规律性。

随机误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素所构成，主要有以下几方面：

(1) 测量装置方面的因素　零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

(2) 环境方面的因素　温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。

(3) 人员方面的因素　瞄准、读数的不稳定等。

二、正态分布

若测量列中不包含系统误差和粗大误差，则该测量列中的随机误差一般具有以下几个特征：

①绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等，这称为误差的对称性。

②绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，这称为误差的单峰性。

③在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定界限，这称为误差的有界性。

④随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零，这称为误差的抵偿性。

最后一个特征可由第一特征推导出来，因为绝对值相等的正误差和负误差之和可以互相抵消。对于有限次测量，随机误差的算术平均值是一个有限小的量，而当测量次数无限增大时，它趋向于零。

服从正态分布的随机误差均具有以上四个特征。由于多数随机误差都服从正态分布，因而正态分布在误差理论中占有十分重要的地位。

设被测量的真值为 L_0，一系列测得值为 l_i，则测量列中的随机误差 δ_i 为

$$\delta_i = l_i - L_0 \tag{2-1}$$

式中　$i=1, 2, \cdots, n$。

正态分布的分布密度 $f(\delta)$ 与分布函数 $F(\delta)$ 为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2/(2\sigma^2)} \tag{2-2}$$

$$F(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta}e^{-\delta^2/(2\sigma^2)}d\delta \tag{2-3}$$

式中　σ——标准差（或均方根误差）；

　　　e——自然对数的底，其值为 2.7182…。

它的数学期望为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\delta f(\delta)d\delta=0 \tag{2-4}$$

它的方差为

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 f(\delta)d\delta \tag{2-5}$$

其平均误差为

$$\theta=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta|f(\delta)d\delta=0.7979\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{2-6}$$

此外由

$$\int_{-\rho}^{\rho}f(\delta)d\delta=\frac{1}{2}$$

可解得或然误差为

$$\rho=0.6745\sigma\approx\frac{2}{3}\sigma \tag{2-7}$$

图 2-1 为正态分布曲线以及各精度参数在图中的坐标。σ 值为曲线上拐点 A 的横坐标，θ 值为曲线右半部面积重心 B 的横坐标，ρ 值的纵坐标线则平分曲线右半部面积。

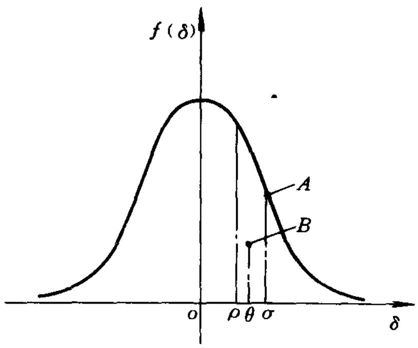


图 2-1

三、算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量，由于存在随机误差，其测得值皆不相同，应以全部测得值的算术平均值作为最后测量结果。

(一) 算术平均值的意义

在系列测量中，被测量的 n 个测得值的代数和除以 n 而得的值称为算术平均值。

设 l_1，l_2，…，l_n 为 n 次测量所得的值，则算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n} \tag{2-8}$$

算术平均值与被测量的真值最为接近，由概率论的大数定律可知，若测量次数无限增加，则算术平均值 $\bar{x}$ 必然趋近于真值 L_0。

由式（2-1）求和得

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n=(l_1+l_2+\cdots+l_n)-nL_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \sum_{i=1}^{n} l_i - nL_0$$

$$L_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}$$

根据正态分布随机误差的第四特征可知：

当 $n \to \infty$ 时，有 $\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n} \to 0$，所以

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \to L_0$$

由此可见，如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值，或其影响甚微，可予忽略。这就是当测量次数无限增大时，算术平均值（数学上称之为最大或然值）被认为是最接近于真值的理论依据。由于实际上都是有限次测量，我们只能把算术平均值近似地作为被测量的真值。

一般情况下，被测量的真值为未知，不可能按式（2－1）求得随机误差，这时可用算术平均值代替被测量的真值进行计算，则有

$$v_i = l_i - \bar{x} \tag{2-9}$$

式中 l_i——第 i 个测得值，$i = 1, 2, \cdots, n$；

v_i——l_i 的残余误差（简称残差）。

如果测量列中的测量次数和每个测量数据的位数皆较多，直接按式（2－8）计算算术平均值，既繁琐，又容易产生错误，此时可用简便法进行计算。

任选一个接近所有测得值的数 l_0 作为参考值，计算出每个测得值 l_i 与 l_0 的差值

$$\Delta l_i = l_i - l_0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

因

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \qquad \Delta\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i}{n}$$

则

$$\bar{x} = l_0 + \Delta\bar{x}_0 \tag{2-10}$$

式中的 $\Delta\bar{x}_0$ 为简单数值，很容易计算，因此按式（2－10）求算术平均值比较简便。

例 2－1 测量某物理量 10 次，得到结果见表 2－1，求算术平均值。

表 2－1

序 号	l_i	Δl_i	v_i
1	1879.64	−0.01	0
2	1879.69	+0.04	+0.05
3	1879.60	−0.05	−0.04
4	1879.69	+0.04	+0.05
5	1879.57	−0.07	−0.07
6	1879.62	−0.03	−0.02