三导丛书

复变函数（西交大·第四版）
积分变换（南工·第三版）

导教·导学·导考

李建林 编

- 重点内容提要
- 学习基本要求
- 考核知识点
- 典型题选解
- 课后习题全解
- 学习效果测试题

西北工业大学出版社

三导丛书

复变函数·积分变换

（西交大·第四版）（南工·第三版）

导教·导学·导考

李建林　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是以复变函数与积分变换基础理论和方法为中心，与同名课程教学与学习相配套的辅助参考资料。全书共八章，每章由内容提要、基本要求与考核知识点、典型题选解、学习效果测试题及答案、课后习题及解答五部分组成，其中课后习题及解答部分对获奖的全国优秀教材：《复变函数》（第4版，西安交大编）和《积分变换》（第3版，南京工学院编）中的习题做了比较详细的解答。书中章节顺序及内容编排与上述两教材一致。

本书可作为复变函数与积分变换课程的教学与学习指导参考书，供工科或理科院校师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 导教·导学·导考/李建林编．—西安：西北工业大学出版社，2001.9(三导丛书)

ISBN 7-5612-1378-6

Ⅰ．复… Ⅱ．李… Ⅲ．①复变函数—高等学校—教学参考资料 ②积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．017

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15452号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 邮编：710072 电话：029-8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西安市向阳印刷厂印装
开　　本：850毫米×1 168毫米 1/32
印　　张：10.6875
字　　数：352千字
版　　次：2001年9月第1版 2002年2月第2次印刷
印　　数：5 001～13 000
定　　价：13.00元

前　言

复变函数与积分变换是高等工科院校中许多专业重要的一门数学基础课，由于内容多，进度快，因此一些比较重要的内容在授课时不得不一带而过，或者删掉，使学生对这门课程内容的理解往往只浮于表面。为了弥补这些不足，有效地帮助广大读者学好这门课，编者根据多年积累的教学经验，按照原国家教委审定的高等工业学校“复变函数课程教学基本要求”和“积分变换课程教学基本要求”，编写了复变函数与积分变换课程教学与学习指导参考书。

全书共八章，前六章为复变函数部分，后二章为积分变换部分。每章由内容提要、基本要求与考核知识点、典型题选解、基本知识测试题及答案、课后习题及解答五部分组成。内容提要部分给出了本章内容的简要总结，以帮助读者抓住要点，提高学习效率。基本要求与考核知识点部分明确的给出了本章的学习目的与要求以及通过学习所要达到的能力层次，以便做到心中有数，有的放矢。在这一部分中，提出了“识记”、“领会”和“简单应用”3个能为层次，它们之间是递进等级关系，后者必须建立在前者的基础上。识记：要求能够识别和记忆本课程中规定的有关知识点的主要内容（如定义、定理、表达式、公式、原理、重要结论、方法、步骤等），并能够根据不同的要求，做出正确的表达、选择和判断。领会：要求能够领悟和理解本课程中规定的有关知识点的内涵与外延，熟悉其内容要点和它们之间的区别与联系，并能够根据不同的要求，做出正确的解释、说明和论述。简单应用：要求能够运用本课程中规定的几个（或多个）知识点，分析和解决一般的问题，如计

算、分析论证等。在典型题选解部分，编者给出了几个具有代表性题目的详细解答，并注重于分析解题思路，揭示解题规律。学习效果测试题及答案部分主要汇编了能反映本章具体要求的一些检测题目，有单项选择题、填空题、计算题与证明题，并给出题目的答案，读者可在自我测试的基础上，对照参考。每章最后一部分是课后习题及解答，主要对西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第4版)和南京工学院数学教研组编写的《积分变换》(第3版)两本教材中的习题做了比较详细的解答。对超出基本要求的习题也加了"*"号，予以解答，供某些专业的读者参考。上述两本教科书均是获奖的全国优秀教材，且由高等教育出版社出版，被多数院校采用。在解答课后习题的过程中，编者基本上按照循序渐近的原则，与两本教材紧密衔接，给出每题一种解法或证法，而且使解答结果尽量与教材后的习题答案保持一致。其实，不少题目有多种解答，其结果也有不同的表达方式，读者不要局限于此书的解答及教材后的习题答案。编写这一部分的目的是使读者能在独立思考完成练习的基础上进行对照参考。编者的愿望是想给读者提供一本与同名课程教学相配套的辅助参考资料，使读者通过阅读本书，能对复变函数与积分变换的理论和方法有更加深入的理解。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点与错误。敬请读者不吝赐教。

编　者

2000年10月9日

目　录

第一章　复数与复变函数

一、内 容 提 要

1. 复数的概念

虚单位 i：$i^2=-1$. 设 x,y 为任意二实数，称 $x+\mathrm{i}y$ 或 $x+y\mathrm{i}$ 为复数，记为 z，即复数 $z=x+\mathrm{i}y$（或 $z=x+y\mathrm{i}$），并称 x,y 分别为 z 的实部与虚部，记为 $x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z)$.

通常规定：

(1)$0-\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$（纯虚数），$x+0\mathrm{i}=x$（实数），$0+\mathrm{i}0=0$；

(2)$z_1=z_2\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2),\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$；

(3) 任意两个复数不能比较大小.

由此易知，$z_1=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=0,\mathrm{Im}(z_1)=0$

2. 复数的代数运算

(1) 复数的加法、减法、乘法、除法四则运算

(2) 复数的共轭及性质

设 $z=x+\mathrm{i}y$，称 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 z 的共轭复数，记为 $\bar{z}$ 或 z^*，即 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 它有如下性质：

ⅰ）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$；$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

ⅱ）$\bar{\bar{z}}=z$，$z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

ⅲ）$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}),\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$

3. 复数的几何表示

(1) 复平面

ⅰ）复平面　复数的一个常用表示方法，即用复平面上的点 (x,y) 表示

复数 $z = x + iy$.

ⅱ) 复数 $z = x + iy$ 用复平面上的向量$\overrightarrow{Oz}$ 表示,从而引入复数 z 的模或绝对值 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,以及非零复数 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 与辐角主值 $\arg z$.

关于复数模的简单关系式:

$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $\quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$,

$|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

$z\bar{z} = |z^2| = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$

$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$(三角不等式)

注意:

①$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$. 零的辐角不确定;

② 辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的多值性:

$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$;

③ 辐角 $\arg z$ 的单值性及计算公式;

④ 复数的加、减运算与相应向量的加、减运算一致.

ⅲ) 复数的三角表示式及指数表示式

给定复数 z,用公式求出 $|z|$ 及 $\arg z$ 后,即得

$$z = |z|\left[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right](\text{三角表示式}) = |z|e^{i\arg z}(\text{指数表示式})$$

(2) 复球面

ⅰ) 复球面　复数可用复球面上的点表示

ⅱ) 无穷远点　复数 ∞: $|\infty| = +\infty$,其实部,虚部与辐角的概念均无意义

ⅲ) 扩充复平面　扩充复平面上的四则运算

通常规定:

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty \quad (\alpha \neq \infty)$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\alpha} = \infty \quad (\alpha \neq \infty)$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty \quad (\alpha \neq 0, \text{但可为 } \infty)$$

注意:复数的各种表示法可以互相转化,以适应讨论不同问题时的需要.

4. 复数的乘幂与方根

(1) 积与商

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2 \neq 0)$$

即

ⅰ) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$

ⅱ) $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2, \ \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$

注意:① 正确理解等式 ⅱ) 的含义;

② 乘积与商的几何解释.

(2) 乘幂　设 $z = re^{i\theta}$,则 $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. 棣莫弗(De. Moivre) 公式:$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 及其应用.

(3) 方根　设 $z = re^{i\theta}$, 则 $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$

注意:$\sqrt[n]{z}$ 的 n 值性及几何解释

5. 复平面上的区域

(1) 邻域、去心邻域、内点、开集、连通集、区域、边界点、边界、闭区域,有界集等概念

(2) 平面曲线方程的复数形式

把平面上曲线方程写成参数形式;$x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. 通常令 $z = x + iy, z(t) = x(t) + iy(t)$,即得此曲线方程的复数形式:$z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. 也可将 x,y 满足的关系式中 x 换为 $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,y 换为 $\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ 后转化为 z 与 $\bar{z}$ 满足的关系式而得其复数形式. 反之,给定复数形式的方程,按此法可确定它表示何种曲线.

(3) 连续曲线、光滑曲线、简单闭曲线的概念

(4) 单连通域与多连通域概念

注意:用复数表达式表示一些常见的区域,或根据给定的复数表达式指

出它所表示的何种区域.

6. 复变函数

复变函数与映射(或变换)的概念,一个复变函数与一对二元实变函数的关系.

注意:① 复变函数的概念,在形式上与实变函数中相应概念完全一样;

② 复变函数在几何上作为映射(或变换)的意义.

7. 复变函数的极限

(1) 极限的概念以及与实变函数极限概念的区别.

(2) 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=a+ib$, $z_0=x_0+iy_0$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$$

此结论把复变函数 $f(z)$ 的极限问题转化为两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的二重极限问题,而且使得高等数学中有关二重极限的许多性质如运算法则等对于复变函数也成立.

8. 复变函数的连续性

复变函数的连续性的概念、运算法则及性质,它们与实变函数中相应概念、运算法则及性质的区别与转化.

二、基本要求与考核知识点

1. 复数的概念及其代数运算,要求达到"领会"层次

(1) 熟悉复数的概念;

(2) 掌握复数的四则运算及共轭运算.

2. 复数的几何表示及其乘幂与方根运算,要求达到"简单应用"层次

(1) 熟悉复平面、模与辐角的概念;

(2) 熟练掌握复数的各种表示法;

(3) 了解复球面、无穷远点以及扩充复平面的概念;

(4) 熟练掌握乘积与商的模与辐角定理,乘幂的棣莫弗公式,方根运算公式;

(5) 掌握复数各种运算的几何意义.

3. 复平面上的区域及其复变函数,要求达到"领会"层次

(1) 理解区域、简单曲线、单连通域与多连通域等概念；

(2) 掌握用复变数的方程来表示常用曲线以及用不等式表示区域；

(3) 理解复变函数以及映射的概念；

(4) 了解复变函数与二元实函数的关系.

4. 复变函数的极限和连续性，要求达到“识记”层次

(1) 了解复变函数的极限与连续性的概念；

(2) 熟悉复变函数的极限和连续性的运算法则与性质；

(3) 熟悉复变函数的极限和连续性与实变函数的极限和连续性之间的区别与联系.

本章的重点：(1) 复数的运算和各种表示法；

(2) 复变函数以及映射的概念

本章的难点：(1) 复数方程表示曲线以及不等式表示区域；

(2) 映射的概念

三、典型题选解

例 1-1 设 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$，试将复数 $z = 1 + \sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi$ 化为三角表示式与指数表示式.

解法 1 由公式，注意到 $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，可得

$$|z| = \sqrt{(1+\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi} = \sqrt{2(1+\sin\varphi)} =$$

$$\sqrt{2}(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}) = 2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = 2\cos\frac{\pi - 2\varphi}{4},$$

$$\arg z = \arctan\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = \arctan\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})^2} =$$

$$\arctan\frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi - 2\varphi}{4}$$

故 $\quad 1 - \sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi =$

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\left(\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-2\varphi}{4}\right)\text{（三角表示式）}=$$

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-2\varphi}{4}}\text{（指数表示式）}$$

解法 2 利用三角公式，可知

$$1+\sin\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=$$

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\left(\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-2\varphi}{4}\right)\text{（三角表示式）}=$$

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-2\varphi}{4}}\text{（指数表示式）}$$

例 1-2 计算 $1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots+\omega^{(n-1)h}$，其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，$h$ 为整数且不是 n 的倍数.

解 因 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，所以当 h 不是 n 的倍数时，由棣莫弗公式得

$$\omega^h=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^h=\cos\frac{2\pi h}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi h}{n}\neq 1$$

于是

$$1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots+\omega^{(n-1)h}=\frac{1-\omega^{nh}}{1-\omega^h}$$

但 $\omega^{nh}=\cos 2\pi h+\mathrm{i}\sin 2\pi h=1$，故

$$1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots+\omega^{(n-1)h}=\frac{1-1}{1-\omega^h}=0$$

例 1-3 设 a，b 为实数，$b\neq 0$，$a+\mathrm{i}b$ 的模为 1，则复数 $a+\mathrm{i}b$ 可表示为

$$a+\mathrm{i}b=\frac{c+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}}\text{，其中 } c \text{ 为实数.}$$

【分析】 在证明难于着手时，“逆推”常是一种探索证明的有效方法. 对于此题

若存在实数 c 使 $a+\mathrm{i}b=\frac{c+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}}$（因 c 为实数，所以 $c\neq \mathrm{i}$）$\Leftrightarrow$

$c+\mathrm{i}=(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i})\Leftrightarrow c(1-a-\mathrm{i}b)=-\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b+1)\Leftrightarrow$

$$c=\frac{a+ib+1}{a+ib-1}\mathrm{i}\ (因\ b\neq 0，所以\ 1-a-ib\neq 0)$$

只要验证$\frac{a+ib+1}{a+ib-1}\mathrm{i}$为实数$\Leftrightarrow \frac{a+ib+1}{a+ib-1}$为纯虚数即可.

证 由$b\neq 0$易知$a+ib\neq 1$(或$a+ib-1\neq 0$)，又$a+ib$的模为1，即$a^2+b^2=1$易知$a\neq 1$，并且

$$\frac{a+ib+1}{a+ib-1}=\frac{(a+ib+1)(a-1-ib)}{(a-1+ib)(a-1-ib)}=$$

$$\frac{(a^2+b^2-1)-2b\mathrm{i}}{(a-1)^2+b^2}=\frac{-2b\mathrm{i}}{a^2+b^2-2a+1}=$$

$$\frac{-b}{1-a}\mathrm{i}$$

为纯虚数. 于是取实数$c=\frac{a+ib+1}{a+ib-1}\mathrm{i}=\frac{b}{1-a}$，即得复数$a+ib$可表示为

$$a+ib=\frac{c+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}}，其中\ c\ 为实数.$$

例 1-4 设复数α满足$|\alpha|<1$，试证

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\begin{cases}=1，当\ |z|=1\\<1，当\ |z|<1\\>1，当\ |z|>1\end{cases}$$

【分析】 比较复数$\frac{z_1}{z_2}$的模$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$与1的大小等价于比较$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$与1的大小，也相当于比较$|z_1|^2$与$|z_2|^2$的大小. 此时常用公式$|z|^2=z\bar{z}$，$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$以及三角不等式.

证 由等式

$$|z-\alpha|^2=|z|^2+|\alpha|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)$$
$$|1-\bar{\alpha}z|^2=1+|\alpha|^2|z|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2=(|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

注意到$|\alpha|<1$，便有

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2\begin{cases}=0，当\ |z|=1\\<0，当\ |z|<1\\>0，当\ |z|>1\end{cases}$$

从而

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}\begin{cases}=1, & 当\ |z|=1\\ <1, & 当\ |z|<1\\ >1, & 当\ |z|>1\end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

例 1-5 设 $z\neq 0$,试证

$$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$$

【分析】 因 $z\neq 0$,而要证不等式中含有 $|z|$,$\arg z$ 及 $\big||z|-1\big|$,所以应该想到设 $z=|z|e^{i\arg z}$,并改写 $|z-1|=\big|z-|z|+|z|-1\big|$,利用一些已知不等式如三角不等式等.

证 设 $z=|z|e^{i\arg z}$,$\theta=\arg z$,$-\pi<\theta\leqslant\pi$,则

$$\begin{aligned}|z-1|=&\big|z-|z|+|z|-1\big|\leqslant\big||z|-1\big|+\big|z-|z|\big|=\\&\big||z|-1\big|+|z||\cos\theta+i\sin\theta-1|=\\&\big||z|-1\big|+|z|\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\\&\big||z|-1\big|+2|z|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant\\&\big||z|-1\big|+|z||\theta|\ (由\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=\sin\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{|\theta|}{2},0\leqslant\\&\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{\pi}{2})=\big||z|-1\big|+|z||\arg z|\end{aligned}$$

例 1-6 试证以 z_1 与 z_2 为直径的两端点的圆周方程是 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\}=1\ (z\neq z_1)$,且当点 z 在圆内时有 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\}>1$;当点 z 在圆外时有 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\}<1$.

证法 1 设 L 是以 z_1 与 z_2 为直径的两端点的圆周,则此圆周 L 的圆心为 $\frac{z_1+z_2}{2}$,半径为 $\frac{|z_2-z_1|}{2}$. 于是圆周 L 的方程为

$$\begin{aligned}&\left|z-\frac{z_1+z_2}{2}\right|=\frac{|z_1-z_2|}{2}\Leftrightarrow\\&|(z-z_1)+(z-z_2)|=|(z-z_1)-(z-z_2)|\\&\xLeftrightarrow{同除\ |z-z_1|}\left|1+\frac{z-z_2}{z-z_1}\right|=\left|1-\frac{z-z_2}{z-z_1}\right|\end{aligned}$$

两边平方后，利用恒等式 $|\alpha \pm \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\beta)$，等价地有

$$2\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\} = -2\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\}$$

即 L 的方程等价地可写为 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\} = 0$. 而且当 z 在 L 内时，上面"$=$"换为"$<$"即有 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\} < 0$. 同理当 z 在 L 外时有 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\} > 0$.

又因为 $\frac{z-z_2}{z-z_1} = 1 - \frac{z_2-z_1}{z-z_1}$，所以 L 的方程为 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} = 1$，当 z 在 L 内时 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} > 1$；当 z 在 L 外时 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} < 1$.

证法 2 在以 z_1 及 z_2 为直径的两端点的圆周上任取一点 z，且 $z \neq z_1$，$z \neq z_2$，则结合平面几何知识易得 $\angle z_1 z z_2 = \frac{\pi}{2}$，$\arg\frac{z_2-z}{z_1-z} = \pm\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{z_2-z}{z_1-z} = \mathrm{i}t$（纯虚数，$t$ 为实数）. 于是

$$1 + \frac{z_1-z_2}{z-z_1} = \mathrm{i}t,\ \mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} = 1$$

反之，满足 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} = 1$ 的 z 必在上述圆周上. 故上述圆周的方程为 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} = 1$.

又 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} = 1 - \mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_2}{z-z_1}\right\} = 1 - \left|\frac{z-z_2}{z-z_1}\right|\cos\left(\arg\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)$，当 z 在圆内时，$\frac{\pi}{2} < \arg\frac{z-z_2}{z-z_1} \leqslant \pi$（或 $-\pi < \arg\frac{z-z_2}{z-z_1} < -\frac{\pi}{2}$，或 $\mathrm{Arg}\frac{z-z_2}{z-z_1} = -\pi$），此时 $\cos(\arg\frac{z-z_2}{z-z_1}) < 0$，等价地 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} > 1$. 当 z 在圆外时，$-\frac{\pi}{2} < \arg\frac{z-z_2}{z-z_1} < \frac{\pi}{2}$，此时 $\cos(\arg\frac{z-z_2}{z-z_1}) > 0$，等价地 $\mathrm{Re}\left\{\frac{z_2-z_1}{z-z_1}\right\} < 1$.

例 1-7 求满足关系式 $\cos\theta < r < 3\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 的点 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 的集合 G. 若 G 为一区域，则指明它是单连通域还是多连通域.

解 由 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$，可知

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

于是所给的关系式 $\cos\theta < r < 3\cos\theta$ 变为

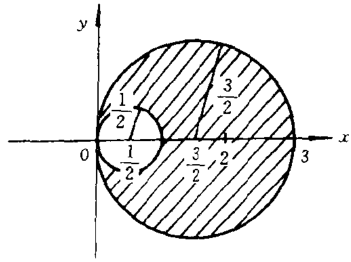
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

或

$$x < x^2 + y^2 < 3x$$

等价地有

$$\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 < \frac{9}{4} \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$



例 1-7 题图

所求点集 G 为图中的阴影部分,它是一个单连通区域.

例 1-8 函数 $w = z^2$ 把下列曲线映射成 w 平面上怎样的曲线?

1) 以原点为中心,2 为半径,在第一象限里的圆弧;

2) 倾角 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的直线;

3) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解 设 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$w = u + iv = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

则 $w = z^2$ 相当于

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \text{或} \begin{cases} R = r^2 \\ \varphi = 2\theta \end{cases}$$

1) 当 z 的模 r 为 2,辐角 θ 由 0 变至 $\frac{\pi}{2}$(描绘出第一象限里的圆弧)时,对应的 w 的模 R 为 4,辐角 φ 由 0 变至 π. 故在 w 平面上的映像为:以原点为中心,4 为半径,在 u 轴上方的半圆周.

2) z 平面上倾角 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的直线可看成是由 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的射线与 $\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$ 的射线组成,而射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的映像为 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$,射线 $\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$ 的映像为 $\varphi = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. 故 z 平面上倾角 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的直线的映像为 w 平面上射线 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.