工程数学学习指导书

（电类各专业用）

廖祖纬　魏振军　王可宪　编

中央广播电视大学出版社

(京)新登字 163 号

工程数学学习指导书
(电类各专业用)
廖祖纬　魏振军　王可宪　编
*
中央广播电视大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京第二新华印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　印张 5.5　千字 137
1993 年 7 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—15700
定价 3.45 元
ISBN 7-304-00850-4/O·69

前　言

本书是中央广播电视大学电类各专业工程数学课程的指导书。按照教学大纲的精神和张尧庭教授主编的《工程数学》(中央广播电视大学　1993)教材以及一年级下学期的学生仅具备一元微积分的基础知识,本书力图体现以下两点:

第一. 按大专层次,对各章的重点作出扼要的交代,第一章以事件及其概率概念以及加法公式和乘法公式为重点;第二章以服从二项分布、正态分布的随机变量以及期望值和方差的计算为重点;第三章以随机变量的相互独立性以及独立和的期望值和方差为重点;第四章以最大似然估计,1→1 线性回归分析(最小二乘估计和 F 检验)为重点;第五章以解析函数概念以及函数在极点处的留数计算为重点;第六章以拉氏变换及其性质以及在求解线性常微分方程中的应用为重点。

第二. 结合学生的实际情况,对学习中可能产生的疑难问题给予应有的重视,并围绕各章重点和难点运用一些典型例题进行有针对性的辅导。

本书每章均由四个部分组成:一. 教学基本要求;二. 内容提要;三. 重点与难点;四. 重点、难点解析。前四章(概率统计部分)附有部分问题的解答,后两章的问题在面授课上解答。

本书前三章由魏振军编写;第四章由王可宪、廖祖纬合编;后两章由廖祖纬编写。最后由廖祖纬统稿,张尧庭教授审阅。尽管我们花了很大的功夫,但本书还不够成熟。不妥之处,谨表歉意,并热忱欢迎广大读者批评指正。

编　者

1993. 3.

目　录

第一章　随机事件及概率

一、教学基本要求

1. 理解随机事件、概率、条件概率、独立性四个基本概念。

2. 了解事件关系及其运算。着重理解事件的“和”、“积”、“对立事件”及相应的概率性质。

3. 能应用概率加法公式和乘法公式解决简单概率问题。

4. 了解全概率公式和贝叶斯公式。

5. 会解简单的古典概型概率问题。

二、内容提要

1. 讲述随机事件及其概率的概念，介绍古典概型。

2. 通过几个简单的随机试验，揭示随机事件一个极其重要的特性——频率稳定性。说明频率与概率的关系。

3. 介绍事件的关系及运算，概率的有关性质；给出计算概率的重要公式—加法公式，并说明其应用。

4. 介绍条件概率、独立性的概念；给出计算概率的又一重要公式—乘法公式，并说明其应用。介绍全概率公式和贝叶斯公式。

三、重点与难点

本章重点是：

(1) 四个基本概念：随机事件、概率、条件概率、独立性。

(2) 两个公式：加法公式和乘法公式。

本章难点是：

古典概型中概率计算；

条件概率；全概率公式、贝叶斯公式的应用。

四、重点、难点解析

1. 随机事件

(1) 正确理解随机事件的概念。

随机事件具有以下特点：

首先，随机事件的发生具有偶然性。在一次试验中，可能发生，也可能不发生。例如，掷一枚硬币，“出现正面”是一个随机事件，因为在一次试验中，该事件是否发生事先并不知道。

其次，在大量重复试验中，随机事件的发生具有某种规律性。例如，掷一颗骰子，“掷出 6 点”是一个随机事件。在大量重复试验中，该事件出现的频率稳定地在$\frac{1}{6}$附近摆动，并且一般来说，摆动的幅度随着试验次数的增多而变小。

(2) 对于事件的运算，要熟悉事件的和、积及对立事件。

对于一个具体事件，要会用数学符号表示；反之，对于用数学符号表示的事件，要清楚其

具体意义是什么。就是说，要能正确无误地“互译”出来。例如，从一批产品中任取两件，观察合格品的情况。记 $A=\{$两件产品都是合格品$\}$，初学者往往误以为 $\overline{A}=\{$两件产品都是不合格品$\}$。我们知道 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，它表示 A 不出现或者说是 A 的否定。所以 $\overline{A}=\{$两件产品不都是合格品$\}$。但在概率论里，常常叙述为 $\overline{A}=\{$两件产品中至少有一件是不合格品$\}$。而这又可写为两个互不相容事件之和：$\overline{A}=\{$两件产品中恰有一件是不合格品$\}\cup\{$两件产品都是不合格品$\}$。若记 $B_i=\{$取出的第 i 件是合格品$\}$，$i=1,2$。则 $A=B_1B_2$，而 $\overline{A}=\overline{B_1B_2}=\overline{B}_1\cup\overline{B}_2=\overline{B}_1B_2\cup B_1\overline{B}_2\cup\overline{B}_1\overline{B}_2$。

2. 概率

在实际问题中，搞清随机事件的概念是研究随机现象的第一步。我们关心的主要问题是：所考虑的随机事件 A 在一次试验中发生的可能性大小。我们把度量事件 A 发生可能性大小的数量指标叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$。

对于一个随机事件来说，它发生可能性大小的度量是由它自身决定的，并且是客观存在的。就好比一根木棒有长度，一块土地有面积一样，概率是随机事件发生可能性大小的度量，是随机事件自身的一个属性。那么要问，对一个给定的随机事件，它的概率究竟是多大呢？《教材》(指《工程教学》，以下简称教材)§1.3，§1.4 给出了两种计算或估计事件概率的方法，注意它们各自的适用范围。

3. 古典概型中的概率计算

《教材》§1.3 中(1・3・1)式给出了古典概型中任一事件 A 出现概率的计算公式：

对于古典概型，任一事件 A 出现的概率

$$P(A)=\frac{\text{导致 } A \text{ 出现的结果数}}{\text{等可能结果总数}}=\frac{k}{n}$$

在应用此公式计算概率时，首先要判明所讨论的问题是否是古典概型？其次，当问题是古典概型时，公式中的 n,k 如何确定？

例如，抛掷两枚均匀硬币，有人认为这个试验只有 3 种可能结果：“正正”，“反反”，“一正一反”。因此 $P(\text{一正一反})=\frac{1}{3}$。错误出在上述 3 种结果不是等可能的。结果“一正一反”应分为两个：“正反”，“反正”。而这四种结果：“正正”，“反反”，“正反”，“反正”，据对称性和经验才是等可能的。因此 $P(\text{一正一反})=P(\text{正反})+P(\text{反正})=\frac{1}{2}$。

在计算公式中的 n,k 时，常用的几个排列组合计数公式如下：

选排列：$P_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$

全排列：$P_n=P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1=n!$

组合：$C_n^k=P_n^k/P_k^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

允许重复的排列：从 n 个不同元素中选出 k 个排成一列，每个元素可以重复出现，其排列种数有 n^k 种。

让我们看一个例子(习题一第 3 题)：

例 1.1 甲、乙、丙三人随意去住三间房子，求

(1) 每间恰有一人的概率是多少？

(2) 恰好空一间的概率是多少？

解 相当于顾客甲、乙、丙去选房间，每人都有三间房可供选取。故共有

$$n=3^3=27$$

种等可能结果。

(1) 设 $A=\{$每间恰有一人$\}$。

导致 A 出现的结果数为甲、乙、丙三人全排列的总数，即

$$k=3!\ =6$$

于是
$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

(2) 设 $B=\{$恰好空一间$\}$

3 间中可空任何一间。指定某间为空房后，其余两间三人去住，必有一间住二人，一间住一人，有 $C_3^2\times 2$ 种住法。故

$$k=C_3^2\times 2\times 3=18$$

所以
$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

还可以作如下考虑：

空一间房，必有一间住了二人，一间住一人。先从三人中选一人，再从三间中选一间让他一人住，剩下两人合住余下的两间之一。共有 $C_3^2\times C_3^1\times 2$ 种住法。即

$$k=C_3^2\times C_3^1\times 2=18$$

于是

$$P(B)=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

如考虑到互为对立事件的事件间的概率关系：$P(B)=1-P(\overline{B})$

本题还可以先求 $P(\overline{B})$，再求 $P(B)$。

因为$B=\{$恰好空一间$\}$的对立事件是

$\overline{B}=\{$空两间或每间全有人$\}$

由(1)，$P\{$每间全有人$\}=P\{$每间一人$\}=\frac{2}{9}$

而 $P\{$空两间$\}=P\{$三人住一间$\}=\frac{C_3^1}{27}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

于是 $P(\overline{B})=P\{$空两间$\}+P\{$每间全有人$\}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

从而
$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

三种解法，结果相同。其中最后一种解法还用到概率的运算性质。

4. 条件概率

(1) 条件概率 $P(A|B)$与概率 $P(A)$的区别

每一个随机试验都是在一定条件下进行的。设 A 是随机试验的一个事件，则 $P(A)$是在一定条件下事件 A 发生的可能性大小。而条件概率 $P(A|B)$是指在原条件下又添加“B 发生”这个条件时 A 发生的可能性大小。即 $P(A|B)$仍是概率。$P(A)$与 $P(A|B)$的区别在于两者发生的条件不同。它们是两个不同的概念，在数值上一般也不相等。

(2) 条件概率 $P(A|B)$与 $P(A)$的数值关系。

条件概率 $P(A|B)$是在原随机试验条件下又添加“B 发生”这个条件时 A 发生的可能性大小，既然添加了新的条件，是否一定有 $P(A|B)\geqslant P(A)$呢？请看下面几种情形。

(1) A、B 互不相容，即 $P(AB)=0$，

由于
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$$

故有
$$P(A|B)\leqslant P(A)$$

(2) $A\subset B$，此时 $P(AB)=P(A)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\text{，而 } 0<P(B)\leqslant 1$$

故有
$$P(A|B)\geqslant P(A)$$

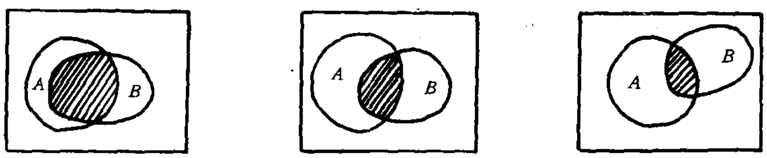
(3) $A\supset B$，此时，$P(AB)=P(B)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

故有
$$P(A|B)\geqslant P(A)$$

(4) A，B 既不是互不相容又不是有包含关系

例如，$P(A)=0.5$　$P(B)=0.4$　$P(AB)>0$



(a)$P(A|B)>P(A)$　(b)$P(A|B)=P(A)$　(c)$P(A|B)<P(A)$

图 1-1

(a) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.38}{0.40}=0.95>P(A)$

(b) $P(A|B)=\dfrac{0.20}{0.40}=0.5=P(A)$

(c) $P(A|B)=\dfrac{0.10}{0.40}=0.25<P(A)$

见图 1-1。

现在，你可以做出回答了。

(3) $P(A|B)$与 $P(BA)$的区别

这也是初学者容易混淆的问题之一，尤其在实际问题的计算中，初学者往往分不清求的是 $P(A|B)$还是 $P(BA)$。

$P(A|B)$是指在 B 发生的条件下 A 发生的概率，而 $P(BA)$是指 B、A 都发生的概率。因而，“B 发生”在 $P(A|B)$中是作为条件，而在 $P(BA)$中是作为结果，所以两者完全不同。

例 1.2　甲、乙两厂共同生产 1000 个零件，其中有 300 个是乙厂生产的，而在这 300 个零件中，有 189 个是标准件，现从这 1000 个零件中任取一个，问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

我们令　　$B=\{$取一个是乙厂生产的$\}$

　　　　　$A=\{$取一个是标准件$\}$

则所求为 $P(BA)$，即从 1000 个零件中取一个是乙厂的标准件的概率

$$P(BA)=\frac{189}{1000}=0.189$$

若将上例后半部分改为：现从这1000个零件中任取一个，发现它是乙厂生产的，问它是标准件的概率是多少？这里所求的就是$P(A|B)$，它相当于在乙厂生产的零件中取一个是标准件的概率。

$$P(A|B)=\frac{189}{300}=0.63$$

5. 加法公式与乘法公式

教材上给出了加法公式（加法公式与广义加法公式）和乘法公式。它们在计算概率时十分有用。要牢固掌握。

(1) 加法公式与广义加法公式

概率的加法公式是：

若事件A、B互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

它表达了概率的最基本的特性：可加性。使用此公式时要注意A、B互不相容这一条件。将它推广到n个事件的情形，便得到概率的有限可加性：

设n个事件A_1、$A_2\cdots$。A_n互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

例1.3 向三个相邻的军火库投掷一颗炸弹，炸中第一军火库的概率为0.025，炸中其余两个军火库的概率为0.1。只要炸中一个，另外两个也要爆炸。求军火库发生爆炸的概率。

分析 投掷一颗炸弹，只要炸中一个军火库，另两个也要发生爆炸。所以，“军火库爆炸”这一事件，是炸中第一、第二、第三军火库这几个事件之和，于是可根据概率的加法公式求解。

设A_i表示“第i个军火库被炸中”，$i=1,2,3$依题设，有

$$P(A_1)=0.025,P(A_2)=P(A_3)=0.1$$

又设D表示“军火库爆炸”，则

$$D=A_1+A_2+A_3$$

注意到A_1,A_2,A_3是互不相容的（即两两互不相容），就得

$$P(D)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.025+0.1+0.1=0.225$$

即军火库爆炸的概率为0.225。

若事件A、B不是互不相容的，有下面的广义加法公式：

对任意两事件A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

它的证明用到加法公式（参见教材）。而且，当A、B互不相容时，加法公式是广义加法公式的特殊情形。

(2) 乘法公式

将定义条件概率的式子加以改写，便得到乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad(P(A)>0)$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0)$$

它反映了 $P(A),P(A、B),P(B|A)(P(B),P(AB),P(A1B))$之间的运算关系，为事件积的概率的计算提供了方便

乘法公式可以推广到两个以上事件：

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_j)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j) \qquad n\geqslant 3$$

让我们来看一个例子：

例 1.4 罐中有 n 个白球，m 个黑球，从中任取一球观察颜色，并约定：若为黑球则放回后再加进 b 个黑球；若为白球则放回不再加球。求

1) 出黑白黑白的概率；

2) 连续四次出黑的概率。

解 设 $A_i=\{$第 i 次出黑$\}$ $\quad i=1,2,3,4$

(1) P(出黑白黑白)$=P(A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4})$

$$=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})P(\overline{A_4}|A_1\overline{A_2}A_3)$$

$$=\frac{m}{n+m}\cdot\frac{n}{n+m+b}\cdot\frac{m+b}{n+m+b}\cdot\frac{n}{n+m+2b}$$

(2) P(连续四次出黑)$=P(A_1A_2A_3A_4)$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)$$

$$=\frac{m}{n+m}\cdot\frac{m+b}{n+m+b}\cdot\frac{m+2b}{n+m+2b}\cdot\frac{m+3b}{n+m+3b}$$

从效果上看，取到黑球时增加了下一次也取到黑球的概率。这里，我们得到了一个如传染病现象的粗糙的模型，其中，每一次传染以后都增加再传染的概率。

由本例不难看到，在用乘法公式计算概率时，关键在于条件概率的计算。

6. 全概率公式和贝叶斯公式

在概率计算中，有时要综合利用加法公式和乘法公式才能解决问题。这就是教材上介绍的全概率公式与贝叶斯公式。

可以简略地说，全概率公式用于已知原因求结果；而贝叶斯公式恰好相反，是已知结果求原因。

例 1.5 （见问题 1·8·3），发报台分别以概率 0.6 与 0.4 发出信号“.”和“—”。由于通讯系统受到干扰，当发出信号为“.”时，收报台未必收到信号“.’，而分别以概率 0.8 与 0.2 收到信号“.”和“—”。同样，当发出信号“—”时，收报台分别以概率 0.9 与 0.1 收到信号“—”和“.”。求

(1) 收报台收到信号“.”的概率

(2) 当收报台收到信号“.”时，发报台确是发出信号“.”的概率。

解 (1) 是由原因求结果。结果是“发报台收到信号‘.’”(记为事件 B)。得到这一结果有两个原因：“发报台发出信号‘.’“(事件 A)；“发报台发出信号‘—’”(事件 $\overline{A}$)。即 $B=AB+\overline{A}B$。结果发生的可能性与两种原因的“贡献”大小有关。用概率表达它们发生可能性之间的关系，即

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

代入数据得 $\qquad P(B)=0.6\times 0.8+0.4\times 0.2=0.56$

用的是全概率公式。

（2）是由结果求原因。已知“收报台收到信号‘.’”，它是原因 A 引起的可能性有多大？即求 $P(A|B)$。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$
$$=\frac{0.48}{0.56}=\frac{6}{7}$$

用的是贝叶斯公式。

不难看出，这两个公式实质上是加法公式，乘法公式、条件概率的综合运用。

由于该结果的发生只由两种原因引起，且它们是互不相容的。故

$$P(\overline{A}|B)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$$

可见，当收报台收到信号“.”时，“发报台发出的信号是‘.’”的可能性比“发报台发出的信号是‘—’”的可能性要大得多。

7. 独立性

独立性的概念在概率理论及应用中都起着重要的作用。如果事件是独立的，则许多概率的计算就可大为简化。

（1）正确理解独立的概念

两事件独立的定义比较简单，即若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则 A 与 B 相互独立。

从教材上例子的讨论知道，所谓 A、B 相互独立，就是一个事件的发生并不影响另一事件发生的概率。当 $P(B)\neq 0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B)$ 等价于 $P(A|B)=P(A)$。在实际应用时也正是利用这个事实。

在实际应用中，我们常常不是根据定义来判断事件是否独立，而是根据问题的实际意义来作出判断。

例如，甲、乙二人同时向一目标射击，显然可以认为甲命中（乙命中）并不影响乙命中（甲命中）的概率。即“甲命中”与“乙命中”这两个事件是相互独立的。同理，可以认为“甲命中”与“乙未命中”也是相互独立的；“甲未命中”与“乙命中”是相互独立的；“甲未命中”与“乙未命中”是相互独立的。

又如，掷一骰子，“出偶数点”与“出 2 点”不是相互独立的。因为当“出偶数点”发生，“出 2 点”的概率由原来的 $\frac{1}{6}$ 增加到 $\frac{1}{3}$。而当“出 2 点”发生，“出偶数点”的概率由 $\frac{1}{2}$ 增加到 1。也就是说，一事件的发生影响另一事件发生的概率。

（2）独立与互斥（互不相容）的区别

前面我们讲了两事件相互独立的含义。互斥是指一事件发生另一事件不可能发生，即两事件不可能同时发生。因而，两事件互斥时，一事件的发生必导致另一事件不发生，即一事件的发生影响另一事件发生的概率。所以两事件不独立。反之，若两事件独立，即一事件是否发生对另一事件的概率没有影响，当然推不出：一事件发生，另一事件不发生。所以两事件不互斥。这可归结为下面的命题：

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A、B 互斥与独立不能同时成立。

证明如下：

若 A,B 独立，有 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，即 $AB\neq\varnothing$，所以 A、B 不互斥；

若 A、B 互斥，即 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)>0$，所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，即 A、B 不独立。

(3) 两两独立与全面独立的区别。

对此，教材已作了说明。即全面独立一定是两两独立；但两两独立却不能推出全面独立。让我们看一个例子(教材问题 1·7·10)：

例 1.6 袋中有 4 个乒乓球，一个涂有白色，一个涂有红色，一个涂有蓝色，另一个涂有白、红、蓝三种颜色。今从袋中随机地取出一球，设

$A=\{$取出的是涂有白色的球$\}$

$B=\{$取出的是涂有红色的球$\}$

$C=\{$取出的是涂有蓝色的球$\}$

则
$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

同理
$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$$

也就是说 A、B、C 是两两独立的。但是

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$$

即 A、B、C 不是全面独立(相互独立)的。

(4) 事件的独立性与概率的计算

让我们来看一个例子

例 1.7 (习题一第 10 题)加工某一零件须经三道工序。设第一、二、三道工序的次品率分别是 2%、3%、5%，并假定各道工序是互不影响的。求加工的零件是次品的概率。

解 设 $A_i=\{$第 i 道工序是次品$\}$，$i=1,2,3$

$B=\{$加工的零件是次品$\}$

〈解法一〉

B 发生当且仅当三道工序中至少有一道是次品。即

$$B=A_1+A_2+A_3$$

由于 A_1,A_2,A_3 并不是互不相容的，故应用广义加法公式，得

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

再应用独立性，得

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)-P(A_1)P(A_3)-P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

代入已知数据，得

$$P(B)=0.02+0.03+0.05-0.02\times0.03-0.02\times0.05-0.03\times0.05+0.02\times0.03\times0.05=0.096\ 93$$

不知同学们是否注意到，本题的计算还可以简化。

〈解法二〉

考虑 B 的对立事件 $\overline{B}$

$$\overline{B}=\overline{A_1+A_2+A_3}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

于是应用独立性，

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P\overline{A}_3)\\&=(1-0.02)\times(1-0.03)\times(1-0.05)\\&=0.903\ 07\end{aligned}$$

所以
$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.903\ 07=0.096\ 93$$

显然，〈解法二〉比〈解法一〉要简便。

附： 教材第一章部分问题解答

问题 1·3·1 $\dfrac{3}{10}$

问题 1·3·3 $\dfrac{5}{7}$；问题 1·3·4 $\dfrac{2}{45}$；

问题 1·3·5 $\dfrac{3}{8}$

问题 1·4·1 一般不会相同。

问题 1·4·4 不能这么说。

问题 1·5·1 $B\subset A\subset C\subset D, E\subset D, B\subset E$

问题 1·5·2 $P(A)\leqslant P(B)$

问题 1·5·4 全都成立

问题 1·5·5 $A+B=\{t<1000\}, AB=\{50\leqslant t\leqslant 200\}$

$B+C=\{50\leqslant t\}$ $BC=\{150<t\leqslant 200\}, A+C=\{t\geqslant 0\}$

$AC=\{150<t<1000\}, \overline{A}=\{t\geqslant 1000\}, \overline{C}=\{t\leqslant 150\}$

问题 1·5·6 (1)互不相容；(2)不是对立事件。

(3) $A+B=$\{两个都是红球或者两个都是白球\}

$\overline{A+B}=$\{取到一红一白\}

问题 1·7·2 (1)$P(A|B)=0$；(2)$P(A|B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$；(3)$P(A|B)=1$。

问题 1·7·4 (1)否；(2)成立；(3)成立。

问题 1·7·7 $\dfrac{4}{52}\times\dfrac{3}{51}\times\dfrac{2}{50}=0.000\ 181$

问题 1·7·8 不对。

问题 1·7·11 (1)独立；(2)不独立；(3)独立；(4)不独立。

问题 1·7·12 (1) $\prod\limits_{i=}^{n}(1-p_i)$ (2) $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$ (3) $\sum\limits_{j=1}^{n}[p_j\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(1-p_i)]$。

问题 1·8·1 否。

问题 1·8·2 $\dfrac{5}{4758}=0.00105$

第二章　随机变量及其分布

一、教学基本要求

1. 正确理解随机变量的概念

2. 熟练掌握离散型随机变量及其概率函数；连续型随机变量及其概率密度函数。

3. 了解分布函数的概念。连续型随机变量密度函数与分布函数关系。

4. 会求简单的随机变量函数的分布。

5. 正确理解数学期望、方差的概念。掌握数学期望及方差的性质、会计算期望、方差。

6. 了解超几何分布、几何分布，均匀分布，指数分布。熟练掌握二项分布，正态分布，泊松分布；掌握二项分布的泊松近似及二项分布的正态近似。会查正态分布表。

二、内容提要

1. 引入随机变量这一基本概念，介绍如何用随机变量描述随机现象。

2. 介绍两类最常见的随机变量：离散型随机变量和连续型随机变量。给出全面描述离散型随机变量的概率函数的定义、性质；全面描述连续型随机变量的概率密度函数的定义、性质。

3. 结合连续型随机变量概率密度函数的引入，介绍绘制频数直方图和频率直方图的方法步骤。

4. 介绍分布函数的概念，性质。离散型和连续型随机变量的分布函数。

5. 举例说明如何求随机变量函数的分布。

6. 介绍二项分布、泊松分布和正态分布的实际背景、性质、特点、计算及应用。

7. 介绍随机变量最重要的两个数字特征：数学期望和方差。给出它们各自的直观意义及其性质、应用。介绍切比雪夫不等式。

8. 介绍求随机变量函数的期望的一个公式，给出原点矩、中心矩、绝对矩等的定义。

三、重点与难点

本章重点是：

1. 五个基本概念

随机变量；离散形随机变量的概率函数；连续型随机变量的密度函数；数学期望；方差。

2. 两个重要分布

二项分布；正态分布。

3. 一个不等式：切比雪夫不等式。

4. 有关计算

(1) 对连续型随机变量，已知密度函数求分布函数，已知分布函数求密度函数；以及随机变量在任一区间取值的概率计算。

(2) 随机变量期望、方差的计算。

(3) 二项分布的泊松近似；二项分布的正态近似；正态分布的计算。

(4) 随机变量函数的分布及随机变量函数期望的计算。

本章难点是：

1. 连续型随机变量的概率密度函数的意义。

2. 分布函数的定义及求法。

3. 数学期望、方差的概率意义。

四、重点难点解析

1. 随机变量

为了全面地研究随机现象，把随机事件数量化，即将随机试验的结果与实数对应起来，引入随机变量的概念。

粗略地说，随机变量是取值带有随机性的变量。这个变量随试验结果的不同而取不同的值。在试验之前只知道它可能取值的范围，而不能预知它具体取哪个值。由于试验结果的出现具有一定的概率，随机变量取每个可能值或每个可能范围内的值的概率大小是确定的。

值得注意的是，随机变量与普通微积分中的变量是有区别的。微积分中，变量 x 的取值不带有随机性，比如 x 取值 5，就是 $x=5$；而随机变量不同，它的取值是随机的，是依照一定的概率来取某个值，比如随机变量 X 取值 5 时，就要考虑概率 $P(X=5)$有多大。

重要的两类随机变量是离散型随机变量和连续型随机变量。

2. 离散型随机变量

对于离散型随机变量，我们不仅应当知道它取得那些数值，而且还应当知道它取这些值的概率。并且，随机变量取得它的一切可能值的概率之和等于 1。能全面描述离散型随机变量的是它的概率函数。

例 2.1 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯。四盏信号灯各以$\frac{1}{2}$的概率允许或禁止汽车通过。以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数(设各信号灯的工作是相互独立的)。X 是一个离散型随机变量，我们来求，它的概率函数。

X 可取值 0,1,2,3,4，取各值的概率为

$P\{X=0\}=\frac{1}{2}$(遇第一盏信号灯即禁止通行)

$P\{X=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$(遇第一盏信号灯允许通行，第二盏信号灯禁止通行)

$P\{X=2\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$(遇第一、二盏信号灯允许通行，第三盏信号灯禁止通行)

$P\{X=3\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}$(遇第一、二、三盏信号灯允许通行，第四盏信号灯禁止通行)

$P\{X=4\}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$(四盏信号灯全允许通行)

即 X 的概率函数为

$$\begin{cases} P(X=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{2} & k=0,1,2,3 \\ P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{cases}$$

或

$$X\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

可验证$\sum_{k=0}^{4}P(X=k)=1$

离散型随机变量的概率函数

$$P(X=k)=p_k \quad (k=1,2,\cdots)$$

具有 $p_k>0$，$\sum_k p_k=1$ 的性质，所以我们可以把 p_k 解释为分布在质点 x_k 上的质量，其质点组的总质量为 1。

3. 连续型随机变量

对于连续型随机变量，它取的值不能逐个列举出来，而且，它取某一确定值的概率为 0，因此，描述离散型随机变量的方法不能照搬到连续型随机变量。教材从上海 99 内年降雨量的数据着手讨论频率直方图，进而引出概率密度函数的定义(注意这里给出了实际问题中如何近似确定概率密度的方法)。

设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则 X 取值于任一区间$(a、b)$的概率

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(由于连续型随机变量取任一确定值的概率为 0，故有

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b)=P(a<X<b)$$

也就是说，若随机定量 X 的概率密度为已知，则任一与 X 有关的事件的概率就完全确定。在这个意义上，我们认为连续型随机变量完全由它的概率密度所描述。

概率密度函数 $f(x)$具有性质

$$f(x)\geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

可以考虑下面力学上的类比：假设总共一个单位的质量，连续地分布在某个区间上，那么，$f(x)$表示在点 x 的质量密度且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示在区间(a,b)上所包含的全部质量。

概率密度函数与概率不同，正象质量密度与质量不同。当 $\Delta X\to 0$ 时，若不计高阶无穷小，有

$$P(x<X\leqslant x+\Delta x)=f(x)\Delta x$$

即 X 落在充分小区间$(x,x+\Delta x]$的概率近似等于 $f(x)\Delta x$。

4. 分布函数

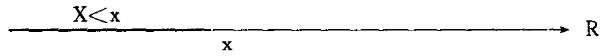
设 X 是一个随机变量，分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$是 x 的一个实函数。它的定义域是整个数轴，它的值域为$[0,1]$。

$F(x)$表示事件$\{X\leqslant x\}$的概率。

分布函数把随机事件与普通函数联系起来，为用微积分研究随机事件提供了可能。

分布函数定义中 X，x 皆为变量，前者是随机变量，后者是普通变量(x 起参变量的作用)

如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$在点 x 处的值就表示 X 落在区间$(-\infty,x]$上的概率。



对任意实数 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}P[x_1<X\leqslant x_2]&=P(X\leqslant x_2)-P(X\leqslant x_1)\\&=F(x_2)-F(x_1)\end{aligned}$$

因此，只要知道了随机变量的分布函数，就可以描述随机变量取值的概率规律。

连续型随机变量的分布函数与密度函数有如下关系：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\qquad(\text{在 } f(x) \text{的连续点})$$

已知概率密度，求分布函数，只要计算可变上限的积分$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$；反之，已知分布函数 $F(x)$，求概率密度，只要对 $F(x)$求导数即可。

下面举两个例子

例 2.2 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}c(4x-2x^2) & 0\leqslant x\leqslant 2\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

(1) c 的值是多少？

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$。

(3) 计算 $P(x>1)$。

解 (1)因为 $f(x)$是一概率密度，必满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$$

于是有

$$c\int_0^2(4x-2x^2)\mathrm{d}x=1\ c\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=1$$

即 $$c\cdot\frac{8}{3}=1,\text{求得 } c=\frac{3}{8}$$

于是得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2x-x^2) & 0\leqslant x\leqslant 2\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$