科學圖書大庫

数學研究叢書之(五)

近代拓撲之研究

譯者 林 聰 源

校閱 劉 世 超 賴 東 昇

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日二版

數學研究叢書之(五)

近　代　拓　樸　之　研　究

基本定價　1.60

譯者　林聰源　美國約翰霍浦金斯大學碩士
校閱　劉世超　中央研究院數學研究所研究員
　　　賴東昇　國立台灣大學數學系教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原　序

這本書是MAA Studies in Mathematics seriss 的第五册。它包含了由本書編者P. J. Hilton 對當今拓撲學之研究所寫的一篇詳盡而富于啓發性的導引，以及由G. T. Whyburn, W. Haken, V. K. A. M. Gugenheim, E. Dyer, V. Poénaru 所撰寫的，對當今最活躍的工作部份的註解。這本書是寫給資歷較深的大學本部生，研究生，以及大專院校的老師們讀的。S. Eilenberg 曾在代數拓撲學的一篇演講 [註] 中說過"整個領域每十年就有急劇的發展，任何一個人要是有一段時期不去接觸它，恐怕以後再去讀一篇論文時，會一字不識。"拓撲學這種快速的進展，暗示著不多久我們又需要再版一本新書了。然而我希望所有有志之士，能從本書的研究中，對這一門日新月異的學問，有個概略的認識，而能輕鬆地欣賞來日的新發展。

這本書也可表示MAA（美國數學學會）對數學教學的重視。MAA 有一些工作是針對數學課程的分析與修訂而做的。本系列的書，專門討論數學觀念本身，對於縮短教學及研究二者間的鴻溝將有所裨益。

Charles W. Curtis

「註」P. 98 Lectures on Modern Mathematics T. L. Saaty, Editor, Vol I, John Wiley and Sons, New York, 1963。

目　録

引　言

第二次世界大戰後，數學中被稱爲「拓撲學」的這一支，在深度上和廣度上，有著澎湃的進展。它和許多的數學分枝之間，彼此影響，互爲呼應［註1］；特別是從近世代數學，代數幾何學，泛函分析論以及偏微分方程式論各方面的理論中，得到許多的靈感，而又回報它們以纖細的啓發。因而使得我們今天能同時談論純粹及應用拓撲學；這毋寧說也是數學整體性的一個健全的象徵。比較起來說，戰前拓撲學孤立的局面，已經由於拓撲學家不斷地經營，在數學的一般發展上，佔據了一席之地。

不止於此，代數拓撲學本身還導出了（至少）兩支數學的新雛，即同調代數學以及範疇論，目前都已具有獨立的地位，雖說拓撲學仍在繼續不斷地滋養著這兩支理論的發展，然而即使一個地域觀念最深的拓撲學家也不敢把這兩支理論劃入拓撲學的領域裡。所以，我們也並不想嚐試著把這些熱可炙手的東西包含在這本書內。本叢書集第二册由MacLane所寫的STUDIES IN MODERN ALGEBRA（近世代數學研讀）有簡短的幾節專門討論同調代數學以及範疇論，我想這些在最近的將來就會有專書來討論的。

基於相同的理由，這本書將不談及利用代數拓撲學以及微分拓撲學的方法應用在代數幾何學以及解析學的問題。譬如說，由Hirzebruch所引入，並由他以及其他許多人繼續鑽研不已，且影響深遠的Riemann-Roch定理的一般型式，在此不得不忍痛割愛。又如，Atiyah以及Singer曾做了一件有意義的工作，即眼光獨到地對橢圓型微分算子給出了一套指數的判定法。再如，Atiyah以及Bott（晚年）將Lefschetz不變點公式推廣到橢圓型微分算子上去。諸如此類，典雅而又深入的拓撲學應用，不勝枚擧，只得說它們超出本書討論的範圍。事實上，如果眞想把這些應用做個介紹，而又能讓讀者們對它有個最粗淺的瞭解，恐怕這本書的頁數就要近千了。

所以，本書將着重「純粹」拓撲學的討論。這個豐富的題材將自然地分成四個意義顯明的部份—這並不就是說，它們彼此之間絕無重複的地方—即，代數拓撲學，微分拓撲學，幾何拓撲學以及一般的，也就是點集性拓撲學

一般拓撲恐怕是和其他部份相關最少的了；在美國及西歐，在任何方面都很難見到它引人注目的發展。後面指出的這個事實，很可能是因爲它本身不像拓撲學的其他部份一樣具有淸晰定義的方法論，因而並沒有從系統化的發展和强而有力的技巧的應用中得到進展。另外一個事實是，一般拓撲學在其他數學分支上的應用多半爲古典的。所以，像在代數及微分拓撲學中，由於它們和拓撲學以外的問題的頻繁接觸，從而受到的啓發，在一般拓撲學中則付諸厥如。雖說如此，自然也還有相當的進展，特別是在蘇聯和東歐諸國。我們可以從 P. S. Aleksandrov 所著，“On some basic directions in general topology”一文中，對其當今地位及主要發展，略窺一斑。這篇文章在英譯本的“Russian Mathematical Surveys” 19(1965), 1－39; 20(1965) 177－78中可以找到。G. T. Whyburn在本書中寫了一篇“曲線是什麼？”在這篇文章中，他闡明了爲什麼需要對曲線下一個明確的定義，同時說出如何利用點集拓撲學達到這個目的。不同型式的曲線經由拓撲性質而區分出來。最後，作者給了一個最近的應用；即利用拓撲學理論證明了”如果一個複變函數是可微分的，則它是可無窮次微分的（不像以往借助於Cauchy 定理及Cauchy 積分公式）。

幾何的，代數的以及微分的拓撲學三者之間彼此緊密相連，從歷史的眼光來看，我們可以說，幾何拓撲學爲代數拓撲學的先驅，因爲代數拓撲學顧名思義，無非就是利用代數方法以企圖解決幾何的問題。事實上，早期的那些幾何拓撲學的拓荒者，高度地發揮了各式各類的組合技巧，想用以處理基本分類問題，不幸在證明「主要猜測」（即，拓撲的和組合的分類爲等價的）時，却不免遭到失敗的命運。1930 年代的拓撲學家記取着這個教訓，乃將他們主要的注意力轉向多面體的同調群上（這是順從Poincaré 的意見）以及這些結構上的發展。

當前，爲了術語上的方便，名義上我們把組合方法劃成幾何拓撲學的範圍內。當然了，幾何拓撲學除此之外還包含了許多其他的方法及觀念：舉例來說，拓撲流形學。莫可置疑地，幾何拓撲學今天又再度成爲研究領域中最活躍的部分。許多令人振奮的結果和有趣的念頭更刺激了這種傾向。舉一、兩個例子吧！1960 年 Stallings 及 Zeeman 繼承下 Smale 的工作（等一下我們還要談到 Smale 這個人）證明了Poincaré 猜測的一般型式，在五度以上的空間裡成立；即一個賦向的（$n-1$）連通的組合 n 維閉流形與 n 度單位圓球殼爲拓撲等價的。1956年，Thom在組合流形上定義了有理Poincaré 類；S. P. Novikov 最近更證明了這些類都是拓撲不變量。1960年，Kervaire 提出第一個其上不能安置拓撲相合之微分結構的組合流形的例子。同年，Milnor 提出了兩個同胚而非組合等價的多邊體的例子。(這也就反證了一般緊緻多邊體的「主要猜測」)但拓撲等價之流形是否必爲組合等價這個問題則仍懸而未決。1951年，Moise 曾把他的全付精力都用在寫作一系列的論文上，在這些文章裡，他證明了，每一個3維流形都可以安置組合結構，而且這樣的結構是唯一的——Bing 後來發表了一篇更簡化的討論。在1957年，Papakyriekopoulos 證明了可賀的 Dehn Lemma，這是幾十年來一直未能加以證明的，因而使人重燃起對 Poincaré 猜測的興趣，即，是否每一賦向單連通三維閉流形都與圓球殼拓撲等價。1960年，Zeeman 發現了一個 n 度圓球殼能在($n+k$)度圓球殼上組合串接的必要條件是，$k=2$。上面這些簡短支離的記載，自然未能把所有對幾何拓撲具有不可磨滅的貢獻的人都一一列舉出來[註2]。不過，有興趣的讀者，可以從"Topology of 3-manifolds and related topics(三維流形之拓撲及其相關專題)這本文集中，找到這領域的範圍以及進展方向的蛛絲馬跡，(這本文集，是搜集所有1961年在美國喬治亞州雅典城舉行的 Topology Institute 上收到的論文編輯而成的。

令人扼腕的一件事是，Poincaré 猜測（我們這裡所讀的，是指三維的情形而言，而非一般型式者），緊緊住數學家心靈凡60年之久，至今猶未被解決。雖說如此，由於企圖嘗試著證明它，導致了對3維流形刻骨入裡的分析。本書中，有一篇由 W. Haken 所寫的"三維流形中曲面的一些研究成果"，報導了一些作者以及其他人士在這方面的成就。讀者們將會發覺，在這領域中，想像力佔著很重要的地位，就如同作者所說的，同時這也帶着被嚴重曲解的危險性，所以必須特別在此提醒諸位的注意。

就如我們方才提過的，代數拓撲學之所以會有人研究，不僅是因爲它本身是一門獨立的學問的關係，同時也是因爲它是研究數學其他支派的工具之一。事實上，它就是源於對幾何拓撲學上的應用。Milnor 在對「主要猜測」的反證裡，用了非常特別的代數拓撲觀念，這可遠溯至 Reidemeister-Franz 的扭轉(torsion)觀念和 J. H. C. Whitehead 的變形的扭轉觀念，此二者是 Milnor 有關單純同倫型理論的核心所在。不用說 Milnor 的工作和拓撲學上其他令人興奮的發展，已經導致使得扭轉觀念和單純同倫理論受到廣泛的注目。同樣的理由，許多迷人的代數問題也因而產生了——我們只要拿 Bass 的工作爲例就可以看到這一層連貫的關係。歸根到底，代數拓撲學最近，最驚人的應用該數微分拓撲學。這門學問，在1956年 Milnor 宣稱7

度圓球殼上能安置多種的微分結構後，瞬即被體認到，它本身即具有被單獨研討的價值。Milnor 在他這個着名的定理中，利用到代數拓撲學中"Fibre bundle"這部份的理論，而在拓撲學的歷史上，樹立下了這個無比重要的里程碑，這實在值得我們在此小心翼翼地解說一下。[註 3]

歐幾里得空間中的每一個開集，都具有自然圓滑的，即可微分的，結構—也就是我們熟悉的一般多變數微分論中的結構。一個拓撲流形是一Hausdroff 空間，具有區域性地等價於歐氏空間R^n 中開集的拓撲結構。這流形的維數就是 n 。這流形可能同時還具有區域性地等價於R^n 中開集的圓滑結構，在這種情況下，我們就稱之爲微分流形。介於這兩個觀念之間有組合流形；即，一個拓撲流形安置著組合結構（此種結構爲之三角剖分的等價類；使得每一頂點的星形都組合性地等價於n度圓球殼經標準三角分後頂點的星形。）

這個觀念確實是介於微分流形與拓撲流形之間的；因爲，從一方面來說，我們可以拆去組合流形上的組合結構，所剩就是一個拓撲流形了；同時在另方面，J. H. C. Whitehead 有一個定理證明了：每一個微分流形上都帶着一個僅有的主要的組合結構[註 4]。對於每一類的流形，都配有適當種類的函數，從一個流形映到另一個同類的流形中去；微分流形配有微分映像，保持着微分結構，組合流形間的塊式映像保持着組合結構而拓撲流形間的連續映像，保持着拓撲結構。更且，一個微分映像可用與其圓滑流形相關連的組合結構間的塊式映像來逼近；一個塊式映像對於其組合結構所具與的拓撲結構而言，是連續的。我們可以把這些情形用下圖表示：

(1) $$\text{Diff} \longrightarrow \text{PL} \longrightarrow \text{Top}$$

這裡，Diff 是表微分流形類（及其適當的映像）；PL是表組合流型類（及其適當的映像）；Top 是表拓撲流形類（及其適當的映像）。圖中的箭頭是表，從一類進到另一類。爲了參考上的方便，我們在箭頭上標以字碼：

(2) $$\text{Diff} \xrightarrow{W} \text{PL}$$ （W表Whitehead）

$$\text{PL} \xrightarrow{F} \text{Top}$$ （F 表遺忘"Forget"，因爲我們遺忘掉 PL 上的組合結構）

讀者們宜將W及F視爲廣義的函數，事實上，我們用的符號業已表明了這個觀點。所以我們有合成映像。

$$\text{Diff} \xrightarrow{FW} \text{Top}\text{。}$$

我們注意，在每一範疇Diff，PL及Top中，有兩個適當的概念；即介於對象物間的"等價"概念以及從一對象物至另一對象物同構映像概念。後者的意思是指一個映像，$f: M\to N$。
對它而言，存在另一映像，$g: N\to M$，使得合成映像gf爲M上的恒等映像，同時fg爲N上的恒等映像。此時我們則稱g爲f的逆映像。如果有一映像$f: M\to N$附有逆映像（即，f爲一同構映像）則稱M和N是"等價的"。記成$M\sim N$，如果我們想特別標明此一同構映像，則記如$f: M\sim N$。在Diff中的同構映像$f: M\sim N$，我們稱之爲可微分同構映像［註5］，而說M和N是微分等價的。在PL中的一個同構映像$f: M\sim N$；稱爲PL 同構映像（塊式線性同構映像或組合等價）。在Top中的一個同構映像$f: M\sim N$，稱爲同胚。有了以上這些準備後，現在我們可以把Milnor的成就（至少是其中最引人的部份）說明一下了：令S^7表7度圓球殼，附帶着平常我們將它視爲R^8中之一個閉子空間時的圓滑結構，則，存在一個圓滑流形M，使得$FW(M)\sim FW(S^7)$而$M \not\sim S^7$。也就是說，當我們把M和S^7同時視的拓撲空間時，它們爲等價的，然而，把他們同時視爲微分流形時則不然。事實上，我們知道，存在28個圓滑流形，個個都與S^7同胚，而其中却沒有兩個是微分同構的。

如我們說，微分拓撲學及塊式線性拓撲學的大部分理論都與(1)圖有極密切的關連，也不算太草率。我們可以利用這個圖，把剛才提到過的Thom，Novikov及Kervaire諸人的研究結論，表示出來。Thom 曾在組合流形上定義了某些餘同調不變量，這些興趣主要是Pontryagin 所引發的；他在微分流形上，定義過餘同調類［註6］，如記$p(M)$。我們以$\bar{p}$記由Thom 定義的類。$\bar{p}$具有下一性質：

(3) $$\bar{p}(WM)=p(M)$$

則，Novikov的結論可記爲，若$FN_1\sim FN_2$，則$\bar{p}(N_1)=\bar{p}(N_2)$，即，同胚的組合流形具有相同的有理Pontragin 類。Kervaire 的結論則爲：存在一個10維的組合流形N，使得所有的微分流形M，都不滿足$FW(M)\sim F(N)$。之後，不斷有人在8以上的其他維數裡，也找到了這個現象的例子。讀者們宜注意，Kervaire 的這個命題比下一主張還要强：存在一個組合流形N，使得所有的微分流形M，都不滿足$W(N)\sim N$；因爲前者證明了，M上沒有一個組合結構（不限於被自然賦與的那一個）能和已給的微分結構相合。不止如此，Eells 及Kuiper事實上曾明顯的表示了，存在一個組合性的8維流形，它的同倫型不包含一個微分流形。流形上的「主要猜測」說：若M

及N是兩個組合流形，有$FM \sim FN$的關係，則$M \sim N$。Moise 有一個定理說：對於每一拓撲三維流形M，存在唯一的一組組合流形同餘類N，使得$FN \sim M$。上面這些例子，都可以用來說明，今天的拓撲學無處不是隱含着圖(1)的［註7］。當然了，這個圖並沒有啓示我們，如何去解決由它所引發出來的種種問題；然而，我們可以很恰當地說，Thom，Novikov，Kervaire，Eells以及Kuiper，還有Milnor 諸人，都是用了代數拓撲學的方法。因而我們現在能把拓撲學明確地分成三個相關的預域——而非只有代數拓撲學及微分拓撲學——即，(i)微分拓撲學的代數方法論，(ii)微分拓撲學的解析方法論，以及(iii)用代數研究拓撲空間和連續映像的代數拓撲學。在本書內，我們將各有一篇專文來討論每一個領域。這些年來，這方面所有的成就，是如此的激勵人心，而進步又是如此的迅速，使我無法在這篇短略的序文中，對它們做一個公平的評價。不過我們可以從下面要舉出來的。在十六年之間前後發表，專門討論代數拓撲學及微分拓撲學的大問題的三篇文章中，對這些神速的進展有一點可捉摸的印象。第一篇Eilenberg在1949年發表的，題目是"On the problem of topology"（拓撲學問題）。值得注意的是，這篇論文正好在一次代數拓撲學的革命之前發表，這個革命是由於Serre把Leray的譜列理論應用在一般型式的纖維空間上同調論的研究上而引起的。這一篇文章可以說把代數拓撲學帶入了一個金色年代，也就在這個飛躍前進的年代裡，許多Eilenberg所列出的問題被一一解決了，同時吸引了無數後繼的青年數學家，而代數拓撲學也就被當作一門的學問廣泛地研讀者。(第二)這段時期，一直持續到Massey在1955年發表了。"Some problems in algebraic topology and the theory of fiber bundles"（代數拓撲學問題及纖維叢理論）之後，代數拓撲學仍看不出是一門能自圓其說的學問。（回想1956年Milnor發表了7度圓球殼上之微分結構的論文）然而，纖維叢的理論（包括李群及大域微分幾何的研討）在當時被認爲具有特別的重要性［註8］。正如Massey 曾根據在康奈爾大學舉行的"纖維叢及微分幾何學會議"的紀錄所列的表一樣，（第三）Lashof從1963年在西雅圖舉行的"微分拓撲學及代數拓撲學暑期研討會"的參加論文中，以主編的身份，選錄了一些問題。這些問題本身，就像會議名稱一樣，對微分拓撲學在拓撲學研究中所佔的主要地位以及代數拓撲學所具有的廣泛輔助力量做了一番考驗。這並不就是說，有意貶低以往的代數拓撲學以及過去五年間代數拓撲學家偉大的成就；也非暗示說，微分拓撲學及代數拓撲學問的界線已被清楚地劃分了。相反的，代數拓撲學家越來越關懷和傾力耕耘的問題，卻是拓撲學領域

之外有關結構的問題——微分結構、解析結構，複流形以及流形上的李群運算等。[註9]。

因而由Eilenberg，Massey及Lashof所寫的這三篇論文，都反應了，而且相當地影響了過去40年內拓撲學研究的目標、方向。俄國拓撲學家S. P. Novikov還曾把Lashof列出的問題做了一番分析，就作者及題目，收集了一些在西雅圖會議上發表的論文，編成一篇名叫“1963年西雅圖拓撲夏季研討會”的文集。有賴Novikov獨到的眼光，他宣佈了一些問題的答案，而且幾乎對所有的問題都給了高度啓發性的評註。

我們一點也沒有企圖想要，即使只是過去20年來鼓舞人心的結果，都網羅進本書範圍內；然而，却很值得列下那些驚人的成就。這樣作之前，我必須先對那些由於篇幅所限，不得不將他們的工作略去不提的人表示歉意。同時，我再强調一次，以下所舉不過是傑出工作中的代表性例子。

我們讀到過的Serre的大作，給了同倫理論，尤其是有關同倫群的計算問題，很大的刺激與動力。接下去的幾年裡，Serre本人，Cartan、Toda、Moore以及其他許多人，做了許多有關這個問題的傑出作品。不止如此，Eilenberg和MacLane又發現了一個關鍵性的觀念，即，一個具單一非消滅同倫群的複合形，在許多討論中扮演著極重要的角色。從某些觀點來看，這種複合形可說是同倫理論的柱石。除此之外，有人發現了餘同調群可視爲映至這種Eilenberg-MacLane複合形的映像的同倫類;這也就是目前最主要的代數拓撲學觀念之一的“可表餘同調裡論”出現的先兆。Serre同時還發現了，Steenrod、Adem、及其他人深入探討的準則餘同調運算，事實上是Eilenberg-Maclane複合形上的餘同調群中的元素，因而，給了他們的研究一些更多的帮助和更明確的方向。Moore受了Eilenberg的影響，把注意力轉到空間的連續單線複合形上，他最大的功勞是，指出空間上的，主要的(有意義的)代數同倫不變都包含於連續複合形中。這個意想，曾被許多人進一步的發揮，同時，Kan描述出，一個自由單純群，在某種意義下，可以代表這個空間。因而，在理論上，把同倫理論簡化成群論[註10]。K. A. M. Guggenhein 在爲本書所寫的“Semisimplicial homotopy theory”(半單純同倫理論)一文中，說明了Moore及Kan兩人的進展，並且介紹了這個理論及其最近發展。他以邏輯上相當自給的型式寫下這個理論，然而論其動機，無非是從拓撲空間的研讀裡，連續函首或標準建構中得來的。

代數拓撲學上的偉大進展常與Adams及Bott這兩個人的名字相提並論的。1958年，Adams在他一篇題爲“The nonexistence of elements of

Hopf invariant one ”的論文中，宣佈了這一個懸而未決甚久的問題之解答。回溯至1935年時，Hopf 證明了，若 n 是偶數，則從 S^{2n-1} 至 S^n 的所有映像具有無限多相異的同倫類。他是展示一個數字不變量證得的，這個不變量現在被通稱爲同倫類的 Hopf 不變量。它可取任意偶數値。自然地，我們要問——Hopf 自己也提出了這個問題——是否它能取奇數値呢？也就相當於說，它能否取1爲値呢？Hopf 證明了，當 $n=2,4$ 或8時，答案是肯定的，G. W. Whitehead 則證明了，當 $n\geq 4$ Hopf 不變是1存在的必要條件是，n 被4整除。Adams 運用準則餘同調運算，證明了只有當 n 爲2的乘冪時，這個數才可能存在。Toda 又證明了，當 $n=16$ 時，這樣的數是不存在的。Adams 用了他自己發明的，連絡餘同調學及同倫學的理論，一套深入的譜列，及剩餘同調運算，提出了這個問題的完整答案；卽，僅當 $n=2$，4，8時，這樣的數存在。我們並不是到此就結束對這件事的討論。[註11]。現在轉而談談 Bott 着名的週期性原理。古典群的同倫群的計算一直受到很大的重視，這個問題，不僅本身極富趣味，同時由於它在纖維叢理論及其他應用的成功，也引起了人們對它的興趣，舉例而言，考慮 C^n 上所有寅變換所成的寅群。記如U(n)。當我們把 C^{n+1} 視爲 $n+1$ 維向量的集合時，存在一個自然嵌入映像，將 C^n 的元素映至 C^{n+1} 中，最後一位因子爲0的向量。這就導引出一個從U(n)至U($n+1$)的自然嵌入映像。令 U 爲集聯 $\bigcup_n U(n)$；我們稱之爲大酉群或隱定酉群，其同倫群稱爲酉群的穩定同倫群。事實上，當 $n\geq\frac{1}{2}(r+1)$ 時，$\pi_r(U(n))=\pi_r(U)$；因而我們看到，當 n 極大時，$\pi_r(U(n))$ 穩定。Bott 證明了一個漂亮的定理說，有一個標準的同構，使 $\pi_r(U)=\pi_{r+2}(U)$。因而得到一個相當簡單的結果，卽，當 r 爲偶數時，$\pi_r(U)=0$；當 r 爲奇數時，$\pi_r(U)=Z$；故 U 的同倫群之週期爲2。如果我們把C換成 R，而考慮大正交群 O，則極可喜的，驚人的相似結果，此時週期爲8，而且 Bott 把介於週期之間的每一項都給出了群論方式的解說。這些結果發表在1957年的“Stable homotopy of the classical groups”（古典群的穩定同倫）一文中。其後又有許多進展。$\pi_r(O(n))$ 及 $\pi_r(U(n))$ 被更精細地計算了。Kervaire 及 Milnor，以 Bott 的工作爲基礎，分別獨立地證明了，當 $n>7$ 時，S^7 的不可平行化原理。同時，Atiyah 及 Hizebruch，基於對 Grothendieck 意想的觀念，發展出了實數及複數的 K－理論。這個理論是一個特殊餘同調理論。所謂特殊的意思是指；它滿足了 Eilenberg 公理系統中，除了維數公理以外的所有公理。維數公理是說；0度圓球殼的減縮化

餘同調群，在維數異於0處，具爲消滅。因而它導出了複合體X上的實(複)向量叢的同餘類，而產生一特殊餘同調理論。這個理論，像一般餘同調理論一樣，可以用Eilenberg-MacLane複合體表現。代表的東西通常被視爲譜，亦即一般化的複合體觀念。關於一實（複）K一理論的適當譜是正交譜（酉譜）。K一理論在許多地方看起來比平常的餘同調理論更加自然。這是因爲我們對向量空間上的運算很熟悉，因而對向量叢上的運算也很熟悉的關係。特別地說，Adams 研討了K一理論中的基本運算後，於1961年證明了一個值得褒揚的定理，是講有關圓球殼上獨立向量場的數目的。對任一已給正整數n，有一著名的Hurwitz-Radon-Eckmann數$\rho(n)$，定義如下；將n分解成$n=2^b k$，其中k爲奇數，再令$b=c+4d$，$0\leq C\leq 3$；則$\rho(n)=2^c+8d$。$\rho(n)$的特性是，在S^{n-1}上存在$\rho(n)-1$個線性場，但不存在$\rho(n)$個場。Adams 證明了，$\rho(n)$這個數，不僅解決了線性問題，同時解決了連續的問題，即；S^{n-1}上不存在$\rho(n)$個無關的場。K一理論的另一個勝利是，它導引出Hopf不變量1的答案，而且簡短到令人不敢相信的程度套用一句Atiyah的話：“一張撲克牌就够寫了[註12]。”K一理論和一般餘同調理論有兩個很重要的關連，（撇開用Eilenberg-Steenrod 公理看時，它們形式上的相同不談。）其中之一是Atiyah-Hizerbruch譜列，連絡普通餘同調H及任意給的餘同調理論h：一有限維數複合形X，在這個譜列中，E_2爲$H(X;h(s^\circ))$，E_∞爲由X的樑架分解導出的$h(X)$，經過濾後，所附帶的級群。對這部分，有一個精采的說明，可以在Atiyah-Hizebruch所作，“Vector bundles and homogeneus space，”（向量叢及齊性空間）找到。第二個關連是“陳氏特徵”，這是一個從$K(X)$至$\hat{H}(X;Q)$的乘法同倫。$H(X;Q)$表X的有理係數普通同調。1958年，Hirzebruch在他致Edinburgh世界數學會議的報告中，對此曾做了說明。Dold的“Relations between ordinary and extraodinary Cohomology”（普通餘同調與特殊餘同調的關係）文中，有一篇雅實的譯文。

我們已提過在1953年產生的Thom氏餘邊界理論。這個理論已被廣泛地發展，推廣及應用了。其基本構想是，將（閉）流形就他們是否共同成某一同類開流形的邊界而區分。事實上，至少直到目前爲止，餘邊界理論的俄國名稱爲“內禀同調”。更精確地說，當我們考慮賦向閉微分流形，M_1及M_2，如果存在一（$n+1$）維賦向開微分流形，而它的邊界恰爲M_1及M_2之邊界的聯集時，我們稱M_1及M_2爲餘邊界的。這是一個等價關係，等價類的集合寫如Ω^n。在相離和的運算下，Ω^n有交換群的結構，而且，拓撲積引導出

一個乘法，$\Omega^m \times \Omega^n \to \Omega^{m+n}$，使得$\Omega = \bigoplus_n \Omega^r$變成一個交換級環，稱之爲賦向餘邊界環。Thom證明了Ω^n可看成某一個穩定同調群（屬於我們現在所稱特殊正交群的Thom複合形者）來計算，Atiyah則發現，這可導得空間X的餘邊界理論。（將X映入Thom複合形）因而；Thom理論即爲圓球殼的餘邊界理論。它和餘邊界理論的關係有如同調理論與餘同調理論間的關係一樣。這觀點使得問題大大簡化了，同時，新的結果也不少。Wall一手完成了Thom所開始的Ω的計算。Milnor，Dold，E. H. Brown，Peterson和其他人，對此理論也有重大貢獻。Milnor於1962年發表了“A survey of cobordism theory”（餘邊界理論巡禮），文中他討論了已知的結果和沒有解決的問題。這一篇瀏覽性的介紹，强調了自1952年有此理論以來所有的重大進度。這是遠非它當年在Atiyah-Singer指數定理的證明［註12］中所擔當角色所可同日而語的。下面我們要談一些更進一步的發展，即Smale的所謂h—餘邊界定理。E. Dyer替本書寫了一篇“The functors of algebraic topology”（代數拓撲學函手）。在這篇文章中，他根據組合同倫理論的基本觀念，將代數拓撲學的廣泛研討，寫成綱要。建立理論之後，他把餘邊界理論和穩定向量叢（K—理論）看成特別的情況。到此爲止，我們已經用了不少篇幅來讀“純粹”和“應用”代數拓撲學，現在我們必須討論一下，前面提到過的所謂微分拓撲學的解析方法，雖然說有點不合時地。很幸運地，微分拓撲學在勘測方面，有很豐富的文獻。我們特別舉出Smale的一篇文章，“A survey of some recent developments in differential topology,”（微分幾何學近期發展一覽）Wall的一本講稿，“Differential topology”（微分拓撲學）以及Munkres的一些介紹性文字“Elementary Differential topology”（初等微分拓撲學）。

現在微分拓撲學最出色的工具，很可能要算Morse Theory了，這是由Smale修改過，用來得到微分流形上的結構理論以及相關的圓球殼修模學觀念。（現在我們稱之爲開刀術）。本書最後一篇文章，由V. Poénaru所寫的，“On the geometry of differentiable manifolds”（微分流形上的幾何理論），討論到這個微分拓撲學的新工具，以及它們帶來的一些詳細結果。我們只在這裡提綱挈領地列舉它們主要的觀念。

令M表一流形，其邊界爲∂M，而$f: S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial M$爲一圓滑嵌入映像，這裡$D^s$是表周界爲$S^{s-1}$的s度圓板。我們取這兩個流形$M$及$D^k \times D^{n-k}$的相離和，利用$f$把它們黏貼起來。換句話說，我們用$f$把$D^k \times D^{n-k}$貼上$M$。磨圓角落周圍後，即得一個新流形$\widetilde{M}$。我們稱$D^k \times D^{n-k}$爲一$k$度

把，而$\widetilde{M}$即為M上黏接一k度把所得到的新流形。如果我們注意觀察邊界∂M，可以看到從∂M轉變到$\partial\widetilde{M}$的過程中，我們從∂M中剪掉了$S^{k-1}\times D^{n-k}$而補上$D^{k}\times S^{n-k-1}$，而得到$\partial\widetilde{M}$。這個步驟稱爲k維開刀術。這稱手術可以在一般閉流形上做。並不必限定在流形的邊界上。Smale 和Wallace 各自獨立的證明了每一流形都有把解體。Smale 是根據了他對美妙函數方面理論的討論。這理論造成Morse 理論的另一次發展。Morse 曾證得;流形上的圓滑函數，可以用只含孤立非退化歸界點的函數逼近。Smale 更進一步證明了下一件事；假設M_1及M_2爲兩個餘邊界的閉流形。亦即存在一流形M，以M_1及$-M_2$爲其周界；則有一W上的函數f，只含孤立非退化臨界點，都不在$M_1\cup M_2$上，且若α爲具指數k之函數f的臨界點，則$f(\alpha)=k$（$f=\frac{1}{2}$於M_2上，$f=n-\frac{1}{2}$於M_1上）。Smale 追隨 Morse 的工作，對如何從M_2開始建造得W的方法，作了一番分析，而證明了，我們可以把這個步驟視爲，當經由集合$f(\alpha)\leq K-\epsilon$到集合$f(\alpha)\geq K+\epsilon$時黏貼上一個指數爲k的把而得到。利用這個W上的把解體，Smale 證明了享盛名的h一餘邊界定理。（“On the structure of Manifold.”流形結構論）

在上面描述的情況下，我們稱爲介於M_1及M_2間的餘邊界體。若W可以收縮地變形映至M_1上以及M_2上，更稱之爲h一餘邊界體，而稱M_1與M_2爲h一餘邊界的。並不難知微分同構的流形爲h一餘邊界的。Smale，利用W上已知的結構，和有關把柄截除術的討論，證明了逆定理，即，假設W是單連通的，維數≥ 6，則它本身與$M_2\times I$爲微分同構的［註14］，而M_1微分同構於M_2。從這個結果，他演繹到對維數≥ 6的微分流形上，一般形式的Poincaré 猜測，即，一個具n度圓球殼同倫型的微分流形，與n度圓球殼同胚（用一種特別的討論，他把維數等於5的情況也包含進去。）［註15］。該注意的是，這個定理的結論，有如它在組合流形上的型式（Stallings 及 Zeeman 得到的），是純粹拓撲的。Connell 和Newman 最近發表了一般型式Poincaré 猜測的另一不同形式，其中的假設與結論，都是純粹拓撲的。h一餘邊界定理也有一個不同的形式，其中我們免去了單連通的條件。所付出的代價是，把收縮變形改爲 J.H. C. Whitehead 所給的“組合性收縮變形”。［參考Mazur，所著，“Differential topology from the viewpoint of Simple homotopy theory,”（單純同倫理論觀點下的微分拓撲學）］Barden 及 Stallings 也曾給過證明。有一部份可談性很高，有關s一餘邊界理論的資料，在Kervaive 所着“Lethéorème de Barden-Mazur-Stallings”（Barden-Mazur-Stallings定理）可以找到。開刀術在微分

拓撲學中被廣泛深入地應用[註16]。我們可以就Browder，Novikov 和其他人，在應用同倫理論的問題上所從事的工作，做爲一個例子。這些問題如下列種種："給定一個具某些性質的複合形K，是否存在一個具有K的同倫型的圓滑流形？給定一圓滑流形的同倫類，如何決定它共包含多少微分類？"非常簡略地說，Browder 建立了第一逼近法去解決前面的第一個問題，也就是說，設M是圓滑流形，f為介於M及K間的映像，精細地改造M使得f馴服成一個同倫等價。這種討論已經越來越變成微分拓撲學家標準的法則。它引導人，對這類問題，常期望按照流形的級數，分成三類，即(i)級數爲奇數，(ii)級數$\equiv 2 \pmod 4$，(iii)級數$\equiv 0 \pmod 4$。困難的地方是有關"中間維數"的處理。情況(i)是最簡單的一類，因爲沒有中間維數。情況(iii)在中間維數上的處理手術有一些障礙，與Hirzebruch 指數有密切的關係。情況(ii)中的障礙即所謂的Arf 不變量。雖曾被廣泛而深入地研討過。却仍然帶著神秘的色彩，它是在模數2下二次型式的一個不變量。讀者們可以在Kervaire及Milnor 的論文"Groups of homotopy spheres (I)"中找到這個不變量以及其他重要的資料。

另一類値得特別一提的問題是：如何把一個圓滑流形嵌入另一個圓滑流形。這類問題與我們以前談的有些關連。最通常的情況是，容納的流形爲歐氏空間R^m。我們要問的一個典型問題是：給定一個流形M，M能嵌入[註17] R^m中的m最少值是多少？M. W. Hirsch 是這個領域裡的領導人物之一，在1963年的西雅圖會議上，他提出了一篇有關已知的結果和主要問題的廣泛性報告。最近雖然又有許多重大的進展，但這一篇報告仍不失爲很有用的文獻。因爲它不僅列舉出所有的已知結果。同時很完滿地指出了現在正被考慮着的問題形式。另一方面說，也有些格外有趣的反例，指明M不能嵌入R^m中。這些結果的得來，都傾向於應用更多的代數拓撲方法。這些問題常導致適當形式的"障礙理論"的發展，Munkres，追隨Thom，在組合結構圓滑化的問題上，就發展出了"障礙理論"，這個問題也就是說，依(2)的符號，如何就一給定組合流形M，在其上建造一微分流形$\widetilde{M}$，使得$W(\widetilde{M})=M$；後者的阻礙係數是某些非常有趣的群，即所謂的Γ－群，它的元素是圓球殼上外來圓滑結構的等價類。因而，我們的討論必須回到微分拓撲學的起源地 Milnor 於1959年發表的7度圓球殼上微分結構的論文。在Hirsch "Obstruction theories for smoothing manifolds and maps，"（流形及映像圓滑化中的障礙理論）文中，可以發現障礙理論非常好的說明。

就像我們以前所說的，圖表

$$\mathrm{Diff} \xrightarrow{W} \mathrm{PL} \xrightarrow{F} \mathrm{Top}$$

包含着流形理論上主要問題的命題形式。在每一個範疇內我們尋找一組完整的不變量來定義流形上的等價類。進展雖然只是局部的，但却是驚人的。特別的等價類事實上已經被區分過了。（舉例來說，Wall 的論文“On the Classification of $(n-1)$-Connected $2n$-manifolds”「$(n-1)$度連通的$2n$維流形上之分類」以及，Eells 和 Kuiper 的論文“Manifolds which are like projective planes”「擬射影平面的流形」）而主要猜測也已在掌握之中，許多年來，我們就已知道一個胞腔帶有一個唯一的可微分結構。令人驚奇的是，拓撲學家隨着新問題又重拾起 1920，1930 年代拓撲學先驅所考慮的主要基本問題，這些問題在當時由於處理的困難，暫被放棄，而使學者們轉而從事代數同倫理論的研討。今天在流形理論上的工作的有趣現象是，如果我們把微分流形代以組合流形，許多有關微分流形上的命題，只需稍加修飾，仍然是眞確的［註 18］。在大部份的情況下，從一個範疇換到另一個範疇時，主要的困難在於如何對有用的觀念找到適當地翻譯；如何把在一範疇中很普通的概念有用地在另一個內用有意義的相當詞句來表達。我們已舉過一個實例——有理 Pontrjagin 類的 Thom 氏翻譯，現在再舉第二個例子就足夠了。Milnor 把向量束的觀念介紹到微分流形上而發明了所謂微束的觀念。這種微束的觀念在我們談到的三個範疇中都可以定義。每一個向量束決定一個微束，附帶於每一組合流形或微分流形上，有一種特別的微束，且若流形上存在有一相合的圓滑結構，則此微束爲由圓滑結構上的切叢所導出者。因而，對於一個組合流形，既使它不能安置微分結構，我們仍可討論它的切線結構，一份最近的而且完整的有關微叢的說明可在 Kuiper 及 Lashof 的論文“Microbundles and bundles I. Elementary theory,”（微束及叢的初步理論）找到。

本序文——事實上應該說本書——如果能使讀者們對當今拓撲學旺盛的生機以及它所帶來的主要功用，有點粗淺的印象的話，即已大功告成。編者剩下要做的事就是，感謝這些很有份量的文章的作者，謝謝編者好友 Paul Olum 以及 Nicolas Kuiper 一些善意的批評，同時要對同僚致歉意，無論是在序文中提到的或沒有提到的編者不公之處，還希望你們多多諒解。另外，對那些想從這篇瑣亂無章的序文，了解近世拓撲學內容的讀者們，編者深深地感到愧疚。