

高等学校教学参考书

# 机械动力学

唐锡宽 金德闻

高等教育出版社

高等学校教学参考书

# 机械动力学

唐锡宽 金德闻

高等教育出版社

## 内 容 简 介

本书阐述了机械动力学的基本理论和分析方法。全书包括六章和四个附录。第一、二章研究了挠性转子和平面机构的平衡问题,第三章对由刚性构件组成的单自由度、两自由度平面机构以及有关飞轮设计问题作了仔细的分析,第四、五章讨论考虑构件弹性和运动副间隙的机械动力学分析方法,最后介绍了具有变质量构件的平面机构动力分析的基本理论。

本书可作为高等工院校机械动力学课程的教材和有关专业的教师、学生的教学参考书,亦可供从事机械振动、机械设计的科技人员参考。

高等学校教学参考书

**机械动力学**

唐锡宽 金德闻

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

\*

开本 787×1092 1/16 印张 19 字数 430,000

1983年11月第1版 1984年5月第1次印刷

印数 10,001—7,500

书号 15010·0531 定价 2.40 元

# 序 言

当前我们正在向着四个现代化的宏伟目标前进,各部门迫切需要大量新的、高效率、高速度、高精度和高度自动化的机械和技术装备。由于机械速度的提高,机械振动和平衡问题已成为某些机械设计中的关键问题之一;在设计高速度、高精度的机械时,要涉及各种动力学因素、要精确计算各部件的真实运动情况以及考虑构件的弹性、运动副中间隙等因素对构件运动的影响,才能使各部件动作协调,机械正常运转。随着工业和科学技术的迅速发展,机械的功率、运行速度、精度和自动化程度愈加提高,因此机械动力学的研究也就日益受到重视。

同时,在近廿年来由于电子计算机的发展和被广泛应用,机械动力学的研究也有了显著的进展。例如在挠性转子平衡技术中引入了微处理机,对多自由度机构的动力学研究、考虑构件弹性和运动副中间隙等的动力学问题时,都需要应用电子计算机进行大量的计算。因此计算技术的迅速发展大大促进了机械动力学的发展。现在在各种刊物中有关机械动力学的论文很多,并且这方面的新成就正在逐步地反映到国内外的教材中去。在机械原理教材中,机械动力学的内容也有了充实和加强。但是目前国内在机械动力学方面的书籍尚不多,远不能适应机械原理教学和满足有关工程技术人员的需要。本书是试图为满足上述要求而编写的。

本书共分六章。

第一、二章讲述了挠性转子和平面机构的平衡问题。振动、噪音是大型汽轮发电机组、压气机等高速回转机械和内燃机等具有往复运动构件的机械中的重要问题。对高速回转的转子和机构整体进行平衡可以有效地减少振动。本书对挠性转子和机构平衡的原理和方法作了简要的叙述。

第三章研究了由刚性构件组成的机械的动力学问题。在这章中认为机械各构件都没有弹性变形,忽略了其运动副中间隙的影响。随着机械精度和自动化要求的提高,机构运动精度和动作协调的要求也愈来愈高,同时为了更精确地确定各构件及运动副中的受力,需要研究机构在外力作用下的真实运动情况。在这一章中除了讲述单自由度机构外,还讲述了两自由度机构的动力学分析,研究了速度周期性波动的调节问题——飞轮设计问题。

第四、五章讲述了考虑构件弹性和运动副中间隙对机械动力学的影响。一方面由于机械的功率加大,速度提高,构件所受的载荷增加,而另一方面,构件的尺寸却希望尽可能减小,因而构件相对地变得“柔软”了。构件的弹性变形的影响就需要加以考虑,它们会在相当程度上影响到机械中某些构件的实际运动情况。另外,由于运动副中存在间隙,在运动过程中,构件间将会引起冲击,同时也影响到机械的运动精度。严重时这些情况会造成各构件间动作配合的不协调,破坏整个的生产节奏。

在不少机械中,当研究它的动力学问题时,需要考虑到被它加工的构件(加工对象),这些被

加工对象的质量常常是变化的。质量不仅随构件的位置改变而变化,也可能随运动速度或时间的改变而变化。这使某些构件的质量和质心位置发生变化,成为变质量的构件。不仅如此,在有些机械中,工作物质以与工作构件不同的速度抛出或进入机械,引起冲力等附加力。这种构件质量的变化和附加力使机械动力学问题复杂化。在第六章中讨论了这种具有变质量构件的机械动力学问题。

动力学问题的研究是较复杂的,不少地方不得不借助电子计算机。本书中除少数地方讲一些图解法外,主要采用解析方法和数值计算法,以适应电子计算机的应用。

每章后面附有该章的主要参考文献目录。

学习本书前需要有理论力学、分析力学和振动理论的一些基本概念。

本书可作为机械类高年级学生选修课教材,机械设计专业学生和机械学研究生学习机械动力学时的教材,也供机械原理教师参考和工程技术人员在设计机械、研究其动力性能、解决机构平衡等动力学问题时参考。

本书第一、二章由清华大学金德闲编写,三、四、五、六章及附录由清华大学唐锡宽编写,并由唐锡宽主编。

本书承上海交通大学黄步玉教授和邹慧君副教授仔细审阅,提出了很多宝贵意见,编者特此表示衷心的感谢。

由于我们水平所限,误漏欠妥之处在所难免,竭诚欢迎读者批评指正。

编者

1983. 3

# 目 录

<b>第一章 挠性转子平衡的原理与方法</b> .....1	<b>第四章 考虑构件弹性时的机械动力学</b> .....136
§ 1-1 转子在不平衡力作用下的振动现象.....1	§ 4-1 概述.....136
§ 1-2 单圆盘转子在不平衡力作用下的 变形.....4	§ 4-2 考虑轴的扭转变形时传动系统的 动力学分析.....143
§ 1-3 匀质挠性转子在横向自由振动时的 挠度曲线.....8	§ 4-3 周期运动机构的动力学分析.....165
§ 1-4 非匀质挠性转子的临界速度及振型 函数.....11	§ 4-4 用有限元法研究具有弹性构件的 平面连杆机构.....169
§ 1-5 回转效应及支承动刚度对临界速度 的影响.....17	§ 4-5 用差分法研究具有弹性构件的平面 连杆机构.....194
§ 1-6 挠性转子在不平衡力作用下的变形.....21	§ 4-6 仪器中机构的动态精度分析.....206
§ 1-7 挠性转子平衡条件.....25	<b>第五章 考虑运动副中间隙时的机械     动力学</b> .....214
§ 1-8 振型平衡法.....30	§ 5-1 用小位移法分析运动副间隙对机 构运动的影响.....214
§ 1-9 影响系数平衡法.....32	§ 5-2 组成有间隙移动副的构件的动力 学分析.....218
<b>第二章 平面机构的平衡</b> .....39	§ 5-3 组成有间隙转动副的构件的动力 学分析.....228
§ 2-1 平面机构平衡的基本条件.....39	§ 5-4 用连续接触模型进行运动副有间 隙的机构动力学分析.....238
§ 2-2 平面机构的惯性力及其平衡方法.....40	<b>第六章 具有变质量构件的机械动力学</b> .....254
§ 2-3 机构惯性力平衡的广义质量替代法.....41	§ 6-1 概述.....254
§ 2-4 机构惯性力平衡的线性独立向量法.....46	§ 6-2 变质量质点的运动方程式.....256
§ 2-5 机构惯性力的部分平衡法.....54	§ 6-3 变质量构件的运动方程式.....258
§ 2-6 在机构运动平面内的惯性力矩的 平衡.....61	§ 6-4 变质量构件的能量形式的运动方 程式.....265
<b>第三章 由刚性构件组成的机械系统的动     力学</b> .....70	§ 6-5 具有变质量构件的机械运动方程式.....269
§ 3-1 概述.....70	附录 1 数值积分方法.....275
§ 3-2 等效力学模型.....71	附录 2 常微分方程的近似数值解法.....278
§ 3-3 运动方程式.....76	附录 3 关于具有周期性变系数的二阶线 性微分方程的解法.....283
§ 3-4 运动方程的求解.....78	附录 4 矩阵迭代法.....292
§ 3-5 稳定运动时期的动力学分析.....96	
§ 3-6 两自由度机构的动力学分析.....100	
§ 3-7 周期性速度波动和飞轮转动惯量 的计算.....116	

# 第一章 挠性转子平衡的原理与方法

挠性转子平衡的理论和方法是近二十年发展起来的转子动力学中的一个重要课题。机械的振动是高速机械设计及运行中经常遇到的问题。它能产生强大的噪音,降低机械零件的寿命,甚至引起机件破坏,从而发生严重事故。引起机械振动的原因是多方面的。交变的外载荷、转子的不平衡惯性力以及轴承密封的影响都能引起振动。本章所讨论的问题是高速转子由于不平衡力引起的振动现象和消除这种不平衡的原理及方法。

## § 1-1 转子在不平衡力作用下的振动现象

### 一、刚性转子在弹性支承上的振动

对于刚性转子的这种振动现象,我们并不陌生。如果把这种转子系统简化为两个自由度的线性振动系统(图 1-1),并取质心  $S$  的位移  $y_s$  和绕质心  $S$  的转角  $\theta$  为两个广义坐标,我们就可以用拉格朗日方程推出这个系统的运动方程。

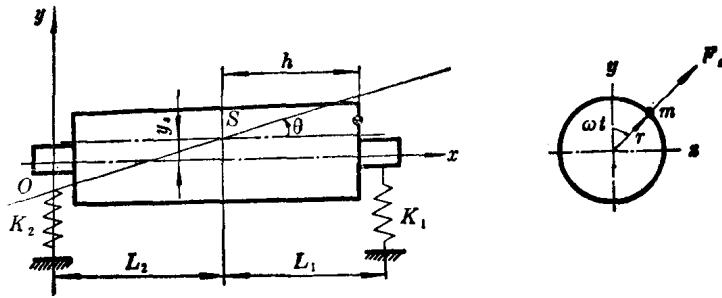


图 1-1

拉格朗日方程为: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = F_i \quad (1-1-1)$$

式中  $E$  —— 系统的动能;

$q_i$  —— 第  $i$  个广义坐标;

$F_i$  —— 对广义坐标  $q_i$  的广义力。

在图 1-1 所示的系统中:  $q_1 = y_s, q_2 = \theta$ 。

系统的动能为: 
$$E = \frac{1}{2} (M \dot{y}_s^2 + J_s \dot{\theta}^2)$$

式中  $J_s$  —— 转子绕过质心并垂直于  $xOy$  平面的轴的转动惯量。

从而 
$$\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_s} = M \dot{y}_s \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = J_s \dot{\theta} \quad \frac{\partial E}{\partial y_s} = \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$$

支承弹性力为:  $F_{K1} = -K_1(L_1\theta + y_s)$

$$F_{K2} = -K_2(-L_2\theta + y_s)$$

转子的不平衡力为:

$$F_u = mr\omega^2$$

$mr$  为转子上对质心距离为  $h$  的平面上所具有的不平衡量。因为一般转子的不平衡量不是很大, 所以只考虑它所产生的不平衡力, 而不计它对转子转动惯量等系统参数的影响。

所以系统的运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{d(M\dot{y}_s)}{dt} = F_{K1} + F_{K2} + F_u \cos \omega t \\ \frac{d(J_s\dot{\theta})}{dt} = F_{K1}L_1 - F_{K2}L_2 + F_u h \cos \omega t \end{cases}$$

将  $F_{K1}$ 、 $F_{K2}$ 、 $F_u$  代入上式并整理得:

$$\begin{cases} M\ddot{y}_s + (K_1 + K_2)y_s - (K_2L_2 - K_1L_1)\theta = mr\omega^2 \cos \omega t \\ J_s\ddot{\theta} + (K_1L_1^2 + K_2L_2^2)\theta - (K_2L_2 - K_1L_1)y_s = mr\omega^2 h \cos \omega t \end{cases}$$

若该转子结构对称, 即  $K_1 = K_2 = K$ ,  $L_1 = L_2 = L$ , 则运动方程简化为:

$$\begin{cases} M\ddot{y}_s + 2Ky_s = mr\omega^2 \cos \omega t \\ J_s\ddot{\theta} + 2KL^2\theta = mr\omega^2 h \cos \omega t \end{cases}$$

方程的特解为:

$$\begin{cases} y_s = \frac{mr\omega^2}{2K - M\omega^2} \cos \omega t \\ \theta = \frac{hm\omega^2 r}{2KL^2 - J_s\omega^2} \cos \omega t \end{cases} \quad (1-1-2)$$

由式(1-1-2)可以看出刚性转子在不平衡力作用下的振动具有如下特点:

1) 振动的幅值和原始不平衡量的大小  $mr$  成正比。

2) 当转子的角速度  $\omega = \omega_{yc} = \sqrt{\frac{2K}{M}}$  和  $\omega = \omega_{\theta c} = \sqrt{\frac{2KL^2}{J_s}}$  时, 转子振动的幅值趋于  $\infty$ 。  $\omega_{yc}$

和  $\omega_{\theta c}$  就是在弹性支承上的刚性转子的临界速度。这种振动现象在一般低速软支承动平衡机上可以观察到。

## 二、挠性转子在刚性支承上的振动

为了说明这种现象, 先看一个具体例子。图 1-2 为一根细长的钢轴。尺寸如图所示。如果支承的刚度系数为  $K_1 = K_2 = 10^6 \text{ N/cm}$ , 转子质量

$$M \approx \frac{7.8 \times \pi d^2 \times L}{4} = \frac{7.8 \times \pi \times 1 \times 50}{4 \times 1000} = 0.31 \text{ kg, 可}$$

以估算它发生刚性转子-轴承系统共振时的临界速度为:

$$\omega_{yc} = \sqrt{\frac{2K}{M}} \approx 2500 \text{ 1/s}$$

即

$$n_{yc} = 2.4 \times 10^4 \text{ rpm}$$

从这个计算结果可以知道, 这种转子系统产生上述振动时转速很高。这种支承刚度相对于

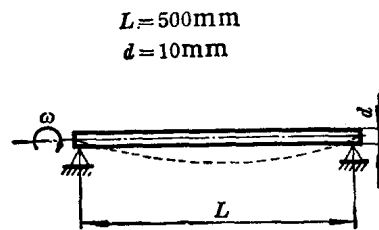


图 1-2



轴的刚度很大的情况,可以认为支承是刚性的,即认为  $K_1, K_2 \rightarrow \infty$ , 因而不容易发生刚性转子系统的共振。然而就是这样一根转子如果存在原始不平衡量的话,当转速接近 6800rpm 时,会发生强烈振动。而且通过测量仪器可以观察到这时轴发生相当大的弯曲(弹性变形),如图 1-2 虚线所示。这说明了在这种情况下不能再把转子作为刚体来研究它的动力学性质。同时也说明对于这种以弯曲变形为主的转子还存在着另一种临界速度,我们称之为弯曲临界速度,简称为临界速度。转子的弯曲临界速度随它的刚度而改变。转子越细长,临界速度越低,并且它的临界速度不止一个。当我们把图 1-2 所示的轴的转速升高到 6800rpm 以上时,轴的振动会逐渐平静下来,而继续升高达到某一数值时,又会发生强烈振动。如此下去,理论上可以出现无穷多次这种振动。我们依次称之为—阶临界速度、二阶临界速度、……。

转速在一阶临界速度以上的转子叫做挠性转子,在一阶临界速度以下运转的转子叫刚性转子。

近年来,随着工业的发展,在高速机械和大功率的发电机组中比较多地采用了挠性转子。这是因为对于速度很高的机械,如果设计成刚性转子,会加大机件的尺寸。对于大功率的发电机组,为了提高机组容量,常常采用加大转子长度的办法。因而降低了轴的刚度,使转子的临界速度较低。所以机组的工作转速往往在一阶或二阶临界速度以上。下表是常见的几种发电机组转子的工作转速及临界转速。

电机容量 kW	转子直径 mm	转子长度 mm	重量 kN	临界转速 rpm	工作转速 rpm
50000	820	8000	170.4	1280	3000
125000	1000	9275	303.8	1250	3000
300000	1100	12430	588	950(I) 2750(II)	3000

转子的临界速度及其在临界速度时的变形问题、振动问题是本章重点讨论的问题之一,将在下面几节中逐步讨论。

### 三、挠性转子在弹性支承上的振动

上面分别讨论了弹性支承和挠性轴的情况。通常当转子的刚度和支承刚度相差不是很悬殊时,要同时考虑二者的弹性。

挠性转子在弹性支承上的振动现象和挠性转子在刚性支承上情况相仿,转子系统也存在着无穷多阶临界速度,在临界速度下转子也会产生变形,系统也会发生振动。但是由于支承弹性的影响,有下述三点不同:

- 1) 支承弹性使各阶临界速度降低。
- 2) 由于支承在垂直和水平方向均有弹性,而且刚度在两个方向上不一定相等。因此对于任一阶临界速度都可能存在着两种速度,  $n_{c\text{水平}}$  和  $n_{c\text{垂直}}$ 。
- 3) 在临界速度下转子不仅本身产生弯曲,而且还在支承上沿两个方向振动。因此轴心的运动轨迹不是一个圆,而是一个椭圆。

图 1-3 为在试验台上记录下的一根试验转子的轴心轨迹。在水平和垂直方向上分别装两个传感器,把在两个方向测得的轴的振动送入示波器的  $x$  向和  $y$  向,这样就可从示波器上拍摄下轴心运动轨迹。

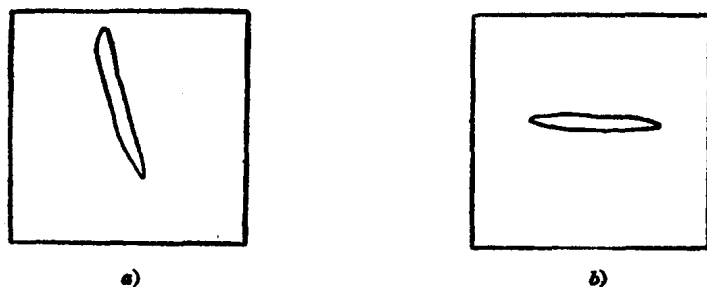


图 1-3

图 1-3,  $a$  是当转速为  $n_{c_{垂直}}$  时拍摄的。此时椭圆的长轴大约在垂直方向上。图 1-3,  $b$  为转速等于  $n_{c_{水平}}$  时的情况。由于该试验台支座的垂直刚度小于水平刚度,所以临界速度  $n_{c_{垂直}} < n_{c_{水平}}$ 。

图 1-4 概括了上面所讲的三种情况,表示了转子转速与支承刚度、挠性转子与刚性转子的关系。

图的左部为支承刚度小时的情况,此时当速度不太高时发生转子为刚体时的共振,高速时产生弯曲振动。同一根转子当支承刚度增大后,变成图右方所示的情况,此时没有出现刚性转子-支承系统共振现象。图中虚线为刚性转子和挠性转子的分界线。

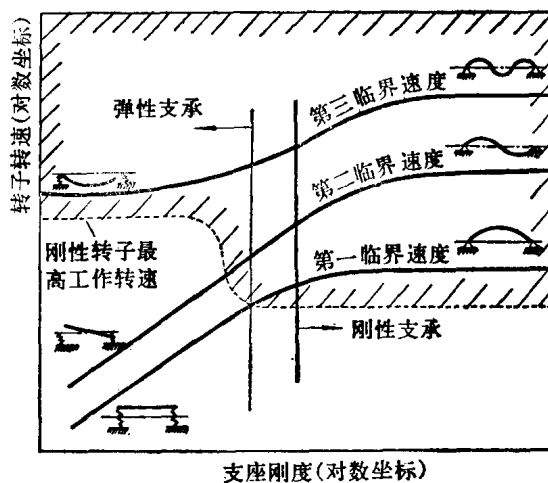


图 1-4

### § 1-2 单圆盘转子在不平衡力作用下的变形

在上一节已经谈到挠性转子以临界速度运转时,会产生很大变形,因而引起转子系统的强烈振动。为什么转子会变形呢?这种变形与转子的速度又有什么关系呢?在这一节中将分析最简单的单圆盘转子的情况。

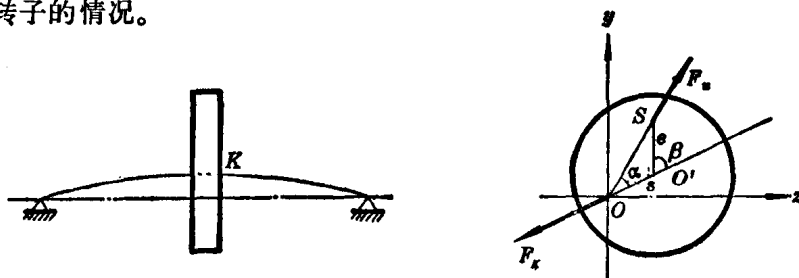


图 1-5

图 1-5 为一安装在刚性支承上的挠性转子。轴的正中有一个质量为  $M$  的圆盘。把圆盘本身

看作是刚体。由于它在轴的正中,故在轴弯曲时圆盘将不产生偏转。盘上有不平衡量,因此圆盘质心  $S$  离开其几何中心  $O'$ , 偏移量为  $e$ 。轴的刚度系数为  $K$ , 由于轴较细, 可不考虑它的质量。当轴以  $\omega$  角速度回转时, 在不平衡力  $F_u$  的作用下轴在圆盘中心  $O'$  处产生变形  $s$ 。设  $F_k$  为轴的弹性恢复力。 $\beta$  为轴的变形方向与  $O'S$  方向之间的夹角。根据达朗伯原理可得:

$$\omega^2 M(s + e \cos \beta) = Ks$$

$$s = \frac{M\omega^2 e}{K - \omega^2 M} \cos \beta = \frac{\omega^2 e}{\omega_c^2 - \omega^2} \cos \beta \quad (1-2-1)$$

其中: 
$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$\omega_c$  就是前面讲到的临界速度。从式(1-2-1)可知, 当  $\omega = \omega_c$  时, 轴的变形  $s$  趋于  $\infty$ , 这就是轴在临界速度下产生很大变形和引起强烈振动的原因。对于单圆盘转子, 因为它只有一个质量, 所以只有一个临界速度。

考虑沿垂直于  $OO'$  方向力的平衡有

$$F_u \sin \alpha = M\omega^2 e \sin \beta = 0 \quad (1-2-2)$$

或 
$$\sin \beta = 0$$
  
故 
$$\beta = 0^\circ \text{ 或 } 180^\circ$$

当  $\omega < \omega_c$  时,  $\beta = 0^\circ$ 。这就是图 1-6, a 所示的情况。此时圆盘质心离点  $O$  最远, 产生的不平衡力也最大。当  $\omega > \omega_c$  时,  $\beta = 180^\circ$ , 这时的情况如图 1-6, b 所示, 圆盘质心在几何中心与点  $O$  之间。而当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $s \rightarrow e$ , 即质心趋于和点  $O$  重合, 不平衡力趋于零。这种现象叫自位定心现象, 如图 1-6, c 所示。

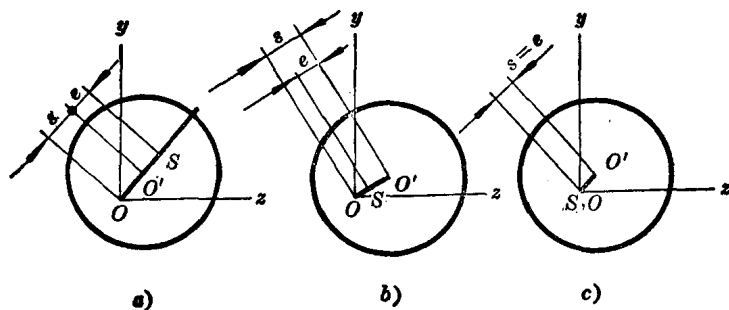


图 1-6

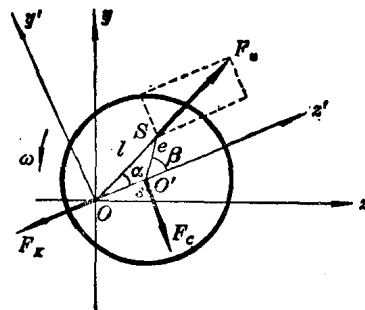


图 1-7

在以上分析中, 没有计入系统阻尼。如果圆盘上受有阻尼系数为  $C$  的粘性阻尼, 则阻力  $F_d$  与轴弯曲后的几何中心点  $O'$  的速度  $v_{O'}$  成正比。因  $v_{O'} = \omega s$ , 故

$$F_d = C v_{O'} = C \omega s$$

$F_d$  的方向与  $v_{O'}$  相反, 如图 1-7 所示。

不平衡力为 
$$F_u = M\omega^2 l$$

根据  $z', y'$  方向的力平衡条件, 有

$$\begin{cases} M\omega^2 l \cos\alpha = Ks \\ M\omega^2 l \sin\alpha = C\omega s \end{cases}$$

角  $\alpha$  为  $OS$  与轴  $z'$  间的夹角。

即 
$$\begin{cases} M\omega^2 (s + e \cos\beta) = Ks \\ M\omega^2 e \sin\beta = C\omega s \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = \frac{C\omega}{K - M\omega^2} \\ s = \frac{M\omega^2 e}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2}} = \frac{e}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{C^2}{M^2\omega^2}}} \end{cases} \quad (1-2-3)$$

其中：
$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$s$ 、 $\beta$  与  $\frac{\omega}{\omega_c}$  的关系曲线如图 1-8 所示。

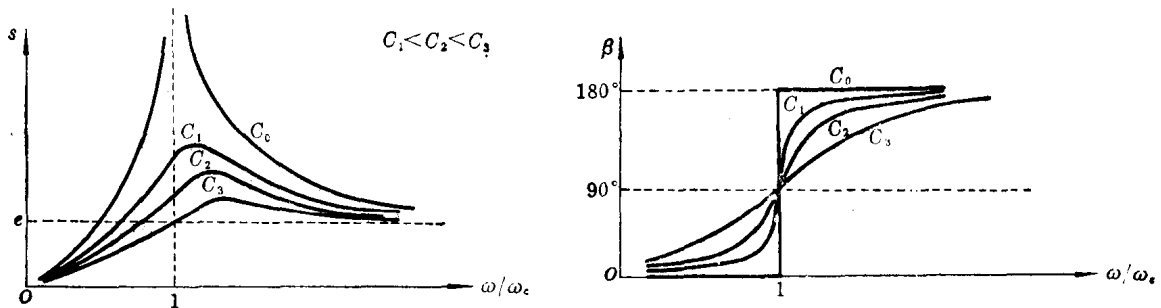


图 1-8

由式(1-2-3)可以看出挠性转子在不平衡力作用下的变形具有如下特点：

- 1) 在一定转速下，转子的变形量与不平衡量成正比，相位相差角  $\beta$ 。
- 2) 在一定的不平衡量下，转子的变形和  $\omega$  有关。当  $\omega$  接近  $\omega_c$  时，转子的变形量最大。

对于单圆盘转子，如果在圆盘上加平衡量使  $e=0$ ，由式(1-2-3)可知转子的变形  $s=0$ 。也就是说转子无论在低速或高速下都不产生不平衡力。

但是一个实际转子，由于加工、材质不匀等原因所产生的原始不平衡在一般情况下并不集中在某一个平面上，往往任意分布在转子各平面上，如图 1-9 所示。

在图中，转子的原始不平衡量的重径积用  $u(x)$  表示。分布在各个垂直于轴  $x$  的平面内，指向不同方向。

当在低速下，对转子进行刚性动平衡时，由于动平衡的目的是消除转子不平衡所产生的作用于支承上的动压力，所以可以任选两个平衡平面  $I$ 、 $II$ ，在它们上面加校正量  $U_I$ 、 $U_{II}$ ，从而使转子得到平衡。若转子长为  $l$ ，平衡面  $I$ 、 $II$  离坐标原点的距离为  $x_1$ 、 $x_2$ ，则刚性动平衡的校正量应满足式(1-2-4)：

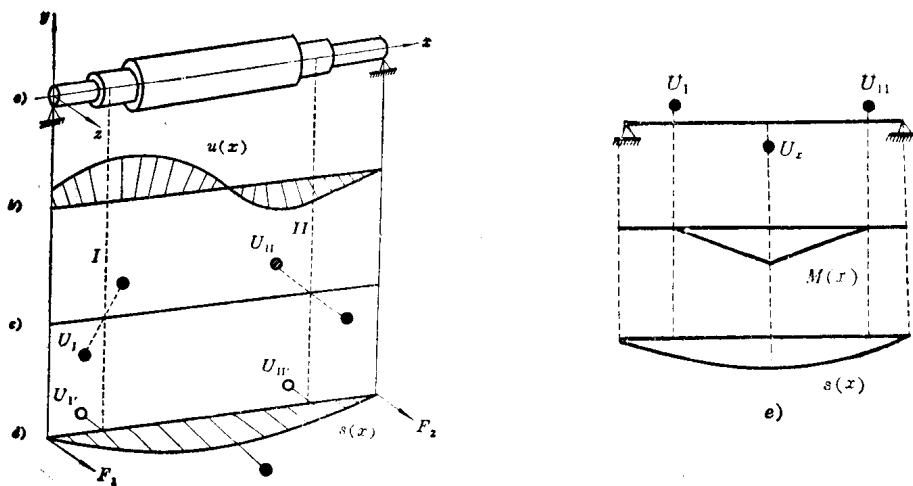


图 1-9

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \mathbf{u}(x) dx + \sum_{j=1}^2 \mathbf{U}_j = 0 \\ \int_0^l x \mathbf{u}(x) dx + \sum_{j=1}^2 x_j \mathbf{U}_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-4)$$

转子经过刚性动平衡后,虽然可以消除对支承的动压力,但是使转子产生变形的弯矩依然存在。这一点可以从图 1-9, e 得到说明。设该轴上无其他载荷,只有一个集中的不平衡量  $U_x$ 。当用  $U_I, U_{II}$  校正了  $U_x$  以后,转子再转动时,  $U_I, U_{II}, U_x$  的离心力产生弯矩  $M(x)$ 。在  $M(x)$  的作用下轴发生变形  $s(x)$ 。这种变形又产生了新的动压力。所以经过刚性平衡的转子在挠性状态下又出现不平衡。特别是在临界速度时转子的变形很大,往往产生强烈振动,使机器不能正常工作。这就是挠性转子必须在高速下进行平衡的原因。

总起来说,挠性转子的不平衡是由于转子在高速情况下变形引起的。挠性平衡的目的是:保证在临界转速以上运转的转子,在工作和启动过程中,对轴承的动压力及转子本身的变形都在允许范围内。由于这种动压力是引起系统振动的主要原因,因此一般都以轴或者支承在工作速度下的振动量,或在启动过程中通过临界速度时的最大振动量,作为判断转子平衡程度的指标。在特殊情况下,也可用残留在规定的校正平面内的不平衡量来鉴定。关于挠性转子平衡精度已有国际标准 ISO 草案。

挠性不平衡与刚性不平衡有很大的不同。由于挠性转子的变形即转子的动挠度曲线与转速有密切关系,所以挠性不平衡量的大小、相位都随转速的变化而变化。如果设想将转子在变形如图 1-9, d 时按刚性平衡的办法加校正量  $U'_I$  和  $U'_{II}$ , 虽然可以消除动反力  $F_1$  和  $F_2$ , 但转子在低速时呈刚性状态,在其他临界速度下,变形情况要发生变化,因而又产生了新的动反力。所以在一种速度下平衡了的挠性转子,在别的速度下又呈现不平衡了。

平衡面的选择也与刚性转子有很大区别。从理论上讲要完全消除由于原始不平衡量  $\mathbf{u}(x)$  所产生的变形,应当在无穷多个平面上加校正量。这在实际上是很难作到的,只能选择有限的

平衡平面平衡转子。所以对转子进行挠性平衡时,应解决以下几个问题:

- 1) 平衡一个转子需选用几个平衡平面? 这些平面应处于转子的什么位置?
- 2) 转子平衡时的速度应该是多少?
- 3) 校正平衡量的大小、相位如何确定?

为了解决这些问题就要研究转子的变形规律、振动规律,要解决振动的测量问题,要解决计算问题、数据处理问题等等。目前测量方法的进步及计算机的应用为解决挠性转子平衡问题创造了很有利的条件。但是仍然有许多理论问题及实际问题有待解决。

因挠性不平衡是由于转子弹性变形产生的,要了解它的规律可从了解挠性转子的变形规律开始。

### § 1-3 匀质挠性转子在横向自由振动时的挠度曲线

图 1-10, a 表示一等截面挠性轴, 两端简支。当轴不转动时, 如果在其上作用一分布载荷  $q(x)$ , 则轴的弯矩  $M(x)$ 、挠度  $y(x)$  和  $q(x)$  的关系为:

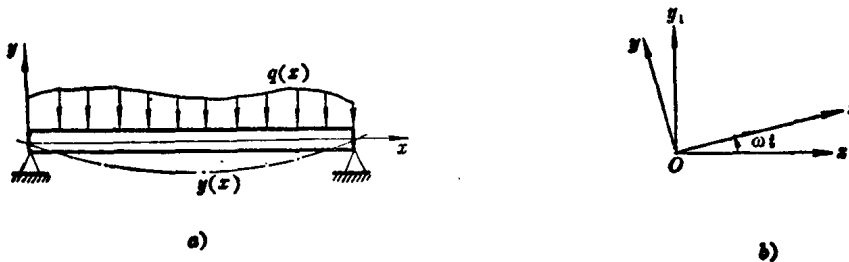


图 1-10

$$M(x) = EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$q(x) = \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2}$$

故

$$q(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

$J_x$  为位于  $x$  处的轴截面的惯性矩。本书中, 我们只讨论轴截面对称的情况。也就是说在轴截面内不同方向上  $J_x$  相等。对于等截面的轴  $J_x$  为常数, 用  $J$  表示。

这时

$$q(x) = EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (1-3-1)$$

如果该轴上没有作用外载荷, 而是在某一初始干扰下作横向自由振动。在这种情况下, 我们可以把轴看成是由无穷多个质点组成的弹性系统。每个质点的横向位移  $y$  既是坐标  $x$  的函数又是时间  $t$  的函数。每个质点都有加速度, 也就有惯性力  $q_m(x, t)$  作用于轴上。值得提出的是由于每个质点只有质量而不计其尺寸大小, 因此除了横向挠度以外不考虑转角等其他变形。此时惯性力的大小为:

$$q_u(x, t) = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

式中  $m$  为轴的单位长度的质量。

$q_u(x, t)$  对轴构成一个分布载荷, 所以由它所产生的挠度也应满足式(1-3-1)。即

$$q_u(x, t) = EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

所以

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1-3-2)$$

式(1-3-2)为匀质挠性轴横向无阻尼自由振动的微分方程。根据振动理论可知:  $n$  个自由度的振动系统有  $n$  个主振型和  $n$  个相应的主频率。挠性轴相当于一个具有无穷多个自由度的系统, 它有无穷多个主振型和主频率。当轴以某一主振动方式振动时, 运动为一简谐运动。所以可以设:

$$y_n(x, t) = Y_n(x) \sin(\omega_n t + \alpha_n) \quad (1-3-3)$$

将式(1-3-3)代入式(1-3-2)可得:

$$EJ \frac{d^4 Y_n}{dx^4} - m \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (1-3-4)$$

若设

$$k^4 = \frac{m \omega_n^2}{EJ} \quad (1-3-5)$$

则

$$\frac{d^4 Y_n}{dx^4} - k^4 Y_n = 0 \quad (1-3-6)$$

式(1-3-6)的通解可表示为:

$$Y_n(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} + C \cos kx + D \sin kx \quad (1-3-7)$$

$A, B, C, D$  为四个常数, 由支承的边界条件决定。对于两端简支的情况, 如果不计支承的变形, 边界条件为:

$$\begin{cases} x=0 & Y_{n0}=0 & \left[ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right]_0 = 0 \\ x=l & Y_{nl}=0 & \left[ \frac{d^2 Y_n}{dx^2} \right]_l = 0 \end{cases}$$

将此条件代入式(1-3-7)及它的二阶导数式可得:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-C=0 \\ Ae^{kl} + Be^{-kl} + C \cos kl + D \sin kl = 0 \\ Ae^{kl} + Be^{-kl} - C \cos kl - D \sin kl = 0 \end{cases}$$

解此方程组得:

$$A=B=C=0$$

$$D \sin kl = 0$$

若  $D=0$ , 表示轴无振动, 此解无意义。故取

$$\sin kl = 0$$

$$kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi \quad n \text{ 为正整数}$$

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, \dots$$

将  $k$  值代入式(1-3-5)可得:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (1-3-8)$$

$\omega_n$  就是系统振动的  $n$  阶主频率, 即系统的  $n$  阶固有频率。从式(1-3-8)可知挠性轴有无穷多个固有频率。当  $n=1$  时, 为一阶固有频率,  $n=2$  时为二阶固有频率, 依次类推到无穷阶。

将  $A, B, C$  及  $k$  值代入式(1-3-7)可以得到轴的主振型:

$$Y_n(x) = D \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (1-3-9)$$

式中  $\sin \frac{n\pi}{l} x$  为匀质挠性轴的振型函数。不同结构及支承情况的轴振型函数不同。以下我们用

$\phi_n$  来表示振型函数。当  $n=1$  时为一阶振型函数,  $n=n$  时为  $n$  阶振型函数。

图 1-11 为  $n=1, 2, 3$  时匀质挠性轴的振型函数曲线。在振型曲线上, 有变形为 0 的点出现。这种点叫节点, 而且节点的数目为  $n-1$ 。下面将会看到振型函数的形状、节点的位置对于挠性平衡是很重要的。

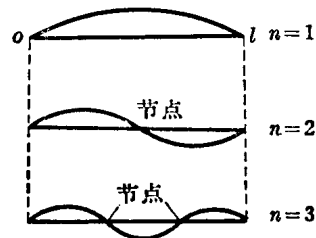


图 1-11

当轴以某一阶主振型振动时, 振动方程式为:

$$y_n(x, t) = D_n \phi_n \sin(\omega_n t + \alpha_n)$$

$D_n$  由振动的起始条件, 也就是当  $t=0$  时, 各点的  $y$  和  $\dot{y}$  的值决定。只有在特殊的起始条件下才能单独激起一种主振动方式, 轴的挠度曲线与该阶振型函数相符合。一般情况下轴的振动为无穷多个主振动方式的组合:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \phi_n \sin(\omega_n t + \alpha_n) \quad (1-3-10)$$

以上讨论了挠性轴不转动只有横向振动的情况。下面将讨论轴转动时的情况。

图 1-10,  $a$  也可以代表一个以角速度  $\omega$  转动的轴。取固定坐标系  $Oxy_1z_1$  和固结于轴上与轴一起以角速度  $\omega$  转动的动坐标系  $Oxyz$ , 两者的轴  $x$  重合(图 1-10,  $b$ )。设在稳定运动时, 轴在动坐标系中的变形为  $s(x)$ , 称为轴中心线的挠度曲线, 它以转速  $\omega$  随动坐标系转动。产生变形  $s(x)$  的力是由于挠曲引起的惯性力, 它在动坐标系中为一分布力  $m\omega^2 s(x)$ 。把  $s(x)$  投影到  $Oxy$  和  $Oxz$  两平面上得  $y(x), z(x)$ 。为简单起见, 只写出  $Oxy$  平面内的方程式。 $y$  方向的分布惯性力为  $q_y(x) = m\omega^2 Y(x)$ 。此力和因  $Y(x)$  产生的弹性恢复力平衡。故

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) &= m\omega^2 Y \\ EJ \frac{d^4 Y}{dx^4} - m\omega^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (1-3-11)$$



比较式(1-3-11)和(1-3-4)可以看出二者的区别仅在于式(1-3-4)中的 $\omega_n$ 是轴的第 $n$ 阶固有频率,式(1-3-11)中 $\omega$ 为轴的角速度。当支承条件相同时,两个方程式的解具有相同的形式。也就是说对于两端简支的匀质轴,当轴的速度为:

$$\omega = \omega_{cn} = \omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

时,其挠度曲线为:

$$Y_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$\omega_{cn}$ 为轴的临界速度。在不计转动惯量的影响时,它和该轴横向振动的固有频率相同。和轴的固有频率一样,转轴的临界速度也有无穷多阶。当轴以某一阶临界速度转动时,受干扰后其挠度曲线就是该阶振型曲线,其图形与图1-11相同。

轴的临界速度和振型函数是研究转轴变形的基础,也是研究挠性转子平衡方法的基础。它们反映了系统的振动特性,与轴的形状、尺寸以及支承特性有密切关系。对于细长的轴,由于长度大, $J$ 小,所以 $\omega_{cn}$ 低,因而比较容易成为挠性轴。

以上讨论了匀质挠性轴的振型函数和临界速度。在其他结构复杂的轴和支承情况下, $\phi_n$ 和 $\omega_{cn}$ 的计算也比较复杂。而且往往得不到函数形式的解,只能得到数值解。

#### § 1-4 非匀质挠性转子的临界速度及振型函数

机械中采用的转子大多沿轴长方向是非均匀的,为非匀质轴。对于这种转子其挠度曲线的微分方程为:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - m(x) \omega^2 y = 0 \quad (1-4-1)$$

由于 $J(x)$ 和 $m(x)$ 均为 $x$ 的连续或不连续函数,所以要求出 $y(x)$ 的一般解是困难的。因此在工程上采用把轴分割成有限个质点,用数值计算的办法求出转子的固有频率和振型函数。目前比较普遍采用的是普劳尔(Prohl)法。此法是先计算出轴横向振动的固有频率。对于转速不太高、轴的变形不太大的转子,可以忽略转动惯量的影响,此时轴的临界速度与横向振动的固有频率近似相等。如果要考虑转动惯量的影响,可以在这种方法的基础上,计入惯性力矩。惯性力矩的计算问题将在下一节进行讨论。

下面介绍普劳尔法的计算过程。

##### 一、转子的简化模型——当量轴

转子简化的基本方法,是用一个具有有限个集中质量的系统,代替原来的连续系统,如图1-12, a所示。由于转子的固有频率及振型函数,与系统的质量分布和刚度有密切联系,所以简化后的模型的质量与刚度分布情况,应尽量接近原来的转子。经过简化以后,转子就成为有 $n$ 个集中质量的系统,我们称之为当量轴。在当量轴内,第 $i$ 个质点的质量为 $m_i$ ,质点之间用等刚度而无质量的弹性段相连接。第 $i$ 段的柔度系数用 $\beta_i$ 表示。转子的支承用刚度系数为 $K_j$ 的弹簧表示( $j$ 为支承的序数)。