

高等学校试用教材

近世代数

吴品三 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

近 世 代 数

吴 品 三 编

人 民 教 育 出 版 社

高等学校试用教材

近 世 代 数

吴 品 三 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河南第一新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张9.25 字数224,000

1979年12月第1版 1980年6月第1次印刷

印数 1—16,500

书号 13012·0403 定价 0.68 元

前 言

本书是根据1977年底上海教材会议拟定的“近世代数基础”教材编写大纲编写的，全书共分五章，前三章介绍关于群、环、域的基本知识，这部分内容每一个学生都应很好掌握。第四章介绍格的初步知识，第五章对群作进一步讨论，这两章可按照学生具体情况选讲一章或全讲。

根据编者在北京师范大学讲授代数课的经验，学生在学习这一课程时往往对抽象概念不能很好理解，对解题不知如何下手，针对这种情况，本书对每一重要概念都引入较多例子，以增加学生的感性认识，特别对举反例的问题，给与较多注意，这不仅对理解概念有所帮助，而且也是学习数学的一种基本方法。本书在每一重要定理之后都通过较多例题，说明如何应用这个定理，使学生能较好地体会抽象代数的证题方法。在每一章末尾，还附有一些综合运用本章概念的例题。所有这些例子与例题，并不需要都在课堂上讲解，有些可留给学生自己阅读。

为了提高学生的解题能力，本书对习题做了以下安排：按照循序渐进的原则，在每一节后配有一些练习，然后在每一章后配有习题。每节后的练习是比较容易的，凡是真正理解该节内容的学生，做这些练习，应该没有什么困难，可让学生全做。在这个基础上，可按照学生情况，再选留一些章后的习题。

在本书编写过程中，经常得到张禾瑞教授的指导，王世强教授仔细审阅了全部手稿，提出许多改进意见，徐伯勋同志为本书的编辑出版，花了不少功夫，谨此向他们表示感谢。由于编者水平所限，本书定有不妥之处，衷心希望读者指正。

吴 品 三

1979年4月于北京师范大学

目 录

前言	3
第一章 基本概念	1
✓§ 1. 集合 子集 集合的运算	1
✓§ 2. 映射 映射的合成	7
§ 3. 有限集与可数集	15
§ 4. 加氏积 ✓二元关系与等价关系	19
§ 5. 有序集 Zorn 引理	32
第二章 群	45
✓§ 1. 定义及基本性质	45
✓§ 2. 循环群与变换群 群的同构	66
✓§ 3. 不变子群与商群	75
✓§ 4. 群的同态 同态基本定理	91
§ 5. 直积	108
第三章 环与域	125
§ 1. 定义及基本性质	125
§ 2. 理想与商环	142
§ 3. 环的同态 同态基本定理	152
§ 4. 分式环	159
§ 5. 素理想与极大理想	166
§ 6. 单一分解整环	169
§ 7. 单一分解整环上的多项式环	182
§ 8. 域的扩张	187
§ 9. 直和	197
第四章 格	216
§ 1. 定义及基本性质	216

§ 2. Dedekind 格	228
§ 3. 布尔代数	240
第五章 群的进一步讨论	257
§ 1. Sylow 子群	257
§ 2. 有限交换群	267
§ 3. 具有有限生成元的交换群	275
本书所用符号	288

第一章 基本概念

§ 1 集合 子集 集合的运算

在数学中,常常不是讨论处于孤立状态下的各个个体,而是将这些个体联合在一个整体中来进行讨论.例如,我们讨论一个未知量 x 的有理系数多项式 $f(x)$,常常把所有这些多项式看成一个整体,讨论在这个整体中的运算(加、减、乘、除),整除性,既约性,因式分解等等.我们对于“在一定范围内的讨论对象组成的整体”给与一个名称,叫做集合.这是数学上的一个最基本的概念,我们通常只用它的各种同义语来解释,而不用比它更简单的概念来定义.

组成一个集合的各个个体,叫做这个集合的元素.

我们用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 来表示集合.特别,用 $\mathbf{Z}$ 表示所有整数所组成的集合(简称整数集), $\mathbf{Q}$ 表示所有有理数所组成的集合(简称有理数集), $\mathbf{R}$ 表示所有实数所组成的集合(简称实数集), $\mathbf{C}$ 表示所有复数所组成的集合(简称复数集).以后,如果没有特别说明,符号 $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 就表示上述集合.

集合的元素常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.当 a 是集合 A 的元素时,就说“ a 属于 A ”,记为“ $a \in A$ ”,也说“ A 含有 a ”,记为“ $A \ni a$ ”.当 a 不是集合 A 的元素时,用符号“ $a \notin A$ ”表示,读做“ a 不属于 A ”.

确定一个集合 A ,就是要确定:哪些元素属于 A ,哪些元素不属于 A .

设有两个集合 A, B ,若对于 A 中一切 a ,均有 $a \in B$,这时,就说 A 是 B 的子集,(也说 B 是 A 的扩集)用符号“ $A \subseteq B$ ”表示(或

用符号“ $B \supseteq A$ ”表示),读做“ A 含于 B ”(或读做“ B 包含 A ”). 若 A 不是 B 的子集,则用符号“ $A \not\subseteq B$ ”表示.

为了表达简捷,我们将逐渐引用一些通用的记号. 我们用“ $\forall x \in A$ ”表示“对于一切 $x \in A$ ”,用“ $\exists x \in A$ ”表示“存在一个 $x \in A$ ”,“ $\exists! x \in A$ ”表示“存在唯一的一个 $x \in A$ ”. 设 P, Q 是两个命题,“ $P \Rightarrow Q$ ”表示“若 P 成立,则 Q 成立”,“ $P \iff Q$ ”表示“当且仅当 P 成立时 Q 成立”,“ $\vee$ ”表示“或者”,“ $\wedge$ ”表示“并且”. 这样,“ A 含于 B ”这个概念可以用符号描述为

$$A \subseteq B \iff \forall a, (a \in A) \Rightarrow (a \in B)$$

一个集合由其元素唯一确定,故由相同元素组成的两个集合认为是相等的,即

若 A 是 B 的子集,并且 B 也是 A 的子集,就说 $A=B$, 即

$$A=B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

若 A 是 B 的子集,但 $A \neq B$, 就说 A 是 B 的真子集,用符号“ $A \subset B$ ”(或 $A \subsetneq B$)表示,即 $A \subset B \iff (A \subseteq B) \wedge (\exists a \in B, a \notin A)$.

不含任何元素的集合叫做空集,用符号 ϕ 表示.

一个集合可用列举其元素的方法给定,也可用规定其元素适合的条件来描述,例如

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3\}$$

表示 A 这个集合,由 1, 2, 3 三个数字所组成,而 B 这个集合,由一个数字 3 所组成,易见 $B \subset A$. 当不致引起混淆时,即写出集合的一些元素,就可以看出该集合元素的组成规律时,也用“ $\dots$ ”表示其余元素,例如

$$P = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\},$$

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\},$$

由 P 的元素的描述,可以看出, P 是全体自然数所组成的集合, E

是全体偶自然数（正偶数）所组成的集合，关于 P, E ，我们也可以如下描述：

$$P = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x > 0\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x > 0 \wedge x = 2y, y \in \mathbf{Z}\}$$

这就是用“规定元素适合的条件”来描述一个集合的方法，再看一个例子。

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 = -1\}$$

易见 $A = \phi$ ，由此可见，空集确实是在讨论问题中可能出现的一个集合。

我们说，对任意集合 S ，均有 $\phi \subseteq S$ 。为此，需证命题“ $x \in \phi \Rightarrow x \in S$ ”成立。但任一命题，只要前提不真，那末，无论结论如何，整个命题被认为成立，故有 $\phi \subseteq S$ 。

设 A 是给定的一个集合， A 的所有子集所组成的集合叫做 A 的幂集，用符号 2^A 表示。

例如， $A = \{1, 2, 3\}$ ，则

$$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

由此可见，若 A 含有 n 个不同元素，则 2^A 含有 2^n 个不同的元素。这里，需要注意， 2^A 的元素是“集合”，它们是当作个体来考虑的。 $\{1\} \in 2^A$ ，不能写 $\{1\} \subset 2^A$ ，而对 A 来说， $\{1\} \subset A$ ，不能写成 $\{1\} \in A$ 。

让我们再强调一下，集合是我们讨论的对象（当然是在一个确定范围内）所组成的整体，每一个对象就是组成这个集合的元素。现在，我们考虑的对象是 A 的子集，而整体是 2^A ，故 2^A 的元素是“ A 的子集”。对于我们讨论的对象，只是要求能够判别异同，没有其他条件，换句话说，对于两个元素 a, b ，只要求能够判别是相同元素，或者是不同元素。给定集合 A ， A 的元素可以作为讨论对象， A 的子集当然也可作为讨论对象。

设 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,1,2,3\}$. 则任取 $a \in A$, 均有 $a \in B$, 故 $A \subseteq B$. 反之, 任取 $a \in B$, 则也有 $a \in A$, 即 $B \subseteq A$, 故 $A=B$, 这是根据集合相等的定义得出的判断, 似乎与我们的常识相违背, 其实不然, 因为开始我们就约定了集合是“讨论对象”的全体, 而对于 A, B , 讨论对象只有三个数目, 故 $A=B$.

下面我们介绍集合的几种运算.

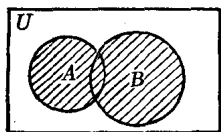
设 A, B 是 U 的子集, A, B 的交 $A \cap B$ 定义为一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, A, B 的并 $A \cup B$ 定义为一切属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, B 在 A 中的余 $A \setminus B$ 定义为一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 特别, B 在 U 中的余简称 B 的余集, 记为 B' ;

$$A \cap B = \{x \mid x \in U, (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

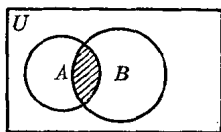
$$A \cup B = \{x \mid x \in U, (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in U, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

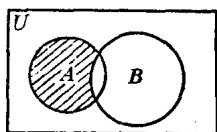
集合的这三种运算可以用图形表示如下



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

设取定集合 U, A, B, C 是 U 的子集, 则集合的上述三种运算

$\cup, \cap, \setminus$ 适合以下算律:

✓ (1) $A \cap A = A, A \cup A = A;$ (幂等律)

✓ (2) $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A;$ (交换律)

✓ (3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$ (结合律)

✓ (4) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A;$ (吸收律)

✓ (5) 若 $A \subseteq C$ 则 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = C$ (模律)

✓ (6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, (分配律)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

✓ (7) $A \cap \phi = \phi$, $A \cup \phi = A$, (泛界) $A' = \bar{A}$

$$A \cap U = A, A \cup U = U;$$

✓ (8) $A \cap A' = \phi$, $A \cup A' = U$;

✓ (9) $(A')' = A$; (对合律)

✓ (10) $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

我们证明(4),(5)作为例子, 其余留作练习.

设 $x \in A \cap (A \cup B)$, 则 $x \in A$, 并且 $x \in A$ 或 $x \in B$. 设第一种情形成立, 则 $x \in A$; 设第二种情形成立, 则 $x \in A$ 并且 $x \in B$; 总之有 $x \in A$. 即 $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

反之, 设 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$, 从而 $x \in A \cap (A \cup B)$, 即 $A \cap (A \cup B) = A$. 同样, 可证 $A \cup (A \cap B) = A$, 即(4)成立.

设 $x \in A \cup (B \cap C)$, 则 $x \in A$ 或者 $x \in B \cap C$, 在第一种情形, $x \in A$, 从而 $x \in A \cup B$, 又题设 $A \subseteq C$, 故 $x \in C$, 即 $x \in (A \cup B) \cap C$; 在第二种情形, $x \in B \cap C$, 则 $x \in A \cup B$, 且 $x \in C$, 即 $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.

反之, 设 $x \in (A \cup B) \cap C$, 则 $x \in A \cup B$, 并且 $x \in C$. 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup (B \cap C)$; 若 $x \in B$, 则 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap C$, 即是: 在 $A \subseteq C$ 的条件下, 有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$$

(5) 成立.

设 A, B 是两个集合, 若 $A \cap B = \phi$, 则说 A 与 B 不相交.

集合的交与并的概念也可以推广到任意多个集合上去. 设 A_i ($i \in I$) 是集合 U 的子集, 定义集合族 $\{A_i | i \in I\}$ 的交为

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in U, \forall i \in I, x \in A_i\},$$

此处 A_i 的所有下标 i 组成的集合 I 叫做集合族 $\{A_i\}$ 的标集。

集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的并为一

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in U, \exists i \in I, x \in A_i\}$$

特别, 当标集 $I = \phi$ 时, 规定

$$\bigcap_{i \in I} A_i = U, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \phi.$$

对于 U 的任意子集 A , 下列两个等式成立:

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$$

我们证明第一个等式, 另一个等式作为练习。

$$x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \iff (x \in A) \vee (x \in A_i, \forall i \in I) \iff$$

$$x \in A \cup A_i, \forall i \in I \iff x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

即

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$$

练 习

1. 设 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \geq 5\}$,

$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x < 0\}$,

$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, 并用图形表示。

2. 证明: $(A \subset B) \iff (A \cup B = B) \iff (A \cap B = A)$ 。

3. 证明: $(A = B) \iff (A \cup B = A \cap B)$ 。

4. 设 $A_n = (n, \infty)$, (n, ∞) 表示实数轴上的开区间, 即 $(n, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R},$

$n < x < \infty\}$, $n=0, 1, 2, \dots$,

求

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \phi$$

5. 设 $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 写出 2^A .

6. 设 A, B 是 U 的子集, 规定 $A+B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, 证明

a) $A+B = B+A$, b) $A+\phi = A$, c) $A+A = \phi$.

§ 2 映射 映射的合成

上一节介绍的集合, 是近代数学的一个最基本的概念, 数学的每一分支都离不开它; 本节将要介绍的映射, 也是这样的一个基本概念.

定义 1 设 A, B 是给定的两个集合, 如果有一个规则 f , 通过它, 对于每一个 $x \in A$, 唯一确定一个 $y \in B$, 那末, 就说 f 是 A 到 B 的一个映射, 记为

$$f: A \rightarrow B$$

A 叫做映射 f 的定义域, B 叫做 f 的值域, y 说是 x 在 f 作用下的象, 记作 $y = f(x)$, 并用符号

$$f: x \mapsto y$$

表示, x 说是 y 的一个原象.

由以上定义可知: 一个映射必须联系着两个集合与一个对应规则. 两个映射 $f, g, f: A \rightarrow B, g: A_1 \rightarrow B_1$, 当且仅当 $A=A_1, B=B_1$, 且对一切 $x \in A$, 均有 $f(x)=g(x)$ 时, 才认为是相等的, 用符号表示, 即

$$f=g \iff [A=A_1] \wedge [B=B_1] \wedge [\forall x \in A, f(x)=g(x)]$$

我们看几个例子:

例 1 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$

$$f: a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 2$$

是 A 到 B 的一个映射.

$$g: a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3$$

也是 A 到 B 的一个映射, 但

$$h: a \mapsto 1, b \mapsto 2$$

不是 A 到 B 的映射, 因为 c 在 h 作用下没有象.

例 2 $A = \mathbb{Z}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}$

$$f: n \mapsto |n|$$

不是 A 到 B 的映射, 因 0 在 f 作用下的象不在 B 中.

$$g: n \mapsto |n| + 1$$

是 A 到 B 的一个映射.

$$h: \begin{cases} n \mapsto 1, & \text{当 } 2 \mid n \text{ 时 (表示 2 是 } n \text{ 的因子),} \\ n \mapsto 2, & \text{当 } 2 \nmid n \text{ 时 (表示 2 不是 } n \text{ 的因子).} \end{cases}$$

也是 A 到 B 的一个映射.

例 3 $A = (F)_n$ 是数域 F 上一切 n 阶方阵的集合:

$$B = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$f: (a_{ij}) \mapsto \text{秩}(a_{ij})$$

这是 A 到 B 的一个映射.

~~**例 4** $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$,~~

$$f: n \mapsto n+1,$$

$$g: n \mapsto n-1$$

都是 A 到 B 的映射.

例 5 $A = B$,

$$I_A: a \mapsto a, \quad \forall a \in A$$

是 A 到 A 的一个映射, 叫做 A 上的单位映射 (或恒等映射).

注意, 当 $A \neq B$ 时, I_A 与 I_B 是两个不同的映射.

例 6 设 $A \subseteq B$, $i: a \mapsto a, \forall a \in A$, 称 i 为 A 到 B 的一个包含映

射.

定义 2 设 f 是 A 到 B 的一个映射, 如果 $a \neq b$ 有 $f(a) \neq f(b)$, $\forall a, b \in A$, 那末, 就说 f 是 A 到 B 的一个单射 (injection). 如果对于任意 $b \in B$, 均存在 $a \in A$, 使 $f(a) = b$, 那末, 就说 f 是 A 到 B 的一个满射 (surjection), 满射 f 用符号 $\rightarrow$ 表示, 即 $f: A \rightarrow B$. 若一个映射 f , 既是单射, 又是满射, 则叫做双射 (bijection), 表为 $f: A \leftrightarrow B$.

A 到 B 的单射也叫 A 到 B 的一一映射, 满射也叫 A 到 B 上的映射, 双射也叫 A 到 B 上的一一映射.

例 1 的 f 既不是单射, 也不是满射, 例 1 的 g 是单射, 例 2 的 g 是满射, 例 3 的 f 是满射, 例 4 的 f, g 是双射.

设 f 是 A 到 B 的映射, 任取 $S \subseteq A$, 命

$$f(S) = \{f(x) | x \in S\}$$

这是 B 的一个子集, 叫做 S 在 f 作用下的象, (当 $S = \phi$ 时, $f(S) = \phi$) 当 $S = A$ 时, $f(A)$ 叫做映射 f 的象, 通常记为 $\text{Im} f$, 即

$$\text{Im} f = f(A)$$

于是, A 到 B 的映射 f 是 A 到 $\text{Im} f$ 的满射.

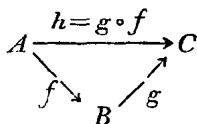
任取 $T \subseteq B$, 命

$$f^{-1}(T) = \{x | x \in A, f(x) \in T\}$$

这是 A 的一个子集, 叫做“在 f 作用下 T 的完全原象” (当 $T = \phi$ 时, $f^{-1}(\phi) = \phi$); 特别, 当 T 仅含有一个元素时, 例如, $T = \{b\}$, $f^{-1}(\{b\})$ 也记成 $f^{-1}(b)$. $f^{-1}(b)$ 有可能是空集, 例如在例 1 中, $T = \{4\}$, 则 $f^{-1}(T) = \phi$.

下面介绍映射合成的概念.

定义 3 设有三个集合 A, B, C , $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 由 f, g 确定的 A 到 C 的映射 $h: a \mapsto g(f(a)) \forall a \in A$ 叫做映射 f, g 的合成, 记为 $h = g \circ f$, 即 $h(a) = g(f(a))$. h 可用下图表示:



我们证明:映射的合成适合结合律,以及恒等映射关于映射的合成的特性.

定理 1 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$, 则有

$$1) h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

$$2) I_B \circ f = f, f \circ I_A = f.$$

证 1) 按照映射相等的定义, 需要证明映射 $h \circ (g \circ f)$ 与 $(h \circ g) \circ f$ 的定义域与值域都相同, 这是明显的, 定义域为 A 而值域为 D . 其次, 需要证明, 对于任意 $x \in A$, 有

$$[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x).$$

由映射合成定义, 我们有以下等式:

$$\begin{aligned} [h \circ (g \circ f)](x) &= h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))] = (h \circ g)(f(x)) \\ &= [(h \circ g) \circ f](x), \forall x \in A, \text{ 即 } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \end{aligned}$$

证 2) $I_B \circ f$ 与 f 的定义域均为 A , 值域均为 B . 并且对于任意 $x \in A$, 有 $(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$, 即 $I_B \circ f = f$. 同样, 可证 $f \circ I_A = f$. $\square$

我们看例 4 的 f, g , 易见 $f \circ g = g \circ f = I_A$ 而对于例 1 的 g , 我们作 $f: B \rightarrow A$, 即

$$f: 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto a,$$

则 $f \circ g = I_A$, 但 $g \circ f \neq I_B$, 我们引入以下定义

定义 4 设 $f: A \rightarrow B$. 若存在 $g: B \rightarrow A$, 使 $g \circ f = I_A$, 则说 f 是左可逆映射, g 叫做 f 的左逆映射. 同样, 若 $f \circ g = I_B$, 则说 f 是右可逆, g 叫做 f 的右逆映射. 当 f 是双侧可逆时, 说 f 是可逆映射.

上面例子中, g 是左可逆映射, f 是 g 的左逆映射. 若命

$$f_1: 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b,$$

则 f_1 是不同于 f 的另一个左逆映射, 由此可见, 左可逆映射的左逆映射不一定是唯一的.

定理 2 $f: A \rightarrow B$. f 是左可逆的充要条件为, f 是单射; f 是右可逆的充要条件为, f 是满射.

证 设 f 是左可逆, 即存在 $g: B \rightarrow A$, 使 $g \circ f = I_A$. 希望证明, 当 $f(a_1) = f(a_2)$ 时, 有 $a_1 = a_2$. 因

$$\begin{aligned} a_1 &= I_A(a_1) = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &= (g \circ f)(a_2) = I_A(a_2) = a_2, \end{aligned}$$

即 f 是单射.

反之, 设 f 是 A 到 B 的单射, 希望证明, 存在 $g_1: B \rightarrow A$, 使 $g_1 \circ f = I_A$. 为此, 取定一个 $a_1 \in A$. 作如下对应 g_1 :

$$g_1(b) = \begin{cases} a, & \text{若 } \exists a \in A, f(a) = b, \\ a_1, & \text{若 } b \notin f(A), \end{cases}$$

则 $\forall b \in B$, $g_1(b)$ 唯一确定, 并且 $\forall a \in A$, $(g_1 \circ f)(a) = g_1(f(a)) = g_1(b) = a$, 即 $g_1 \circ f = I_A$.

设 f 是右可逆, 即存在 $h: B \rightarrow A$, 使 $f \circ h = I_B$, 希望证明, 对任意 $b \in B$, $\exists a \in A$, $f(a) = b$. 因 $b \in B$, 故有 $b = I_B(b) = (f \circ h)(b) = f(h(b))$, 即存在 $h(b) \in A$, 使 $f(h(b)) = b$, 故 f 是满射.

反之, 设 f 是满射, 则对于每一 $b \in B$, 存在一个 $a \in A$, 使 $f(a) = b$. 一般情形, 这样的 a 不止一个, 但是, 我们只取定一个, 作 $g_2: b \mapsto a$, 这是 B 到 A 的一个映射, 并且 $\forall b \in B$, $(f \circ g_2)(b) = f(g_2(b)) = f(a) = b$, 即 $f \circ g_2 = I_B$. 故 f 是右可逆. $\square$

推论 $f: A \rightarrow B$, 则 f 是可逆映射的充要条件为: f 是双射.

设 f 是双射, 则 f 既有左逆映射 g , 又有右逆映射 h , g 与 h 有何关系呢? 下面定理说明二者相等.

定理 3 设 $f: A \rightarrow B$, 且 $g \circ f = I_A$, $f \circ h = I_B$, 则 $g = h$.