

翟连林
编著

经济应用数学

—— 微积分复习

上册

内 容 简 介

电视大学、职工大学及参加高等教育自学考试的学员,他们学习刻苦,但工作忙,家务负担重,学习困难大。作者积多年电视播讲及面授之经验,编写了这本经济类微积分复习用书,供广大学员复习用。本书的章节与教材对应,每章均提出复习要求、复习内容和基本要点等,并通过典型的例题介绍了解题的思路与技巧,并给出一定量的练习题。最后一章是综合练习,选编了电视大学经济类期末试题及其解答和评分标准。原稿经教学实践,反映较好,受到学员好评。

本书可供电视大学(经济类)、职工大学(经济类)等学员及参加高等教育自学考试的青年参考,亦可供财经类普通高等院校师生阅读。

电视大学 职工大学 高等教育自学考试

经 济 应 用 数 学

——微积分复习

下 册

翟连林 编著

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年11月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1986年11月第一次印刷 印张:3 1/4

印数:0001—50,000 字数:71,000

统一书号:4031·2

本社书号:5580·4

定价: 0.65 元

电视大学 职工大学 高等教育自学考试

经济应用数学

——微积分复习

科学出版社

1986

前 言

近几年来,我一直从事电视大学《经济应用数学基础》的电视和面授的教学工作,许多经济类学员把数学视为“拦路虎”,也确实有一部分学员被这只“虎”拦住,经济类学员,绝大多数人的数学基础比较差,加上工作忙,家务负担重,学习时间少,确实困难不小。

期末复习是整个教学过程的一个重要环节,特别是对于成人学员,平时工作忙,有的人听课断断续续,作业不能很好完成,期末复习就显得格外重要,怎样用较短的时间,根据成人学习特点,通过期末复习,把学过的知识系统化、条理化,掌握基本的理论和基本的方法,这是我近几年来一直思考并有意识地进行试验的课题。83级电大经济类,在期末复习阶段,我选择了一个数学较差的教学班。开始,不少学员失去复习好的信心,特别是工作负担重的干部,平日丢了不少课,认为一定被数学这只“虎”拦住,接班后我先摸底,然后做学员的思想工作,让学员建立起能复习好数学的信心,我针对学员的情况,把他们学过的零散知识系统化,把他们学得薄弱或未学的知识补上,总共花了21学时,最后全班都通过了考试。近一年来我又承担了我校工业企业管理专业(厂长、经理班)的《经济应用数学基础》的电视和面授的教学任务,这批学员都是领导干部,工作特别忙,数学基础也很差,家务负担重,学习中的困难更大。我选择了一个近80人的教学班进行试验,期末考试一般教学班平均约有20%被数学这只“虎”拦住,而这个教学班全部通过(一人因公长期出差除外)。

本书是我近几年来对电大学员进行期末复习的讲稿,经过加工、补充、整理而成的。使用的教材是中央广播电视大学出版社出版的《经济应用数学(一)微积分》(1986年5月版)和中国人民大学出版社出版的《经济应用数学基础(一)微积分》(1982年5月版)。每一章包括复习要求、复习内容、练习题和练习题解答四部分,最后一章是综合练习,包括自我检查题及解答,近几年电大经济类各专业期末考试题及解答。

我的试验刚刚开始,把这个不成熟的讲稿拿出来供读者参考,希望和大家一起探讨和总结这方面的经验,请读者特别是同行,提出宝贵意见,为提高成人高等教育的数学教学质量而共同努力。

北京广播电视大学 翟连林

1986. 9. 28.

目 录

上 册

第一章 函数	1
一、复习要求.....	1
二、复习内容.....	1
(一) 函数的概念	1
(二) 函数的几个特性	6
(三) 反函数、复合函数	9
(四) 初等函数	12
(五) 几个常用的经济函数	14
三、练习题.....	19
四、练习题解答.....	22
第二章 极限与连续	26
一、复习要求.....	26
二、复习内容.....	26
(一) 极限的概念	26
(二) 无穷大量与无穷小量	29
(三) 求极限的主要方法	30
(四) 函数的连续性	41
三、练习题.....	43
四、练习题解答.....	45
第三章 导数与微分	50
一、复习要求.....	50
二、复习内容.....	50
(一) 导数的概念	50
(二) 求导数的基本方法	54

(三) 导数概念在经济问题中的一些应用	64
三、练习题	69
四、练习题解答	70
第四章 中值定理及导数应用	75
一、复习要求	75
二、复习内容	75
(一) 中值定理	75
(二) 函数的增减性	77
(三) 函数的极值	78
(四) 函数的最大值与最小值	82
(五) 曲线的凹向、拐点及渐近线	87
(六) 函数的作图	88
三、练习题	90
四、练习题解答	91
第五章 不定积分	97
一、复习要求	97
二、复习内容	97
(一) 原函数与不定积分的概念	97
(二) 不定积分的性质和基本积分表	99
(三) 积分法	100
三、练习题	112
四、练习题解答	115
第六章 定积分	122
一、复习要求	122
二、复习内容	122
(一) 定积分的概念及性质	122
(二) 定积分与不定积分的关系	124
(三) 定积分的换元法和分部积分法	127
(四) 定积分的应用	130

(五) 广义积分	138
三、练习题	142
四、练习题解答	145
第七章 综合练习	153

下 册

第八章 多元函数	169
一、复习要求	169
二、复习内容	169
(一) 空间直角坐标系	169
(二) 二元函数	170
(三) 偏导数	172
(四) 全微分	174
(五) 复合函数的微分法	177
(六) 隐函数的求导法	181
(七) 极值问题	183
(八) 二重积分	192
三、练习题	199
四、练习题解答	201
第九章 微分方程简介	212
一、复习要求	212
二、复习内容	212
(一) 微分方程的一般概念	212
(二) 一阶微分方程	215
三、练习题	222
四、练习题解答	223
第十章 综合练习	227
一、自我检查题	227
二、试题选编	240

第一章 函 数

一、复 习 要 求

1. 深刻理解函数的概念(包括分段函数), 知道符号 $y = f(x)$, $f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$, $y|_{x=x_0}$ 的意义.
2. 熟练掌握函数的定义域的求法.
3. 了解反函数的定义, 会由已知函数求出它的反函数, 知道它们的图形关于直线 $y = x$ 对称.
4. 理解复合函数的概念, 会把复合函数拆成几个简单函数, 并知道它们的复合关系.
5. 掌握由简单实际问题建立函数解析式的方法, 特别是建立经济问题中的总成本函数、价格函数、收益函数、利润函数、平均成本函数等的函数解析式, 要深刻理解库存问题中的函数关系.
6. 掌握判断函数奇偶性, 单调增减性、周期性和有界性的方法.
7. 熟记基本初等函数的公式及图形. 会用基本初等函数的图形, 利用函数的性质以及函数之间的关系描绘较简单的函数图形.

二、复 习 内 容

(一) 函数的概念

1. 函数的定义: 在某一变化过程中, 设有两个变量 x 和

y , 变量 x 的变化范围为 D (实数集), 如果对于 D 中的每个 x 值, 按照某一对应规律 f , 变量 y 总有唯一确定的值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量. 并称自变量 x 的变化范围 D 叫做函数的定义域, 而称因变量 y 的变化范围叫做函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中的符号 “ f ” 表示 x 与 y 之间的某种对应规律, $f(x)$ 是一个完整的符号, 不要误认为 f 与 x 相乘. 对于不同的对应规律, 可以用不同的符号, 如 $y = g(x)$, $y = F(x)$ 等等. 有时甚至可以重复用一个字母表示, 如 $y = y(x)$, $L = L(x)$, $C = C(x)$ 等等.

记号 $f(x_0)$ 叫做 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值. $x = x_0$ 时的函数值有时也记作 $y|_{x=x_0}$, 或 $f(x)|_{x=x_0}$.

根据函数的定义, 对于自变量 x 所取定的每一个值, 仅要求变量 y 总有唯一确定的值和它对应, 并没有要求 y 一定要变化, 因此, 作为函数的特例, 可以把常数 C 也看作是函数, 即 $y = C$.

有些函数在其定义域内, 不能用一个式子表示, 而是用两个或两个以上的式子表示, 这样的函数我们称为分段函数. 例如,

$$y = \begin{cases} x - 1 & (-\infty < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ x + 1 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

变量 y 与 x 之间的关系, 完全符合函数的定义.

函数概念反映着自变量和因变量之间的依从关系. 它涉及到定义域、对应规律和值域. 但是很明显, 只要定义域和对应规律确定了, 值域也就随之确定. 因此, 定义域和对应规律

是确定函数的两个要素，只要两个函数的定义域和对应规律都相同，那么这两个函数就相同；只要定义域或对应规律之一不相同，那么这两个函数就不相同。

例如， $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ ，这两个函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$ ，对应规律都是：不管 x 取任何值， y 都恒等于 1（因为有三角恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ），因此它们是相同的函数。

又如， $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ ，虽然它们的定义域都一样 $(-\infty < x < +\infty)$ ，值域也相同 $(|y| \leq 1)$ ，但对应规律不同。比如取 $x = \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，而 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，因此它们是不同的函数。

再如， $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$ ，前者定义域不包括 $x = 1$ ，后者不受这个限制，二者定义域不同，所以它们是不同的函数。

2. 函数定义域的求法

除了在解决实际问题时，根据变量的实际变化范围来确定定义域之外，在数学中，当函数 $y = f(x)$ 通过一个表达式表示时，我们规定其定义域就是使该式子有意义的自变量的值的全体。因此，在确定函数的定义域时，必须注意下面几点：

(1) 函数式里如果有分式，则使分母为零的自变量的值必须除外。

(2) 函数式里如果有偶次根式，则根号里的整个式子必须大于或等于零。

(3) 函数式里如果有对数记号，则要使真数为正。

(4) 函数式里如果有正切函数或余切函数，则在正切、余

切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

(5) 函数式里如果有反正弦或反余弦函数, 则在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

(6) 如果函数的表达式由若干项组成, 则它的定义域是各项定义域的公共部分.

(7) 对于几个式子表示的分段函数, 其定义域是各式定义域加在一起.

例 1 求函数

$$y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(5-x)$$

的定义域.

解: 在实数范围内, 当 $x-2 \geq 0$ 时, $\sqrt{x-2}$ 才有意义;

当 $x \neq 3$ 时, $\frac{1}{x-3}$ 才有意义;

当 $5-x > 0$ 时, $\lg(5-x)$ 才有意义.

因此, 要使函数 y 的表达式有意义, 必须有

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x \neq 3, \\ 5-x > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \neq 3, \\ x < 5. \end{cases}$$

所以函数 y 的定义域为

$$2 \leq x < 5, \text{ 但 } x \neq 3.$$

说明: 函数的定义域一般有五种表示方法, 即: (1) 不等式表示法; (2) 区间表示法; (3) 集合表示法; (4) 图示法; (5) 叙述法.

本题用的是不等式表示法. 若用区间表示法, 则为 $[2,$

3) $\cup(3, 5)$; 若用集合表示法, 则为 $\{x | 2 \leq x < 5, \text{但 } x \neq 3\}$; 若用图示法, 则如图 1-1 所示.

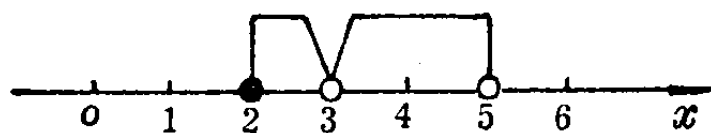


图 1-1

例 2 求函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \ln \sin x$ 的定义域.

解: 要使函数 y 的表达式有意义, 必须有

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 & \text{①} \\ \sin x > 0 & \text{②} \end{cases}$$

解①: $x^2 \leq 16$, 即 $|x| \leq \sqrt{16} = 4$,

$$\therefore -4 \leq x \leq 4 \quad \text{③}$$

解②: 正弦函数在第一、二象限为正, 因此

$$0 < x < \pi.$$

又, 正弦函数的周期为 2π , 所以

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \text{整数集 } \mathbb{Z}) \quad \text{④}$$

把③、④表示的 x 的取值范围画在数轴上, 如图 1-2 所示.

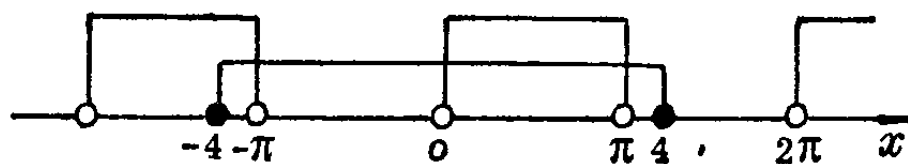


图 1-2

取③、④的公共部分(交集), 得所求的定义域为

$$[-4, -\pi) \cup (0, \pi).$$

例 3 设函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & (x < 0) \\ x^2, & (0 \leq x < 2) \\ x + 2, & (x > 2) \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-2)$, $f(3)$.

解: 这是个分段函数, 把几个式子的定义域加在一起就是 $f(x)$ 的定义域 D , 即

$$\begin{aligned} D &= \{x | x \in (-\infty, 0)\} \cup \{x | x \in [0, 2)\} \\ &\quad \cup \{x | x \in (2, +\infty)\} \\ &= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

$\because -2 < 0$, 则函数的表达式是 $f(x) = -x$,

$\therefore f(-2) = -(-2) = 2$.

$\because 3 > 0$, 则函数的表达式是 $f(x) = x + 2$,

$\therefore f(3) = 3 + 2 = 5$.

(二) 函数的几个特性

1. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是对称区间 $[-a, a]$ ($a > 0$), 若在它的定义域内任取一点, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 是偶函数; 若总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称; 奇函数的图象关于原点对称.

例 1 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = f(x) = 2x^2 + 1$;

(2) $y = f(x) = -x + \sin x$;

(3) $y = f(x) = x^2 + x$.

解: (1) 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 在这个对称区

间内任取一点 x , 总有

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x),$$

所以 $f(x) = 2x^2 + 1$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}\because f(-x) &= -(-x) + \sin(-x) = x - \sin x \\ &= -(-x + \sin x) = -f(x),\end{aligned}$$

$\therefore f(x) = -x + \sin x$ 是奇函数.

$$(3) f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x.$$

由于 $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$,

所以 $f(x) = x^2 + x$ 是非奇非偶函数.

2. 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在正的常数 T , 使 $f(x) = f(x + T)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 T , 称为函数的周期.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 的周期是 2π , $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ 的周期是 π .

一般地, $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ (其中 A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0, \omega > 0$) 的周期是

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

例 2 试判断函数 $y = \sin x \cos x$ 的奇偶性, 并求出它的周期.

解: 函数 y 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}\because f(-x) &= \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x \\ &= -f(x),\end{aligned}$$

$\therefore y = \sin x \cos x$ 是奇函数.

$$\text{又 } y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

3. 单调增减性

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称此函数在 (a, b) 内是单调增加的; 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称此函数在区间 (a, b) 内是单调减少的.

判断函数的增减性, 常用导数判别法, 即: 对于 $y = f(x)$, $x \in (a, b)$. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 当 $f'(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少.

4. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义 [(a, b) 可以是 $y = f(x)$ 的整个定义域, 也可以是定义域的一部分], 如果存在一个正数 M , 对于所有 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为 $|\sin x| \leq 1$, 当 x 取任一实数时都成立, 这里 $M = 1$ (当然, 也可以取任何大于 1 的数作为 M). 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$, 对于 $(0, 1)$ 内一切 x 都成立. 但是 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 例如可以取 $M = 1$, 而 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$ 对于 $(1, 2)$ 内一切 x 都成立. 因此, 函数是否有界, 不仅与函数有关, 而且还与区间有关.

(三) 反函数、复合函数

1. 反函数

设已给 y 是 x 的函数: $y = f(x)$.

若将 y 当作自变量, x 当作函数, 则由上面关系式所确定的函数:

$$x = f^{-1}(y)$$

叫做函数 $f(x)$ 的反函数.

为了与习惯一致, 用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 则 $y = f(x)$ 的反函数就写成

$$y = f^{-1}(x).$$

例如, 求 $y = 3x - 1$ 的反函数, 解出 $x = \frac{y+1}{3}$, 按习惯写成 $y = \frac{x+1}{3}$, 这就是 $y = 3x + 1$ 的反函数.

反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 1 求函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($a > 0, a \neq 1$) 的反函数.

解: 先由 $y = f(x)$ 求出 $x = f^{-1}(y)$, 再将 $x = f^{-1}(y)$ 改为 $y = f^{-1}(x)$.

由 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 得

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x^2 - 1} &= a^y \\ \Rightarrow x - a^y &= -\sqrt{x^2 - 1}.\end{aligned}$$

两边平方, 得

$$(x - a^y)^2 = x^2 - 1$$