马文 编

重庆大学出版社

概率应用及思维方法

概率应用及思维方法

马　文　编

重 庆 大 学 出 版 社

概率应用及思维方法

马 文 编

责任编辑 李长惠 刘茂林

●

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆建筑专科学校印刷厂印刷

●

开本：787×1092 1/32 印张：6.625 字数：149千

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数：1—3,300

标准书号：$\frac{\text{ISBN 7-5624-0228-0}}{\text{O·33}}$ 定价：1.21元

前言

本质上不同于确定性现象的非确定性现象——随机现象，广泛地存在于现实生活与科学研究之中。概率论正是对随机现象的统计规律进行演绎研究的数学学科。这是一门兼具理论性与应用性特征的数学分支。本书从应用入手，利用所学的理论去研究形形色色的实际问题，力图使读者在应用中去熟悉和掌握研究随机现象的基本思想，原理和方法；在种类繁多的应用问题中学会使用这些工具和概念，以培养和提高分析问题和解决问题的能力。

本书从随机现象的本质探讨开始，在简要地复习了概率计算的若干方法后，即转入实际问题的研究。从概率论自身理论的应用到向其它学科的渗透，从日常生活的体验和感受到典型问题的归纳，凡涉及之处皆作了详尽的分析和处理，以期使读者在兼备“学者型人才”及“实业(工程)型人才”的学识品格上能略尽薄力。

由于笔者涉猎不深，远未能遍尝百味之鲜，在应用的深度与广度上总似有挂一漏万之感，不妥之处敬请读者批评指正。

编　者

一九八七年十月

目　　录

第一章　随机现象的研究

那种条件一定，某一结果就必然出现的试验或现象，我们已见得很多。如“上抛之硬币，一定要往下掉，”“同性电荷相斥，异性电荷相吸”等等。其基本特点是根据已知的事实，就能推断或预言它的某一必然结果。这是受某种确定性规律所支配的。但是在现实生活及科学研究之中，还广泛地存在本质上完全不同的另一类试验或现象。如“抛掷硬币”这一试验，明知落地有正面（金额面）朝上或反面（国徽面）朝上两种情况，但在一次抛掷前却不能断言其具体结果；就是多次试验，相应结果（事件）能以什么不同的形式出现虽然相当明确，但其相继出现的先后次序却杂乱无章，纯属偶然。虽则如此，但就同一现象，如“正面朝上”的任何两个长期记录来比较，所占总试验次数的成分比例之间却常有惊人的类似——与0.5没有大的偏离！又如在一定条件下，射击中的环数可能有什么结果是相当明确的(零至10环)。但一次射击前却不能断言其具体结果；就是多次射击，虽然相应的结果在什么范围内变化是“胸中有数”，但产生的环数却缺乏前后一贯的序列规则。如果射击的条件不变，就“射中某一环”的同一现象而论，在其总射击次数中所占成份的比例却呈现某种稳定性。也就是说，这些试验或现象，在一定条件下，具有多种可能的结果（当然都是确定的），但事先皆不能肯定究竟会发生什么结果，似乎看不出有什么规律可循，但是“大数次”地重复这个试验，就会发现试验

结果会遵循某种宏观的、刻划总体“行为”的统计规律。（“统计”一词不仅以区别于过去涉及的确定性现象的确定性规律，也反映了“非确定性”规律的认识过程，当然此类规律本身也是客观存在的。）具有上述特点的现象，称之为随机现象。

某一“统计规律”刻划了一同某类随机现象总体规律的客观属性，是该类随机现象的集体性状的反映。如“某疾病的死亡率为0.3”就描述了该类疾病的患者全体“预后”情况的总体规律，是死亡比例成份之测度。它反映了这类集体现象的一种客观规律性。而决不能针对患此种疾病的某个具体的病人去断言其“三分死，七分不死”的状况。个别事例不是发生，就是不发生，按逻辑排中律是不可能有第三种情况出现的。对个别事例去谈统计规律是没有客观意义的，这只能反映说话人对该事例的主观臆测态度。

如何去研究随机现象本身所遵从的统计规律？如何把对随机现象的研究纳入数学定量研究的轨道？这得从如何用数学化语言去描述随机试验入手——抽出随机试验的数学本质，建立适当的数学模型，以便对随机现象进行公理化演绎的研究。

随机试验的每一个可能的结果称作基本事件。基本事件的全体称作样本空间，一般记作Ω。视Ω为一个集合，则基本事件就是其中一个点（或元素）。对一个具体的随机试验，如何用一个恰当的样本空间去描述与其结果相应的“几何结构”有一定的技巧。通过适量的练习，定会有所体会。例如，假设甲、乙二人抛掷钱币，以先掷出正面者为胜，如果让甲先掷，我们来观察这种比赛（试验），它可能会出现

哪些结果？若以“正”表示掷出正面，以“反”表示掷出反面，则可能产生的结果为

$$\begin{cases} \omega_1 = \text{正}; \\ \omega_2 = \text{反正}; \\ \omega_3 = \text{反反正}; \\ \cdots\cdots \\ \omega_n = \underbrace{\text{反反}\cdots\cdots\text{反}}_{(n-1)\text{个反}}\text{正}; \\ \cdots\cdots \\ \omega_\infty = \text{反反反}\cdots\cdots \end{cases}$$

ω_1 是甲掷出正面而结束比赛（试验）的情形；ω_2 是甲掷出反面，乙掷出正面而结束“试验”的情形；ω_n 是直到第 $n-1$ 次为止二人都掷出反面，在第 n 次才掷出正面而结束“试验”的情形。（因此可由 n 的奇偶来决定甲或者乙的获胜）。最后，ω_∞ 是甲、乙双方老是掷出反面的情形，这时“试验”将无限制地继续下去。由于 ω_1，ω_2，……，ω_∞ 是该“试验”的一切可能的结果，其全体所构成的集合 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_\infty\}$ 就是相应于该“试验”的样本空间。

出于实际的背景及理论研究的需要，我们不只是去考查基本事件，还得关心具有某些特征的基本事件类。例如上述甲、乙投掷硬币，以先掷出正面者为胜的试验中，“甲获胜”就不是一个基本事件。由于 ω_n 表示直到第 $n-1$ 次为止，二人都掷出反面，在第 n 次才掷出正面而试验结束。按甲先掷的规定，知 n 为奇数时就是甲获胜的场合，因此

$$\text{甲获胜} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \cdots, \omega_{2k+1}, \cdots\cdots\} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

从集合论的观点看，这正是样本空间中某一个确定的子集，相对于基本事件被称作复杂事件。两者统称为随机事件。事件与子集的类比，把集合论这一数学工具引进了随机现象研究的领域。集合与集合之间的关系在某种意义上也刻划了事件与事件之间的关系，从而提供了可通过对比较简单事件的统计规律研究进而去掌握更复杂事件的统计规律性研究的重要途径。这由样本空间还需具有确定的代数结构所体现。如上述样本空间

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n,\ \cdots,\ \omega_\infty\}$$

中，不仅应考虑 Ω 所包含的每个“单点” ω_i，而且还应考虑包含一切子集全体的集族。

对随机现象的研究要落实到认识有关随机事件发生的可能性大小上。随机事件在随机试验中发生与否带有随机性，但是通过“大数次”重复试验，该事件的发生与否就总体性态而言的统计规律，通过频率的稳定性而客观地被揭示，这为通过数量指标去刻划随机事件发生可能性大小的统计规律提供了重要的本质背景。我们把随机事件 A 发生的可能性大小的数值度量，称为事件 A 发生的概率，並记为 $P(A)$；这类比于线段之长度，平面封闭图形之面积，空间封闭几何体之体积的测度属性，从而概率被赋予集合测度的内涵。于是测度论这一数学工具也进入了随机现象研究的领域。

至此，随机试验被抽象为一个具有特定几何与代数结构，並在其上（实指其事件体上）定义了一个满足特定条件的集合函数的概率空间（ $\Omega,\ \mathfrak{F},\ P$ ）。我们正是通过对概率空间的性质研究，从而完成了对随机现象的公理化演绎研究任务的。

第二章　概率计算准备

随机现象统计规律的研究与实际问题之联系，往往可通过对所关心的随机事件发生的可能性大小的数量指标，在相应问题的预测、估计、安排、调配上作出相应的决策，从而能自觉遵照客观规律办事，以期能取得最佳效益。

例　某车间有200台车床，由于工艺要求和随机因素的影响，每台有60%的时间开动，而每台车床开动时，需耗电1千瓦。问应供多少电力，才能保证此车间正常生产？

所谓车间正常生产，是指不因供电不足而使车床停止工作，换言之，因调换加工零件，测试尺寸，车床故障或工人临时停车等随机因素导致的车床停车属于车间正常生产范畴。明显地，控制工作着的车床最高台数，是决定供电多少的依据。而这200台车床中正常工作的状况（通过同时工作的台数来表示）是一随机现象，工作着的车床最高台数是我们所关心的事件。不掌握这个事件发生的可能性大小的数量指标，就不便控制供应电力的数量，以保证正常生产。事实上，只要保证不能正常生产的可能性小于0.1%（即8小时中，一般约有30s的时间可能会出现因供电不足而停车），经计算，供电141千瓦就够了。（供多了造成电力浪费，供少了又影响正常生产。）

由于随机事件发生概率的客观存在性，要利用它，我们就得先认识它，理解它。当然，我们决不能依凭自己的主观意识去随意改变它，而只能是承认它，尊重它！虽然直接估

计或计算一随机事件的概率，有时非常困难，甚至是不可能的，仅在比较特殊的情况下才可以直接计算出随机事件的概率。但作为应用的纽带，我们还是有必要在概率计算上提供适当的工具准备。

第一节　古典概率计算

一　古典概率计算的基本方法

通过初等计算而获得随机事件的概率，对一类特殊的，简单的概率模型是能够办到的。古典概型就是这样一类特殊的概率空间。其基本事件有限，且等可能；从而推知，如"A"是一随机事件，则

$$P(A)=\frac{\text{对}A\text{有利的基本事件数}\,m}{\text{基本事件总数}\,n}$$

（某基本事件对"A"有利，乃指其发生必导致"A"的发生。）上述公式有广泛的适应性，它适用于一切古典概型中随机事件的概率计算。但该公式本身并没有提供对某一具体问题求出其基本事件总数 n 及有利于所关心事件的基本事件数m的任何具体的方法。因此，古典概率计算中，"具体情况，具体分析"所呈现出来的灵活性，技巧性，往往使初学者深感困难。但灵活性，技巧性理所当然地也要受到某种共性的约束。事实上，在具体问题的处理中，"思维框架"遵循一定的模式，这无疑是有好处的：

1．问题所涉及的随机试验是什么？

2．试验的基本结果是什么？互斥否？等可能否？样本空间如何确定？

3． 如何根据题设条件去区分两个不同的基本事件？

4． 在能区分不同基本事件的前提下，分析基本事件的数学结构。如果可能，可作图形象表达，以求 n。

5． 所关心的事件是什么？如何由基本事件所构造？如果可能，可作图形象表达其数学结构，或者解剖复杂事件而化整为零，或反面思考间接处理，以求 m。

例（生日问题） 某年级有 n 个人（$n \leqslant 365$），问至少有两个人的生日在同一天的概率有多大？

试验是对人数为 n 的年级进行生日调查。

试验的基本结果是 n 个人生日的一种具体分布，由于生日出现的随机性，保证了 n 个生日种种分布的等可能性。

基本事件的数学结构——构造性处理：把 365 天设想当作 365 个“房间”，然后按 n 个人的生日“对号入室”。这相当 n 个可辨质点的每一个都以相同的概率，等可能地被分配到某一“室”内。形象示意图如：

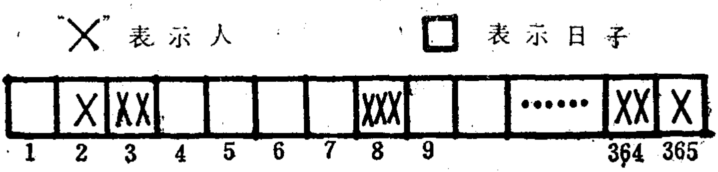

图 2.1

基本结果总数就是把 n 个人安排进这 365 个“房间”的所有可能的不同方法数。基本结果的差异不仅依“人”、依“房”，而且还依“房”内的“人数”相鉴别。因而基本事件总数恰为从 365 个不同元素中每次取出 n 个的允许重复的排列种数 365^n(*)。

所关心的事件A＝“至少有两个人的生日在同一天”

＝有两个人的生日在同一天$\cup$有三个人的生日在同一天$\cup$……$\cup$ n个人的生日在同一天。

这是一个比较复杂的事件，我们宁可从反面去考虑原事件的逆事件$\overline{A}$的结构：

$\overline{A}$＝任意两个人的生日不在同一天

＝n个人的生日全不相同

＝恰有n个“房”，其中各住一“人”

＝365个不同元素，每次任取n个依一定的顺序排成一列

这样就抓住了事件$\overline{A}$的数学结构的本质，从而知对$\overline{A}$有利的基本事件数为$C_{365}^{n}\cdot n!$。

由互逆事件的概率关系，即知：

$$P(A)=1-\frac{C_{365}^{n}\cdot n!}{365^{n}}=1-\frac{365!}{365^{n}\cdot(365-n)!}$$

总之，一抓样本空间的确定，二抓事件的构造性处理——与典型数学问题挂钩，再针对具体的数学结构，采用相应数学工具完成m，n的计算。

二　乘、加原理的思维特征

古典概率计算中，试验的结果总数及有利于所关心事件的结果数的计算，得从试验结果的相应数学结构研究入手。

(*)：利用乘法原理这是容易理解的。

如从“盛有α个白球和β个黑球的箱子中任取出$\gamma(\leqslant \alpha+\beta)$个球”的试验看，一个基本结果恰相当于从$\alpha+\beta$个不同元素中任取出一组$\gamma$个元素的一次具体安排，恰与组合问题有相同的数学结构。如果所关心的事件是取出的γ个球中恰有a个白球（$a\leqslant\alpha$），b个黑球（$b\leqslant\beta$），其结构较基本事件又具有新的要求，对这个复杂的“任务”可剖析为两个依次连续完成的分任务：设想先从α个白球中取出a个，再在β个个黑球中取出b个，联合在一起，就完成了总任务。

试验“7张电影票，10人依次轮流拈阄”的一个基本结果，相当于10个元素的一次有序排列，即基本事件的数学结构研究与全排列问题挂上了钩。如果关心“第k个人中阄”，此事件的结构比基本事件的结构又多了新的条件。这个较复杂的任务仍可模仿上述“化整为零”来处理：先设想从7个表示“有票”的阄中任取一个摆在第k个位置上，然后让所余9个阄在除去第k个位置外的9个位置上作全排列，此两步骤相继完成后，总任务也就完成了。图如：

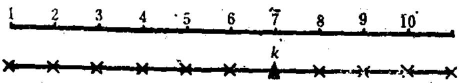

图 2.2

（在第k个位置先安排“有票阄$_{\triangle}$”，再安排余下的“阄$_{\bullet}$”）

在研究基本事件与所关心事件的数学结构过程中，所涉及的，“化整为零”，“积零为整”的思维方式，恰是组合数学中乘法原理和加法原理的体现。从而求m，n任务的基本方法可归纳为：

1） 通过图示形象表达或抽象设想，探明事件的组成结构。

2） 对事件的结构进行构造性数学处理，或直接与数学问题（排列，组合及其它）挂钩，或化整为零，各局部与有关数学问题挂钩后，再由乘法原理或加法原理积零为整，完成总的构造任务，或反面考虑利用减法原理完成其构造。

乘法原理的本质在于对复杂总任务作出的横断阶段性，相继性剖分，有如一条链子，各个环节是完整的板块，不容再分，环与环之间“缝合”在一起就完成了链的构造；而加法原理的本质在于对复杂总任务作出的纵、剖平行性，独立无关性剖分，有如把一条电缆内部的各条独立线路分开。后者的剖分，直观性较强，不易出现思维上的漏洞（注意全面及完整性），但乘法原理因使用不当而导致错误却鲜为人知。为避免这种思维上的错误，特作较为深入的讨论。

在探索复杂事件与简单事件关系的时候，乘法原理给我们提供了重要的思维手段，它有助于了解事件的构造层次，完成由复杂到简单，再由简单到复杂的转化。事实上，我们要完成一项复杂的总任务，往往可通过依次相继完成 n（$n\geqslant 2$）个较简单的分任务而大功告成。並且，如完成第一个分任务有 m_1 种方法，在完成第一个分任务后，再完成第二个分任务时又有 m_2 种方法……在完成前 $n-1$ 个分任务以后，再完成第 n 个分任务时又有 m_n 种方法，则完成总任务有

$$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots m_n \quad \text{种不同的方法。}$$

这种化整为零，化难为易的方法，反映了正确思维的过程，为很多较复杂问题的解决提供了行之有效的途径。但是

对一个具体问题，关键在能否正确地将这个总任务横断剖分为依次相继完成的分任务。如果剖分不当，就一定会导致完成总任务方法数计算的错误。为检验自行设计的剖分层次是否得当，过去常通过安排形象示意图的方法去说明计算错误的直观原因。但这是被动的。因为思维一旦误入歧途，“先入为主”的观念很难使他自拔，除非有人已提出异议，他是很难能主动地、不厌其烦地通过形象示意图去检查其解案是否真有问题！因此，我们认为，在使用乘法原理之前，就应防患于未然，先从理论上探讨，形式上套用“乘法原理”进行不合理剖分而导致计算错误的本质所在。从而使人们能主动地避免思维和计算上的错误。

为此，我们先从两个典型例子的分析入手。

“鞋子配对”问题：从 5 双不同鞋子中任取 4 只，4 只鞋子中至少有两只鞋配成一双的可能取法有多少？

有人试图把总任务作如下层次的“乘性”剖分：* 第一步，先从 5 双鞋中任取一双，得到两只，其法有 $C_5^1 \cdot C_2^2$ 种；第二步，在所余 8 只鞋中再任取两只，其法有 $C_{4\times2}^2$ 种。对 $4 = 2$ “$\otimes$” 2 的这种乘性剖分，按“乘法原理”，知所求可能选取的方法数为 $(C_5^1 \cdot C_2^2) \cdot C_8^2$ 种。试问此解案是否正确？

把 5 双鞋子分别编上 1，2，3，4、5 的号码。由于在第二个分任务的完成中，会出现两只“不配对”与“两

---

*乘性剖分——在乘法原理指导下的剖分，记“$\otimes$”；

加性剖分——在加法原理指导下的剖分，记“$\oplus$”。