

高等学校函授基础教材

线性代数

(适用本科)

同济大学函授数学教研室 编著

Xian Xing Dai Shu Xian Xing Dai Shu

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

同济大学出版社

责任编辑 许纪森
封面设计 李志云

线 性 代 数

同济大学函授数学教研室 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷八厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:7.5 字数:210千字

1995年2月第1版 2001年11月第7次印刷

印数:28 001—34 000 定价:10.00元

ISBN 7-5608-1425-5/O·126

前 言

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“成人教育本科‘线性代数’教学基本要求”，在我校原有的函授《线性代数》教材及总结多年来的函授教学经验基础上编写而成的。全书共分五章，主要内容有行列式、矩阵、向量组的线性相关性与向量组的秩、线性方程组、矩阵的特征值和二次型等。

根据函授教学以“自学为主，面授为辅”的特点，我们在编写此书时力求做到：概念清楚，论述正确；循序渐进，由浅入深；例题较多，台阶较小；重点突出，难点分散。

为使教材便于学生自学，我们在编写教材时，采取了以下一些措施：

(1) 取材“少而精”。对于超出教学基本要求的内容一般都不编入，例如“线性空间与线性变换”等。对于较难证明的定理与结论，或不给出证明，或证明部分用“ \triangle ”表示，可不作为必读的内容。

(2) 在内容安排上，尽量保持章节间的独立性。例如将矩阵的秩的概念放入第二章，既使第二章矩阵的内容更完整，又使第二、三章的内容具有相对的独立性，使难点分散。

(3) 在每章的末尾都编写了“学习指导”。一方面指出学习该章的基本要求及重点，另一方面对于某些概念、重点或难点，进行适当的解释和说明，以弥补函授生在学习过程中缺少教师指导的不足。

(4) 贯彻“学练结合，适当反复”的教学原则。在每章之末尾配有习题，以供学生在学习的基础上，系统而又全面地消化巩固所学的知识；为便于复习和发展的需要，在每章的末尾还选配了适量的复习思考题。这些习题在书后均附有解答，可供参考。此外，为了定期检查学生的学习效果，书中还精心选编了阶段性测验作业题。

本书由徐鑑青、周忆行执笔编写,郭景德老师也参与了编写工作,同济大学应用数学系骆承钦教授全面审阅了本书内容,提出了许多宝贵意见,对于本书的修改定稿起到了重要的作用,在编写过程中,我们还广泛地参考了兄弟院校的同类教材及有关资料.在此,我们一并表示衷心的感谢.

本书的编辑出版,还得到同济大学函授学院、应用数学系及同济大学出版社有关同志的关心和支持,也得到本教研室许多老师的热情帮助和支持.对此,我们深表感谢.

本书可以作为工科专业函授生的教材,也可作为工科类成人教育的电大、职大、夜大学生的教材,对于全日制工科各专业的大学生以及广大自学者、工程技术人员也是一本合适的参考书.

由于我们的水平所限,书中难免有不足或错误之处,诚望广大读者批评指正.

编 者

1993年9月于同济大学



内容提要

本书按“成人教育本科‘线性代数’教学基本要求”，在总结多年函授教学的基础上编写而成。全书分五章，即行列式、矩阵、向量组的线性相关性与向量组的秩、线性方程组、矩阵的特征值和二次型。各章末附有习题、学习指导及复习思考题。本书可作工科专业函授生教材，也可作为电大、职大、夜大有关专业的教材。



责任编辑：许纪森

封面设计：李志云

目 录

第一章 行列式	1
§ 1.1 二阶与三阶行列式	1
一、二元线性方程组与二阶行列式	1
二、三阶行列式	3
§ 1.2 n 阶行列式的概念	6
§ 1.3 n 阶行列式的性质	9
§ 1.4 克莱姆法则	21
习题一	26
学习指导	28
复习思考题一	29
第二章 矩阵	31
§ 2.1 线性变换与矩阵的概念	31
§ 2.2 矩阵的运算	35
一、矩阵的加法	35
二、数与矩阵的乘法	36
三、矩阵与矩阵的乘法	37
四、矩阵的转置	48
五、方阵的行列式	52
§ 2.3 逆阵	54
§ 2.4 分块矩阵	63
§ 2.5 矩阵的秩	71
§ 2.6 矩阵的初等变换	73
§ 2.7 初等矩阵	81
习题二	88
学习指导	92
复习思考题二	96

测验作业题一	98
第三章 向量组的线性相关性与向量组的秩	100
§ 3.1 n 维向量及其线性运算	100
一、 n 维向量	100
二、向量的线性运算	101
§ 3.2 向量组的线性相关性	106
一、向量组线性相关与线性无关的概念	106
二、向量组线性相关性的判别定理	111
§ 3.3 向量组的秩 等价向量组	118
一、向量组的秩	118
二、等价向量组	120
§ 3.4 向量空间	125
习题三	128
学习指导	130
复习思考题三	133
第四章 线性方程组	135
§ 4.1 线性方程组的相容性	135
§ 4.2 线性方程组的解	139
一、线性方程组的解的讨论	139
二、用矩阵的初等行变换求解线性方程组	144
§ 4.3 线性方程组的解的结构	150
一、齐次线性方程组的解的结构	150
二、非齐次线性方程组的解的结构	157
习题四	161
学习指导	163
复习思考题四	169
测验作业题二	170
第五章 矩阵的特征值和二次型	172
§ 5.1 正交向量组和正交矩阵	172

一、向量的内积	172
二、正交向量组	174
三、正交矩阵	177
§ 5.2 方阵的特征值和特征向量	179
§ 5.3 相似矩阵	185
一、矩阵相似的概念	185
二、矩阵相似的性质	186
三、矩阵可以对角化的条件	186
§ 5.4 实对称阵的对角化	192
一、实对称阵的特征值和特征向量	193
二、用正交阵将实对称阵对角化	194
§ 5.5 二次型及其标准形	199
一、二次型及其矩阵表示	199
二、二次型的标准形	202
§ 5.6 正定二次型	206
习题五	208
学习指导	210
复习思考题五	212
测验作业题三	213
习题及复习思考题答案	214

第一章 行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和它的计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§ 1.1 二阶与三阶行列式

为了更好地理解 n 阶行列式的概念和性质, 我们先介绍二阶与三阶行列式的一些知识.

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ 是变量 $x_j (j=1, 2)$ 的系数, $b_i (i=1, 2)$ 是常数项.

用消元法消去 x_2 . 为此, 在方程组(1)的第一个方程与第二个方程两边分别乘以 a_{22} 与 a_{12} , 然后两式相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

同样地, 若消去 x_1 , 则有

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 求得方程组(1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

为便于记忆, 现在来分析一下(2)式的结构, 找出它的规律. 从

(2)式我们看到, x_1, x_2 的分子分母都是两个数的乘积之差, 且分母都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 它是由方程组(1)的系数所确定的. 如果将方程组(1)的系数按原来的位置排成二行二列(横的称为行, 竖的称为列)的方表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

那么 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 刚好是表中主对角线(左上角至右下角的对角线)上两个数的乘积与副对角线(右上角至左下角的对角线)上两个数的乘积之差. 为便于记忆, 我们规定: 数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由上面方表所确定的二阶行列式, 并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (3)$$

其中 a_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2$) 称为这个行列式的第 i 行第 j 列元素.

利用二阶行列式的概念, (2) 式中 x_1, x_2 的分子也可写成二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

于是(2)式可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (4)$$

其中 $D \neq 0$.

(4) 式是容易记忆的: x_1, x_2 的分母 D 是由方程组(1)的系数

所构成的二阶行列式(简称系数行列式), x_1 的分子 D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0,$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 13 = 20,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 22 = 30,$$

所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{10} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{30}{10} = 3.$

二、三阶行列式

1. 三阶行列式的定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从定义知,三阶行列式共有六项,每一项均为三个元素的乘积,其中三项的前面为正号,另外三项的前面为负号.为便于记忆,作图如下(图 1-1):图中每条实线(共三条)所连结的三个数的乘积前面加正号,每条虚线(共三条)所连结的三个数的乘积前面加

负号. 这种方法叫对角线法.

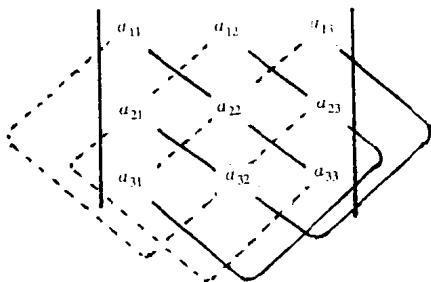


图 1-1

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 5 \times 9 + (-2) \times (-6) \times 7 + 3 \times (-4) \times (-8) \\ &\quad - 1 \times (-6) \times (-8) - (-2) \times (-4) \times 9 - 3 \times 5 \times 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 = 0. \end{aligned}$$

2. 三阶行列式与二阶行列式的关系

由三阶行列式与二阶行列式的定义可得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (5) \end{aligned}$$

从上式我们看到, 三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和. 为了进一步了解这些二阶行列式与原来的三阶行列式的关系, 我们引入余子式与代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中,把元素 a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) 所在的第 i 行元素与第 j 列元素删去,剩下的元素所构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij} . 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij} , 即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如在三阶行列式 D 中,元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是 D 中划去第一行和第二列元素后所成的二阶行列式,即

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式,(5)式可写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

这表明,三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和.

上面的结果还可以进一步推广,即有下面的定理.

定理 三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6)$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= \sum_{i=1}^3 a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7)$$

证 只证(7)式中 $j = 2$ 的情形,其他情形可类似证明.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} \\ &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \end{aligned}$$

(6)式称为行列式按第 i 行展开的展开式,(7)式称为行列式按第 j 列展开的展开式.定理表明,三阶行列式可以按任意一行(或任一列)展开,此定理叫行列式的展开定理.

如果我们定义一阶行列式为 $|a_{11}| = a_{11}$,那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用,但由于二阶行列式的计算比较简单,故一般不用展开定理.

例3 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零,故按第二列展开较简便.

$$D = 4 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-5) = -20.$$

§ 1.2 n 阶行列式的概念

利用三阶行列式与二阶行列式的关系,我们用归纳法给出 n 阶行列式的定义.

定义 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

定义 n 阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}, & \text{当 } n = 1; \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, & \text{当 } n > 1. \end{cases}$$

其中 A_{1j} 为第一行元素 a_{1j} ($j = 1, 2, \dots, n$) 的代数余子式^①.

与三阶行列式一样, n 阶行列式也有下面的展开定理.

定理 n 阶行列式等于它的任一行(或一列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

证明从略.

例 1 计算四阶行列式

① n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式的定义与三阶行列式中所介绍的相同, 不再重复.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列的零元素较多,故按第二列展开较简便.

$$\begin{aligned} D &= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 37 + 46 = 83. \end{aligned}$$

为了书写简便,在计算某元素的代数余子式时,可以不写 $(-1)^{i+j}$,直接根据下图所示的符号规律确定其符号,其中左上角为正号,各行各列的符号正负相间.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

例2 计算 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中空白处的元素均为零.

解 由于 D_1 的第一列的元素除 a_{11} 外均为零,故可按第一列展开,得

$$D_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$