目　录

第一章 绪 论

§1-1 模糊现象及工程模糊性

一、模糊现象

“模糊”一词来源于英语词汇“Fuzzy”，其原意是“毛茸茸”或“边界不清晰”。在实际工作和生活中，人们常常会遇到这类“边界不清晰”的问题，例如“天气热”、“这人真漂亮”、“这位老师水平高”、“好学生”、“技术先进”、“某厂矿技术力量强”等等。上述的“热”、“高”、“先进”等均属于这类“边界不清晰”的概念，即模糊概念。

所谓模糊，是指既在质上没有确切的含义，又在量上没有明确的界限。这种边界不清的模糊概念，是事物的一种客观属性，是事物的差异之间存在着中间过渡过程的结果。

又如：人们常说的高、矮、胖、瘦、老、中、青等概念，就是含义不确切、边界不清的模糊概念。比如“中年”这个概念，有人说30岁至50岁是中年；有人说30岁至34岁算“青年”，50岁以上算“老年”，可见含义和界限都不清楚。在工程界，类似的模糊概念是很多的，结构设计中常用的许用应力就是个模糊概念。通常我们规定A3钢许用应力的上界为176.5MPa，按此规定，$\sigma=176.7$MPa就不许用了。但实际上两者并无本质区别。从完全许用到完全不许用之间，实际上有一中介过渡过程。当考虑这一过渡过程时，许用应力的边界就模糊了，许用应力就成了模糊概念。类似的许用位移、尺寸界限、频率禁区等工程量，也都是模糊的。当工程分析、设计、建造涉及上述模糊概念时，显然，精确数学及相应工程理论就力不从心了。

二、工程模糊性

1. 模糊性、确定性和随机性

(1) 模糊性与确定性

我们面对的世界，其存在可分为两类：一类是本质为确定的事物，例如：男学生、女学生；另一类是本质为不确定的事物，例如：好学生、差学生。后者在客观世界中大量存在，即具有模糊性(质含义不确定，外延，即边界不清晰) 的概念。

对于“确定”的概念(或者是加以“限制”后“不确定”的概念的数学描述)，有一个本质的特征：任意一个对象，要么属于给定的某个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一，绝不可能模棱两可。例如，学生要么属于“男学生”、要么是“女学生”，二者必居其一。

对于“不确定”的概念，我们常常给不出一个明确的界限。判断任意一个对象的“是”与“否”，只可能是“亦此亦彼”的模棱两可的情况。例如：学生自学能力强、较强、一般、差，其中两两相邻等级之间界限很难量化。又如军用船舶的分类：① 舰与艇，一般认为，排水量500t以上的军用船舶称为舰，而排水量500t以下的称为艇。实际使用中，排水量大于500t的艇及排水量小于500t的舰都有。② 巡洋舰与航空母舰，巡洋舰排水量7000～

30000t，而航空母舰为 10000 ～ 90000t 以上等等，也是类似问题。现以“青年人”这个模糊概念的数学处理为例，来对模糊性作进一步的说明。“青年人”是模糊概念，对这个“不确定”的概念要用一种新方法处理。具体方法为：对每一个对象 x，用[0,1]闭区间上的一个数值 $\mu_{\text{青年人}}(x)$ 来表示对象 x 对于“青年人”的隶属程度。一个 18 岁的人，我们毫无疑义地认为他隶属于“青年人”的程度最高，即 $\mu_{\text{青年人}}(18) = 1$；一个 30 岁的人，其隶属于“青年人”的程度要低一些，即 $\mu_{\text{青年人}}(30) = 0.5$。这种隶属程度合理地刻划了模糊概念所表现出的对事物划分的不确定性。

由上述可知，模糊性是由本质为不确定性引起的，而本质为确定的事物有时也会出现不确定现象 —— 随机现象。

(2) 模糊性与随机性

本质为不确定的事物具有模糊性，对于本质为确定的事物，表现出的这种不确定性称为“随机性”，这是两种截然不同的不确定性。

在掷硬币的实验中，对每次实验“反面”出现的事件是偶然的。这种不确定的偶然性中包含着某种必然性，即出现“反面”这一事件是随着实验次数的增加而稳定在 1/2 附近。船舶在海浪（小波浪）中航行，问“某方向摇幅为 3° 的概率多大?”，这是一个确定的随机性问题；而问“某方向摇幅 3° 左右或小角度摇幅概率多大?”这却是一个模糊性问题。处理这类问题要借助模糊数学。

研究随机性的数学是统计数学，它研究的是“一因多果”的随机性，而模糊数学研究的是“亦此亦彼”的模糊性。模糊数学是继经典数学、统计数学之后，在数学上的又一新的发展。这三种数学分别用来刻划客观世界中不同的量：

$$\text{量}\begin{cases}\text{确定性 —— 经典数学}\\ \text{不确定性}\begin{cases}\text{随机性 —— 统计数学}\\ \text{模糊性 —— 模糊数学}\end{cases}\end{cases}$$

2. 工程模糊性

在工程系统中，与力学相关的问题是非常多的。谈到力学，就使人联想到“严谨”和“精确”，似乎没有模糊数学插足的地方。

从整个力学的理论体系来说，确实如此，但当力学用到某些具体的工程问题来说，情况就有了变化。大多数工程问题都可以看成三个互相独立的部分（见图 1-1）：

① 输入部分，即各种载荷；

② 系统，即本身结构；

③ 输出部分，即由于输入引起的响应。

图 1-1 系统响应关系图

如输入为静载荷，即为与时间无关的常量，则输出为静响应，也是常量。如输入为动载荷，则输出为动响应。

另一方面，如果输入及系统特性都是确定的，则其输出也是确定的，此时输出与输入间的关系符合牛顿定律，可以用确定的微分方程来描述。如果起始条件也是确定的，则可以得到确定的解，这就是当前一般的力学所研究的问题。

如果输入或系统中某些因素是不确定的，则其输出也是不确定的。

如前所述，有两类不确定性，第一类是随机性；第二类不确定性就是模糊性。不论是输

入部分，或系统本身，以及事物发生的机理，其中任何一方面的模糊因素，都会引起模糊性输出。工程问题中各种可能的组合如图 1-2 所示。

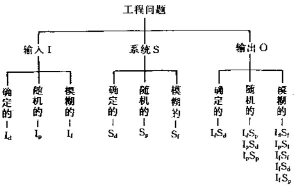

图 1-2　工程问题各种可能的组合

从图 1-2 可以看出，模糊输出的可能性最大，输入 I 和系统 S 中任何一方如果是模糊的，都可能产生模糊输出，这里还没有包括模糊机理。

上述输入 I，系统 S 和输出 O 之间的关系适用于任何工程系统。

§ 1-2　模糊数学及其工程应用

一、模糊数学

模糊数学是用数学方法研究和处理具有“模糊性”现象的数学。

随着科学的发展，过去那些与数学毫无关系或关系不大的学科，如生物学、心理学、语言学以及社会科学等等，都迫切要求定量化和数学化，这就使人们遇到大量的模糊概念，这也正是这些学科本身的特点所决定的。另一方面，随着科学的深化，研究的对象就越加复杂，而复杂的东西是难以精确化的，这是一个突出的矛盾。这种矛盾正随着电子计算机的发展而日益激化。一边是严密的程序要求高度的精确；另一边，机器所执行的任务更加复杂，必然涉及到大量的模糊概念。这就是“大系统”出现所带来的突出的矛盾，以致使许多科技工作者从实践中总结出来一条所谓的“不相容原理”(也叫“互克性”原理)。即“当一个系统复杂性增大时，我们使它精确化的能力将减少。在达到一定阈值之上时，复杂性和精确性将相互排斥。”这也就是说，复杂性越高，有意义的精确化能力就越低。而复杂性却意味着因素众多，以致使人们无法全部、认真地去进行考查，而只抓住其中重要的部分，忽略掉次要部分，但这有时会使本身明确的概念也变得模糊起来。

模糊数学，从某种意义上来说，是架在形式化思维和复杂系统之间的一座桥梁。通过它可以把多年积累起来的、形式化思维的数学成果应用到复杂系统中去，可以通过少量的信息而得到大量的成果。

二、模糊数学的工程应用

在国外，自 70 年代以来，模糊数学得到了迅速的发展，在理论方面：查德提出了分解

定理和扩展原理；罗马尼亚的尼哥以太和拉莱斯库提出了表现定理；日本的管野道夫提出了模糊测度与模糊积分；法国的桑切斯提出解决模糊关系方程的一整套解法；以及查德的可能性理论和西门的令人满意准则。另一方面，模糊数学的应用也十分广泛。除在人文科学及管理方面取得很好成果外，还有如：英国的帕比斯等将模糊控制器用于十字路口的交通控制，印度的帕尔等用模糊方法识别语言与谈话者，日本的田村等将模糊等价关系应用于照片分类实验。我国学者从事模糊数学的研究始于70年代中期，近20年来在理论和应用研究方面都取得了丰硕的成果。蒲保明、刘应明以及王国俊在模糊拓扑学上取得了重大成果；汪培庄提出随机集落影理论以及其他学者在模糊测度和模糊代数上的贡献。另外，钱敏平等利用模糊模式识别的方法识别癌细胞，郭荣江等的中医专家系统，等等。至今已形成了如：模糊综合评判、模糊模式识别、模糊聚类分析、模糊优化、模糊控制等许多模糊论方法。在有些领域已经步入世界的先进行列，成为这门学科发展的一大支柱。

在工程界，虽然可以利用经典、统计数学和相应系统的工程技术原理作为工具，来进行非常复杂的工程系统的分析、设计、建造，这些工作在较大程度上依然要凭借科技人员的经验。由于在建立分析模型、设计简化以及建造方面相关人文因素的复杂性等，都包含有各种不确定性。

一项规模较大的工程设计，其中某些参数的确定，都往往涉及若干相互制约的质量指标和很多复杂的影响因素，需要协调矛盾，权衡利弊，进行综合考虑。同样一项设计，不同的设计者可能做出完全不同的方案；同一个设计者也可以从不同的角度考虑，做出若干个方案。为了获得一个满意的方案，需要进行评判和优选。在这类工作中，专家的经验和观点，用户的要求和意愿等，起着很重要的作用。但是，这些经验、观点、要求、意愿等，往往具有模糊性。如何把这种模糊性加以解析化和定量化，使方案优选和参数确定建立在科学基础之上，这就需要应用模糊综合评判方法。具体有：确定安全系数、模糊优化设计中约束的容差值、主尺度及参数，以及各种方案的优劣评判等等。

在最优化设计方面，许多约束条件，例如许用应力、许用位移、频率禁区等，它们从完全许用到完全不许用有一个中间过渡过程，即具有模糊性。过去，因为没有处理模糊概念的方法和手段，所以把许多本来是模糊的量，人为地当作是确定性的。由于忽略模糊性，往往会漏掉真正的最优方案。现在可以运用模糊数学规划的理论和方法进行所谓模糊优化设计。

模糊模式识别与模糊变换可应用于未知目标舰种判定；模糊控制可用于自动化系统；模糊聚类分析法可用于水雷模糊信号处理和工程产品质量分级、经济区划分等等。

模糊数学及模糊论方法学仍处于初始发展阶段，它们在工程系统方面的应用前景是非常广阔的。模糊数学与工程技术理论相结合，处理这方面的模糊问题，必将会产生与该工程系统相适应的模糊论方法学。

第二章　模糊论数学基础

§2-1　模糊集定义

一、特征函数与隶属函数

任何一个概念总有它的内涵和外延，概念的内涵是这一概念的本质属性，概念的外延是指符合这一概念的全体对象，实际上就是一个集合。船舶工程界最常用的概念 —— 船舶，其内涵是：处在水中一定位置，能移动的建筑物；外延是：运输船、工程船、海洋开发船、港务船、渔业船、军用船舶、其他船舶。

我们在说到某个概念的外延时，总是在一定的范围内来讨论。讨论的范围叫论域，论域中的每个对象叫元素。如上例中，运输船、工程船、军用船舶等叫做船舶这个论域中的元素。

给定一个论域 X，X 中的全部子集记作 $P(x)$，即

$$P(x) = \{A|A \subset X\}$$

一个确切的概念，它的外延是一个普通的集合为 A，故有 $x \in X$，$x \in A$ 与 $x \overline{\in} A$ 二者必居其一。这种特性可用 A 的特征函数 x_A 表示：

$$x_A: X \to \{0,1\}$$

$$x \to x_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \overline{\in} A \end{cases}$$

A 的特征函数在 x 处的值 $x_A(x)$ 叫做 x 对 A 的隶属度。当 $x \in A$ 时，隶属度是 1，表示 x 绝对隶属于 A；当 $x \overline{\in} A$ 时，隶属度是 0，表示 x 绝对不属于 A。

不难看出，特征函数满足下列运算性质：

$$x_{A\cup B}(x) = \max\{x_A(x), x_B(x)\}$$

$$x_{A\cap B}(x) = \min\{x_A(x), x_B(x)\}$$

$$x_{A^c}(x) = 1 - x_A(x)$$

其中，A、B、$A^c \in P(x)$。

可是，世界上的许多概念都是模糊概念，用绝对的属于和绝对的不属于去描述已经远远不够了。现在来看下面一个问题及其分析：

观察在 U 中的 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 所标示的图形（见图 2-1）。

对于问题：U 中哪些图形对属于"圆块块"？哪些接近"圆块块"？接近程度如何？

答案是：a_1 绝对属于"圆块块"；a_5 绝对不属于"圆块块"；a_4、a_3、a_2 介于 a_5 与 a_1 之间，它们依序逐渐接近"圆块块"。

分析：a_5 与 a_1 具有很大的差异，但从 a_5 到 a_1 不是具有突变形态的差异，而是采取了一个中介过渡的形式。处于中介过渡的差异，便具有"亦此亦彼"的性质。在我们讨论的范围中，"圆块块"与"非圆块块"是从 a_5（"非圆块块"）向 a_1（"圆块块"）连续演变的渐近过程中

的某些中间性表现。

如果对于这种问题的回答采取绝对肯定或绝对否定的“非此即彼”式的结论，那就不能客观地描述这种现象，不能刻划出“程度”上的差异，从这个意义上讲，模糊集论实质上是对事物否定时向对立面转化的渐近过程的研究。

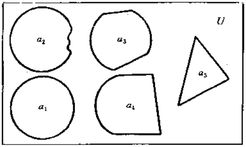

图 2-1　几何图形

另外，像“有矿与无矿”、“天气好与不好”、“产品合格与不合格”、“美与丑”、“清洁与污染”等等，这样一些对立的概念之间都没有绝对分明的界限。严格地说，它们的外延都是不确定的。我们称外延不确定的概念为模糊概念。在船舶工程中，模糊概念也是很多的。例如：侦察渔轮（是属于渔业船还是军用船舶）、多功能船等等。

对于U中的每一个元素指定一个0到1之间的实数来表达它们隶属于“圆块块”这个模糊概念的程度，即

$$a_1 \mapsto 1, a_2 \mapsto 0.9, a_3 \mapsto 0.4, a_4 \mapsto 0.2, a_5 \mapsto 0$$

这里U称为论域，而1,0.9,0.4,0.2,0分别是a_1,a_2,a_3,a_4,a_5的隶属度，它是“圆块块”这个模糊概念在论域U中的表现。

二、模糊集

下面给出模糊概念的一般描述。

定义 2.1.1　设X是论域，称映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: X \to [0,1]$$
$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

确定了X的一个模糊子集，简称模糊集，记为$\underset{\sim}{A}$。$\mu_{\underset{\sim}{A}}$叫模糊集$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$叫元素$x$隶属于$\underset{\sim}{A}$的程度，简称隶属度。

X中的模糊集的全体记为$F(x)$，即

$$F(x) = \{\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A} \text{ 是 } X \text{ 的模糊集}\}$$

例 1　设论域

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

其中，x_1,x_2,x_3,x_4,x_5分别代表某研究设计所船舶设计室5位近年分配来的船舶工程毕业生，现分别对每位的设计创新能力打分，按百分制给分，再都除以100，这实际上就是给定一个从U到[0,1]闭区间的映射，例如：

x_1　85分　即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.85$

x_2　75分　即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.75$

x_3　98分　即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.98$

x_4　30分　即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.30$

x_5　60分　即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.60$

这样就确定了一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，它表示出该设计室5位工作者对“设计创新能力强”这个模糊概念的符合程度。

另外也可表示成：

$$\underset{\sim}{A}=0.85/x_1+0.75/x_2+0.98/x_3+0.30/x_4+0.60/x_5$$

若对论域 U，则

$$U=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$$

中的模糊子集 $\underset{\sim}{A}_n$，也可记为

$$\underset{\sim}{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/x_i$$

或

$$\underset{\sim}{A}_n=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_i/x_i$$

而其中隶属度为 0 者，可略去不记，例如可以认为

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.8/b+0/c+0.2/d$$

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.8/b+0.2/d$$

是同一个模糊子集。

还可用向量形式表示 $\underset{\sim}{A}$，即

$$\underset{\sim}{A}=(1.0,0.8,0.0,0.2)$$

此时，其分量切勿随意颠倒顺序，且隶属度为 0 的项必须写入。

例 2 $x=N=\{$全体自然数$\}$。$\underset{\sim}{A}$ 表示“近似等于 20 的自然数”，则可有：

$$\underset{\sim}{A}=0.1/17+0.5/18+0.8/19+1/20+0.8/21+0.5/22+0.1/23$$

例 3 $x=R=\{$全体实数$\}$。$\underset{\sim}{B}$ 表示“聚集在 10 附近的实数”，则可有：

$$\underset{\sim}{B}=\int_R\left[1+\left(\frac{1}{5}(x-10)^2\right]^{-1}\bigg/x$$

例 4 某造船厂建造一艘水面舰艇，其建造周期大约为 240 天左右，若采用 $\underset{\sim}{A}$ 表示该周期，那么可写成：

$$\underset{\sim}{A}=0.1/210+0.4/230+1.0/240+0.1/250$$

其次，给出隶属函数的解析式也表示一个模糊集，如例 5 所示。

例 5 以年龄作论域，取 $X=[0,200]$。L. A. 扎德(L. A. Zadeh)给出了“年老 $\underset{\sim}{A}$”和“年轻 $\underset{\sim}{B}$”两个模糊集的隶属函数(见图 2-2、图 2-3)分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<x\leqslant 200\end{cases}$$

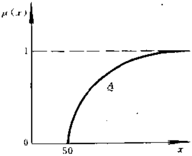

图 2-2 “年老 $\underset{\sim}{A}$”隶属函数

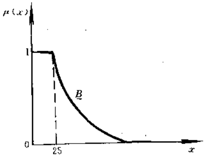

图 2-3 “年轻 $\underset{\sim}{B}$”隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x\leqslant 200\end{cases}$$

§2-2　模糊集运算

定义2.2.1　设$F(U)$为U上全体模糊子集所构成的类，并且$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(U)$。定义$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$(并集)，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$(交集)、$\underset{\sim}{A}^{c}$(余集或补集)，它们分别具有隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u)\triangleq\max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u))$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u)\triangleq\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u))$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^{c}}(u)\triangleq 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

由定义2.2.1可以得到

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\int_{U}(\max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u))/u)$$

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\int_{U}(\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\mu_{\underset{\sim}{B}}(u))/u)$$

$$\underset{\sim}{A}^{c}=\int_{U}(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u))/u$$

上述的并、交运算可以推广到任意多个模糊集上去。

例6　按例5，则“年老或年轻”为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<x\leqslant\dfrac{75+\sqrt{725}}{2}\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \dfrac{75+\sqrt{725}}{2}<x\leqslant 200\end{cases}$$

“又老又年轻”为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<x\leqslant\dfrac{75+\sqrt{725}}{2}\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & \dfrac{75+\sqrt{725}}{2}<x\leqslant 200\end{cases}$$

“不年轻”为

$$\mu_{\underset{\sim}{B}^{c}}(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ 1-\left[1+\dfrac{(x-25)^{2}}{25}\right]^{-1} & 25<x\leqslant 200\end{cases}$$

例7　若定义

$$\underset{\sim}{A}(\text{圆块块})\triangleq\begin{pmatrix}a & b & c & d & e\\ 1 & 0.9 & 0.4 & 0.2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}(\text{方块块})\triangleq(0.2\quad 0.3\quad 0.6\quad 0.1\quad 0)$$

则

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}(\text{或圆或方})=(1\quad 0.9\quad 0.6\quad 0.2\quad 0)$$

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$(亦圆亦方) = (0.2　0.3　0.4　0.1　0)

$\underset{\sim}{A}^c$(不圆) = (0　0.1　0.6　0.8　1)

例 8　设论域

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$ 是论域 U 的两个模糊子集,采用 L. A. 扎德记号,隶属度为 0 者不记入。

$$\underset{\sim}{A} = 0.5/x_1 + 0.3/x_2 + 0.4/x_3 + 0.2/x_4$$

$$\underset{\sim}{B} = 0.2/x_1 + 0.6/x_4 + 1/x_5$$

利用 $\mu_{\underset{\sim}{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$,得:

$$\underset{\sim}{A}^c = 0.5/x_1 + 0.7/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5$$

$$\underset{\sim}{B}^c = 0.8/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 0.4/x_4$$

为了使模糊集适于各种不同的模糊现象,必须建立模糊集的各种不同的运算,模运算是模糊集运算的最一般形式。

定义 2.2.2　映射 $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ 称为三角模,若满足下列条件:

(1)$T(0,0) = 0$,　$T(1,1) = 1$;

(2)$a \leqslant c, b \leqslant d \to T(a,b) \leqslant T(c,d)$;

(3)$T(a,b) = T(b,a)$;

(4)$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$。

若三角模满足 $T(a,1) = a(a \in [0,1])$,称为 T 模;若三角模满足 $T(0,a) = a(a \in [0,1])$,称为 S 模

例 9　下面的模是 T 模

$$T_0^1(a,b) = \begin{cases} a & b = 1 \\ b & a = 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$T_0(a,b) = a \wedge b$$

$$T_1(a,b) = a \cdot b$$

$$T_2(a,b) = \frac{a \cdot b}{1 + (1-a)(1-b)}$$

$$T\infty(a,b) = \max(0, a + b - 1)$$

下面的模是 S 模:

$$S_0^1(a,b) = \begin{cases} b, & a = 0 \\ a, & b = 0 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

$$S_0(a,b) = a \vee b$$

$$S_1(a,b) = a + b - a \cdot b$$

$$S_2(a,b) = \frac{a + b}{1 + a \cdot b}$$

$$S\infty(a,b) = \min(1, a + b)$$

三角模有如下性质:

(1)$\forall\, T \in D(T) \Rightarrow T_0^1 \leqslant T \leqslant T_0$

(2)$\forall\, S \in D(S) \Rightarrow S_0 \leqslant S \leqslant S_0^1$

(3)$T\in D(T),T=T_0\Leftrightarrow T(a,a)=a(\forall a\in[0,1])$；

(4)$S\in D(S),S=S_0\Leftrightarrow S(a,a)=a(\forall a\in[0,1])$。

定义 2.2.3 设 T 模 T 和 S 模 S 为对偶模，称

$$(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})(x)=S(\underset{\sim}{A}(x),\underset{\sim}{B}(x))$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的模并；称

$$(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})(x)=T(\underset{\sim}{A}(x),\underset{\sim}{B}(x))$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的模交；称

$$\underset{\sim}{A}^c(x)=\underset{\sim}{A}(x)^1=1-\underset{\sim}{A}(x)$$

为 A 的补，其中 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(x)$。

模并与模交有以下性质：

(1)$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup \underset{\sim}{A}$；

(2) $\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}\subseteq \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}\subseteq \underset{\sim}{B}$，
   $\underset{\sim}{A}\subseteq \underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B}\supset \underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}$；

(3) $(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})\cup \underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap \underset{\sim}{C})$，
   $(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})\cup \underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup \underset{\sim}{C})$；

(4) $\underset{\sim}{A}\cap\phi=\phi,\underset{\sim}{A}\cup\phi=\underset{\sim}{A}$，
   $\underset{\sim}{A}\cap X=\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A}\cap X=X$；

(5) $\phi^c=X,X^c=\phi$；

(6) $(\underset{\sim}{A}^c)^c=A$；

(7) $(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\cap \underset{\sim}{B}^c$

当模糊集合退化为经典集合时，模并运算、模交运算和补运算即为经典集合的并运算、交运算和余运算。因此模糊集合的模运算是经典集合运算的一般化。

§2-3 模糊集与普通集的关系

一、λ水平截集

λ水平截集是在模糊集与普通集相互转化中的一个很重要的概念，在船舶工程界也经常用到。下面先看一个实例。

例 9 某科研所，在一次聘任中，有部分高职岗位缺少合适人选，只好采用中职高聘的办法从优秀的中职技术人员中选出部分人顶岗；通过第一轮预选仅选出 8 位条件较好者，分别用 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8 表示。通过专家评议，并把专家综合评分换算成 100 分制，他们的合适程度分别是：

x_1	100 分	$\mu(x_1)=1$
x_2	93 分	$\mu(x_2)=0.93$
x_3	58 分	$\mu(x_3)=0.58$
x_4	70 分	$\mu(x_4)=0.70$
x_5	84 分	$\mu(x_5)=0.84$
x_6	74 分	$\mu(x_6)=0.74$
x_7	80 分	$\mu(x_7)=0.80$

$$x_8 \qquad 55\text{分} \qquad \mu(x_8) = 0.55$$

现在有关部门要了解"及格"(60 分以上)者有哪些人?"优良"者(80 分以上)和"优秀"者(90 分以上)都有哪些人?统计人员来作这个决策:

"及格"者集合 $A_{0.6} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

"优良"者集合 $A_{0.8} = \{x_1, x_2, x_5, x_7\}$

"优秀"者集合 $A_{0.9} = \{x_1, x_2\}$

这实际上就是按不同的水平确定 n 个普通集合,这些普通集合是对原来的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度先确定一个阈值 $\lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ 之后,再把隶属度 $\mu(x) \geqslant \lambda$ 的元素挑选出来而得到的,对于上例说来就是由

$$\underset{\sim}{A} = 1/x_1 + 0.93/x_2 + 0.58/x_3 + 0.70/x_4 + 0.84/x_5 + 0.74/x_6 + 0.80/x_7 + 0.55/x_8$$

分别确定水平(阈值)$\lambda = 0.6, 0.8, 0.9$ 而得到的:

$$A_{\lambda-0.6} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

$$A_{\lambda-0.8} = \{x_1, x_2, x_5, x_7\}$$

$$A_{\lambda-0.9} = \{x_1, x_2\}$$

在一般情况下,给出 A_λ 的相关定义如下:

定义 2.3.1 设 $A \in F(x), \forall \lambda \in [0,1]$,称

$$\underset{\sim}{A}_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geqslant \lambda\} = A_\lambda$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集,当 $\lambda \neq 1$ 时,称

$$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > \lambda\} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的强 λ 截集(见图 2-4)。

显然,A_λ、$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 均为 X 的普通子集,且有:

$$A_0 = X, \quad A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subset A_\lambda$$

当 $\lambda < \lambda'$ 时,则有:

$$A_{\lambda'} \subset A_\lambda, \quad A_{\underset{\cdot}{\lambda'}} \subset A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

在图 2-4 中,$A_\lambda = [a,b]$,$A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (a,b)$。

定义 2.3.2 设 $\underset{\sim}{A} \in F(x)$,称

$$A_1 = \{x \mid x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\}$$

为 A 的核,称

$$A_0 = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\} = \mathrm{supp}\underset{\sim}{A}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的支集,称 A_0—A_1 为 $\underset{\sim}{A}$ 的边界(见图 2-5)。若 $A_1 \neq \varphi$,称 $\underset{\sim}{A}$ 为正规模糊集,否则为非正规模糊集。若 $x \in X$ 满足 $\mu_A(x) = 1/2$,则称 x 为 $\underset{\sim}{A}$ 的跨点。

称

$$\mathrm{hgt}(\underset{\sim}{A}) = \underset{x \in X}{\mathrm{supp}}\, \mu_{\underset{\sim}{A}(x)}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的高度。

命题 2.3.1 $\forall\, \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(x)$,则

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$$

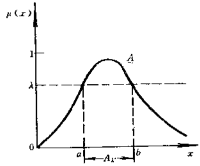

图 2-4 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集

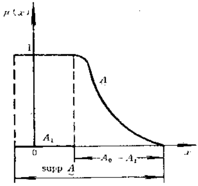

图 2-5 $\underset{\sim}{A}$ 的核、支集、边界

$$(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$$
$$(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$$

证明，仅证第一式，其余类似。事实上

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})_\lambda &= \{x|x\in X,\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)\geqslant\lambda\}\\ &=\{x|x\in X,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\geqslant\lambda\}\\ &=\{x|x\in X,\mu_A(x)\geqslant\lambda\}\cup\{x|x\in X,\mu_B(x)\geqslant\lambda\}\\ &=A_\lambda\cup B_\lambda\end{aligned}$$

命题 2.3.1 可推广到任意有限多个模糊集，称此为有限并(交)对 λ 截集与强 λ 截集的分配性。

二、分解定理

模糊数学是一门年轻的科学，其理论还有待进一步补充、发展、完善。下面介绍其中一个重要定理 —— 模糊集分解定理。

定理 2.3.1(分解定理)　设 $\underset{\sim}{A}$ 为论域 U 的一个模糊子集，A_λ 是 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集，$\lambda\in[0,1]$，则如下分解式成立：

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$$

其中 λA_λ 表示 x 的一个模糊子集，称之为 λ 与 A_λ 的"乘积"，其隶属函数规定为

$$\mu_{\lambda A_\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda & (x\in A_\lambda)\\ 0 & (x\notin A_\lambda)\end{cases}$$

如图 2-6(a) 所示。

证明　$\forall\, x\in U$ 有

$$\begin{aligned}\mu_{\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda}(x) &= \bigvee_{\lambda\in[0,1]}\mu_{\lambda A_\lambda}(x)\\ &=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x)]\\ &=\bigvee_{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda}\lambda\\ &=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\end{aligned}$$

故 $\underset{\sim}{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$。

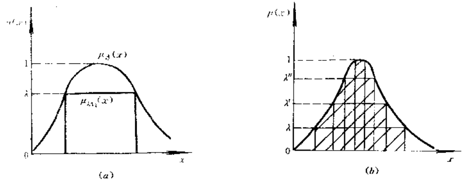

图 2-6　$\mu_{\lambda A_\lambda}(x)$ 及分解定理图示

(a)λA_λ 的隶属函数；(b) 分解定理图示。

对于强 λ 截集，也有类似的分解定理

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$$

下面进一步就其直观意义画图 2-6(b) 来说明，在图中画出三个不同水平 λ、λ'、λ'' 的 $\mu_{\lambda A_\lambda}(x)$ 的图形。设想当 λ 取遍[0,1]闭区间所有值时，$U_{\lambda A_\lambda}$ 按模糊子集求并运算法则，也就是取各

$$\lambda\in[0,1]$$

点隶属函数的最大值，再连成一点曲线，这自然就与 $\lambda_A(x)$ 的曲线重合，这个定理就是分解定理。

分解定理也可以用隶属函数的形式写出。

定理 2.3.2　设 $\underset{\sim}{A}$ 是论域 U 上的模糊子集，$\lambda_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 是它的隶属函数，则有：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))$$

证明

$$\begin{aligned}&\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))\\&=\Big[\bigvee_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))\Big]\vee\Big[\bigvee_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))\Big]\end{aligned}$$

当 $\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 时，$x\notin A_\lambda$，$x_{A_\lambda}(x)=0$，故有：

$$\bigvee_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))=\bigvee_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge 0)=0$$

又

$$\begin{aligned}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))&=\bigvee_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge x_{A_\lambda}(x))\\&=\bigvee_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}(\lambda\wedge 1)\\&=\bigvee_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}\lambda\\&=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\end{aligned}$$

分解定理是联系模糊集与普通集的桥梁。模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 可由一个普通集族 $\{A_\lambda|0\leqslant\lambda\leqslant1\}$ 中刻划。对于 $x\in X$(或 U)，我们不说 x 是否属于某模糊集 $\underset{\sim}{A}$，而只能说 x 以多大程度隶属于 $\underset{\sim}{A}$，或者说 x 属于某个 A_λ 或 A_λ。

例 10　设

$$\underset{\sim}{A}=\{0.8/x_1,0.3/x_2,0/x_3,0.5/x_4,1/x_5,0.1/x_6\}$$

$\underset{\sim}{A}$ 的分解式可写成：

$$\underset{\sim}{A}=0.1\cdot\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}\cup 0.3\cdot\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$$
$$\cup 0.5\cdot\{x_1,x_4,x_5\}\cup 0.8\cdot\{x_1,x_5\}\cup 1\cdot\{x_5\}$$

反之，若有限个互异的 $\underset{\sim}{A}_{\lambda_i}$ 已知，且对任意 λ_i,λ_j，若 $\lambda_i\leqslant\lambda_j$，就有 $A_{\lambda_j}\leqslant A_{\lambda_i}$，则可通过对 $\underset{\sim}{A}_{\lambda_i}$ 的综合得一模糊集 $\underset{\sim}{A}$。如下例：

例 11 设 $\underset{\sim}{A}_{\lambda_i}$ 已知为

$$\underset{\sim}{A}_{0.1}=\{1/x_1,1/x_2,1/x_3,1/x_4,0/x_5,1/x_6,1/x_7,1/x_8\}$$
$$\underset{\sim}{A}_{0.2}=\{0/x_1,1/x_2,1/x_3,1/x_4,0/x_5,1/x_6,1/x_7,1/x_8\}$$
$$\underset{\sim}{A}_{0.3}=\{0/x_1,1/x_2,1/x_3,0/x_4,0/x_5,1/x_6,1/x_7,0/x_8\}$$
$$\underset{\sim}{A}_{0.8}=\{0/x_1,0/x_2,1/x_3,0/x_4,0/x_5,1/x_6,1/x_7,0/x_8\}$$
$$\underset{\sim}{A}_{1}=\{0/x_1,0/x_2,0/x_3,0/x_4,0/x_5,1/x_6,0/x_7,0/x_8\}$$

则

$$\underset{\sim}{A}=\{0.1/x_1,0.3/x_2,0.8/x_3,0.2/x_4,0/x_5,1/x_6,0.8/x_7,0.2/x_8\}$$

§2-4 扩 展 原 理

扩展原理与前节介绍的分解定理都是模糊数学的重要定理。前者把普通集合论的方法扩展到模糊集论中去；而后者把模糊集论问题转化为普通集合问题来解。

定义 2.4.1 设有两个集合 X 和 Y，给定一映射

$$f:X\to Y$$

若 $A\subset X$，则称

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

为 A 在 f 下的象。

若 $B\subset Y$，则称

$$f^{-1}(B)=\{x\,|\,f(x)\in B\}$$

为 B 在 f 下的原象。

由定义 2.4.1 知 f 可诱导出一个新的映射，仍记作 f。

$$f:P(x)\to P(y)$$
$$A\mapsto f(A)=\{y\,|\,y=f(x),x\in A\}$$

用特征函数来表示，有：

$$\chi_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\chi_A(x)$$

此处约定当 $f^{-1}(y)=\varphi$ 时，$\chi_{f(A)}(y)=0$。

f 也可诱导出另一映射，记作 f^{-1}。

$$f^{-1}:P(y)\to P(x)$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)=\{x\,|\,f(x)\in B\}$$

用特征函数来表示，有：

$$\chi_{f^{-1}(B)}(x)=\chi_B(f(x))$$

如果在 X 上给定一模糊集 $\underset{\sim}{A}$,经过映射 f 之后变成什么呢?这个问题在1975年前,谁也讲不清楚。

1975 年 L. A. 扎德给出了著名的扩展原理,解决了此类问题,即将 f 扩展到 $F(x)$ 与 $F(y)$ 的问题,并在模糊集论中得到了广泛应用。这个原理可作为公理来使用。

下面给出扩展原理的完整描述:

定理 2.4.1(扩展原理)　设有二个集合 X 和 Y,给出一映射

$$f: X \to Y$$

由 f 诱导一个新的映射,仍记作 f。

$$f: F(x) \to F(y)$$
$$\underset{\sim}{A} \mapsto f(\underset{\sim}{A})$$
$$\mu_{f(\underset{\sim}{A})}(y) = \begin{cases} \bigvee\limits_{f(x)=y} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

由 f 诱导另一个新的映射,记作 f^{-1}。

$$f^{-1}: F(y) \to F(x)$$
$$\underset{\sim}{B} \mapsto f^{-1}(\underset{\sim}{B})$$
$$\mu_{f^{-1}(\underset{\sim}{B})}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(f(x))$$

$f(\underset{\sim}{A})$ 叫 $\underset{\sim}{A}$ 在 f 下的象,$f^{-1}(B)$ 叫 $\underset{\sim}{B}$ 在 f 下的原象。

命题 2.4.1　设 $f: X \to Y$,则有:

(1)$f(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{\phi} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{\phi}$;

(2)$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow f(\underset{\sim}{A}) \subseteq f(\underset{\sim}{B})$;

(3)$f(\bigcup\limits_{i\in\Gamma} \underset{\sim}{A}_i) = \bigcup\limits_{i\in\Gamma} f(\underset{\sim}{A}_i)$;

(4)$f(\bigcap\limits_{i\in\Gamma} \underset{\sim}{A}_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in\Gamma} f(\underset{\sim}{A}_i)$,

且当 f 是单射时等号成立。

证明　(1)、(2) 显然,现证(3)。

$\forall\, y \in Y$,若 $f^{-1}(y) = \phi$,等式显然成立。若 $f^{-1}(y) \neq \phi$,有:

$$\begin{aligned} \mu_f(\bigcup_{i\in\Gamma} \underset{\sim}{A}_i)(y) &= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \mu \bigcup_{i\in\Gamma} \underset{\sim}{A}_i(x) \\ &= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \bigvee_{i\in\Gamma} \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x) \\ &= \bigvee_{i\in\Gamma} \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x) \\ &= \mu \bigcup_{i\in\Gamma} f(A_i)(y) \end{aligned}$$

再证(4)。

$$\begin{aligned} \mu_f(\bigcap_{i\in\Gamma} A_i)(y) &= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \mu \bigcap_{i\in\Gamma} \underset{\sim}{A}_i(x) \\ &= \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} \bigwedge_{i\in\Gamma} \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x) \\ &\leqslant \bigwedge_{i\in\Gamma} \mu_{f(\underset{\sim}{A}_i)}(y) \\ &= \mu \bigwedge_{i\in\Gamma} f(A_i)(y) \end{aligned}$$

若 f 是单射,则 $f^{-1}(y) = \phi$ 或 $f^{-1}(y) = \{x\}$,这时在(4)中公式显然成立。

定义 2.4.2　在扩展原理中,若 f 为满射且 $\forall\, y \in Y, \forall\, x \in f^{-1}(y), \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(y)$,