56位全国著名师大附中●外国语学校特级教师联袂推出

读题做题

与

发散思维·创新能力训练

高二数学

总主编：何 舟

本册主编：胡务善(特级教师)

全国著名师大附中、外国语学校特级教师

读题 做题

发散思维·创新能力训练

高二数学

总 主 编：何 舟

本册主编：胡务善（特级教师）

撰 稿：胡务善 周歧林 李成海

罗来谦 付群跃 陈金辉

品牌教辅全新理念

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号

封面设计：周建明
责任编辑：王世斌　李建军

全国著名师大附中·外国语学校特级教师
读题、做题
与发散思维·创新能力训练
高二数学
总主编　何舟
本册主编　胡务善（特级教师）

吉林教育出版社　出版发行

新华书店经销　六安新华印务有限公司印刷

开本：880×1230 毫米　1/32　印张：14
印数：1～30000 册　字数：420 千字
版次：2001 年 7 月吉林第 1 版　2001 年 7 月安徽第 1 次印刷

ISBN 7-5383-2191-8/G·1941
定价：16.80 元

读题、做题

与发散思维·创新能力训练

丛书编委会

我的数学教学之见与本书实验

胡务善

数学是研究空间形式和数量关系的科学，是人们参加社会生活、从事生产劳动和学习、研究现代科学技术的基础，在培养和提高思维能力方面发挥着特有的作用，其内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分。在数字化的信息社会里，数学素养已是每个公民必不可少的重要文化素养。掌握必要的数学基础知识和基本技能是数学素养的基础，培养思维能力、运算能力、空间想像能力、解决实际问题的能力及创新意识是数学素养的核心，学会学习、自主发展是学好数学、提高素养的根本。

数学是逻辑性很强的学科，数学教学历来重视逻辑方法的教学。不过，仅让学生知道知识间的逻辑关系并会用逻辑方法解答一些数学问题是不够的，应该让学生领会数学对象的本质，把握知识的来龙去脉，返璞归真地注重过程，注重学生发散思维、归纳思维和直觉思维的训练，注重学生情感、个性和创造力的发展。数学教学无论采取何种模式，都是应该以学生的自我发展为本，创设生动活泼、主动发展的情境，提供充分发展的时间和空间，实行开放性的教学。教师应该是启发学生主动学习、积极探索、实现自我的指导者和组织者。本书旨在通过学生自我“读题”和“解题”，借助于适当的“精说”“点悟”，领悟数学问题的实质，理解数学的思想方法，培养和提高独立学习的能力。

问题是数学的灵魂，学数学离不开解题，著名数学家王梓坤教授在《学习数学的管见》一文中说：“学习的三要素是理解、记忆和练习”，“对于数学，练习尤其重要。通过练习不仅可以增加知识，更重要的是，可以培养我们解决问题的能力”。《新课程数学大纲》也指出，练习是数学教学的有机组成部分，是学生学好数学的必要条件。本书以解题为主线，选题注意到题目的典型性和多样性，体现由单一到综合、循序渐进、由浅入深的原则，注重数学解题的思想方法，帮助学生进行独立思考、自我探索，提高数学素养。

主编简介

胡务善 1942年出生，中学数学特级教师。江西上饶市教育学会数学专业委员会会长，省著名重点中学玉山一中教研处主任；从教35年，长期担任高中数学教学工作，积有丰富的数学教研经验，教学生动活泼，擅长启迪学生思维，指导学生运用“读、疑、思、检”的学习方法，取得了显著成绩，培养出了一大批优秀的学生；多次主持教师业务的培训，发表过多篇研究论文。

目　录

发散创新

第四章　直线、平面、简单几何体

第五章　排列、组合和概率

第一章

不 等 式

学习目标

不等式与方程、函数有密切的联系，在解决各类实际问题时有广泛的应用，也是进一步学习数学知识的基础.

本章的学习目标是：

1. 正确理解不等式的性质，明确不等式的基本性质是解决不等式的理论依据，养成“推理证明”的习惯，克服“想当然”的偏见，提高逻辑思维能力.

2. 本章的重点是掌握简单不等式的解法和证法，理解“解”与“证”的思路，领会在解不等式问题中经常采用的“转化”思想方法.

注意点

1. 解不等式过程中实行的变形必须是等价的同解变形，所用条件是充要的. 用综合法进行“顺推”证明不等式，要符合可传递性，用分析法“逆求”证明不等式，条件应当是充分的.

2. 要注意含字母的运算和讨论，学会用数形结合的方法求解不等式问题.

第一节　不等式的性质

自读典型题

读1-1　设 $c<-1<b<0<a<1$，下列各式中：① $bc+c$；② $ab-b$；③ abc；④ $bc+b+c+1$，值最小的是哪一个？说明理由.

【策略点悟】 先将各式因式分解，然后根据不等式性质判定符号及大小.

【正确解答】 $\because \quad -1<b, c<0,$

$\therefore \quad bc+c=(b+1)c<0;$

$\because \quad a<1, b<0,$

$\therefore \quad ab-b=(a-1)b>0;$

$\because \quad a>0, b<0, c<0,$

$\therefore \quad abc>0;$

$\because \quad c<-1<b,$

$\therefore \quad bc+b+c+1=(b+1)(c+1)<0;$

$\therefore$ 最小值只能是 $bc+c$ 或 $bc+b+c+1$.

$\because \quad b+1>0,$

$\therefore \quad bc+b+c+1=(bc+c)+(b+1)>bc+c.$

$\therefore$ 最小值是 $bc+c$.

【误点剖析】 未仔细分析四个式子的特点，盲目用比较法；或是只用一、二个特殊值代入验证，理由不充分.

【精要题说】本题考查不等式基本性质的应用及分类讨论能力.

先进行因式分解，再利用不等式性质判定符号是解不等式问题常采用的手段.

试解变式题

解1-2　如果 $a<b, c<d$，且 $(c-a)(c-b)>0, (d-a)(d-b)<0$，则(　　).

A. $a<c<d<b$　　B. $c<a<b<d$

C. $a<c<b<d$　　D. $c<a<d<b$

➡**特别提醒**　已知条件中的 c, d 可分别看做不等式 $(x-a)(x-b)>0$ 和 $(x-a)(x-b)<0$ 的两个解. 用一元二次不等式的解确定 c, d 与 a, b 的大小.

解1-3　如果 $1<a<2, -1<b<3$，则(　　).

A. $-1<ab<b$　　B. $-1<\frac{1}{b}<\frac{1}{3}$

C. $-2<a-b<3$　　D. $-2<\frac{a}{b}<\frac{1}{3}(b\neq0)$

解 1－4　设 $x,y\in\mathbf{R},0<xy<1,0<x+y<1+xy$,则 x,y 满足(　　).

A. $x>1,y>1$　　B. $0<x<1,0<y<1$

C. $0<x<1,y<1$　　D. $x>1,0<y<1$

解 1－5　已知 $a,b\in\mathbf{R},M=a^2+b^2+1,N=a+b+ab$.试比较 M、N 的大小.

自读典型题

读 2－1　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且方程 $x^2+ax+2b=0$ 和 $x^2+2bx+a=0$ 都有实根.求 $a+b$ 的最小值.

【策略点悟】　二次方程有实根,则判别式 $\Delta\geqslant0$,可列出关于 a,b 的两个不等式,然后根据不等式的传递性求出答案.

【正确解答】　依题意,有

$$\begin{cases}\Delta_1=a^2-8b\geqslant0\\\Delta_2=4b^2-4a\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\geqslant8b\\b^2\geqslant a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\geqslant8b\\b^4\geqslant a^2.\end{cases}$$

根据不等式传递性,得

$$b^4\geqslant8b.$$

$\because$　$b>0$,

$\therefore$　$b^3\geqslant8,b\geqslant2.$

$\therefore$　$a^2\geqslant8b\geqslant16.$

$\therefore$　$a\geqslant4.$

$\therefore$　$a+b\geqslant6,$

即　$a+b$ 最小值为 6.

【误点剖析】　主要误点是将两个不等式等同于方程,随意进行相加减或代入消元,推出的不等式的不等号方向无依据.

【精要题说】本题考查一元二次方程的根的判别式概念、不等式的性质以及合理的逻辑推理能力.

利用不等式传递性.

试解变式题

解 2－2　已知 $p>0,-1<q<0$,则 p,pq,pq^2 的大小关系是(　　).

A. $p>pq^2>pq$　　B. $pq>pq^2>p$

C. $pq^2>p>pq$　　D. $pq^2>pq>p$

解 2－3　设 $x_1>2,x_2>2$.求证 $x_1+x_2<x_1x_2$.

➡特别提醒　作差并化为 $(x_1-1)(x_2-1)>1$,或作商证明.

解 2－4　已知 $1<x<y$,设 $a=(\log_yx)^2,b=\log_yx^2,c=\log_y(\log_yx)$,则有(　　).

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<b<a$　　　　D. $c<a<b$

☆解 2－5 已知 $a\geqslant 1, b\geqslant 1, c\geqslant 1$. 试比较 $ab+bc+ca$ 与 $3abc$ 的大小.

自读典型题

☆读 3－1 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$. 求 $f(3)$ 的取值范围.

【策略点悟】 先将 $f(3)$ 表示成关于 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的表达式，即 $f(3)=mf(1)+nf(2)$，然后根据 $f(1)$、$f(2)$ 的取值范围求 $f(3)$ 的范围；或将系数 a,c 表示成关于 $f(1)$、$f(2)$ 的解析式后求解.

【正确解答】 **解法一：**

$\because$ $f(1)=a-c, f(2)=4a-c, f(3)=9a-c$,

设 $f(3)=mf(1)+nf(2)$,

即
$$9a-c=m(a-c)+n(4a-c)=(m+4n)a-(m+n)c.$$

比较两边系数，得
$$\begin{cases} m+4n=9, \\ m+n=1. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m=-\dfrac{5}{3}, \\ n=\dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2).$$

$$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1, -1\leqslant f(2)\leqslant 5,$$

$$\therefore \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}.$$

$$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant 20.$$

解法二： 由 $\begin{cases} f(1)=a-c, \\ f(2)=4a-c. \end{cases}$

解得
$$\begin{cases} a=\dfrac{f(2)-f(1)}{3}, \\ c=\dfrac{f(2)-4f(1)}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore f(3)=9a-c=3[f(2)-f(1)]-\frac{f(2)-4f(1)}{3}$$

【精要题说】 本题考查不等式变形过程中条件的等价性以及逻辑思维能力. 用已知的 $f(1)$、$f(2)$ 表示未知的 $f(3)$ 是解题的出发点. 待定系数法是重要的常用的方法.

利用方程思想求出 a,c.

$$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1).$$

以下同解法一.

【误点剖析】 **错解:**

$\because$ $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,且 $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,

$\therefore$ $\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1, & ①\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5. & ②\end{cases}$

由①,得

$$1\leqslant -a+c\leqslant 4. \qquad ③$$

②+③,得

$$0\leqslant 3a\leqslant 9,$$

$\therefore$ $0\leqslant a\leqslant 3.$

又由③×4+②,得

$$3\leqslant 3c\leqslant 21,$$

$\therefore$ $1\leqslant c\leqslant 7.$

$\because$ $f(3)=9a-c,$

而 $0\leqslant 9a\leqslant 27,\ -7\leqslant -c\leqslant -1,$

$\therefore$ $-7\leqslant 9a-c\leqslant 26,$

即 $-7\leqslant f(3)\leqslant 26.$

错误原因:是用了同向不等式可相加但不等价这一不等式性质.即在性质$\begin{cases}a>b\\ c>d\end{cases}\Rightarrow a+c>b+d$中前后不是充要条件关系,两者不等价,因此由条件$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 3\\ 1\leqslant c\leqslant 7\end{cases}$求出的 $f(3)$ 值域不能取代由原条件求出的 $f(3)$ 值域.因此,在求解不等式问题时,前后变形要注意等价性要求.

此处用了不等价的变形,就改变了范围.

发散创新

试解变式题

解 3-2 已知 $-1\leqslant x^2-3x+y^2\leqslant 2$,且 $2\leqslant (y-1)^2+x\leqslant 3$.求 $2x^2+5y^2-3x-6y+3$ 的取值范围.

解 3-3 已知方程 $x^2-(2a-1)x+4a=0$ 的两个实根都大于 2.求实数 a 的取值范围.

解 3-4 若 $0<c<1<d$,则 $a<b$ 是 $a\log_c d>b\log_c d$ 的(   ).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解3-5 若二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点，$1\leqslant f(-2)\leqslant 2, 3\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(2)$ 的范围.

自读典型题

读1-1 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，设 $a\neq b, A=|f(a)-f(b)|$，则（ ）.

A. $A\leqslant|a-b|$　　B. $A\geqslant|a-b|$

C. $A<|a-b|$　　D. $A>|a-b|$

【精要题说】 本题考查灵活应用不等式性质进行放缩变形的能力.

【策略点悟】 利用不等式性质将 $\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|$ 恰当变形，并适当放缩化去根号向 $|a-b|$ 转化.

【正确解答】 $\because$

$$A=\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|=\left|\frac{(1+a^2)-(1+b^2)}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}\right|=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}=\frac{|a+b|\cdot|a-b|}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}.$$

将根式进行分子有理化是常用的变形手段之一.

$\because$ $a\neq b$,

$\therefore$ $|a-b|\neq 0$.

$\because$ $\sqrt{1+a^2}>|a|, \sqrt{1+b^2}>|b|$,

$\therefore$ $A<\dfrac{|a+b|\cdot|a-b|}{|a|+|b|}$.

又$\because$ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,

$\therefore$ $A<\dfrac{|a+b|\cdot|a-b|}{|a+b|}=|a-b|$.

$\therefore$ 选 C.

【误点剖析】 **错解:**

$\because$ $\sqrt{1+a^2}>|a|, \sqrt{1+b^2}>|b|$,

又$\because$ $a\neq b$,

$\therefore$ $A=\left|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}\right|<\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$.

$\therefore$ 选 C.

错误原因: 是同向不等式相减时不等号方向不能确定.

试解变式题

☆解 4-2 已知 $a\geqslant 1$. 比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 与 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

➡**特别提醒** **方法一:** 先变形为 $M=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$, $N=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$, 然后只须比较分母大小; **方法二:** 因为 $M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$, 只须比较 $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2$ 与 $(2\sqrt{a})^2$ 的大小.

☆解 4-3 已知 $p=\dfrac{1}{a^2+a+1}$, $q=a^2-a+1$. 比较 p 与 q 的大小关系.

☆解 4-4 已知 a、b 均为正数. 比较 $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

☆解 4-5 设 $A=a+d$, $B=b+c$, 且 $ad=bc$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$, 且 $a\neq c$, a 是 a,b,c,d 中最大的一个. 试比较 A、B 的大小.

冲刺提高题

☆☆冲 5 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c, $\angle A$、$\angle B$ 的角平分线分别为 t_a、t_b.

(1) 求证 $t_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, $t_b=\dfrac{2ca}{c+a}\cos\dfrac{B}{2}$;

(2) 若 $a>b$, 求证 $t_a<t_b$.

➡**特别提醒** 利用三角形面积法求 t_a、t_b.

☆☆冲 6 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, 且 $x+y+z=a$. 求证

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}a^2.$$

第二节　算术平均数与几何平均数

自读典型题

☆读 7－1　讨论题：已知 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=1$，求 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值.

解法一：

$\because$　$a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，利用均值不等式有

$$a+1\geqslant2\sqrt{a},b+1\geqslant2\sqrt{b},c+1\geqslant2\sqrt{c}.$$

三式相加，得

$$(a+b+c)+3\geqslant2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

$$\because\quad a+b+c=1,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant2.$$

即　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为 2.

解法二：

$$\because\quad a,b,c\in\mathbf{R}^{+},$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{ab}\leqslant a+b,2\sqrt{bc}\leqslant b+c,2\sqrt{ac}\leqslant a+c.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\\ &=(a+b+c)+(2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac})\\ &\leqslant3(a+b+c)=3.\end{aligned}$$

$$\because\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0,$$

$$\therefore\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3},$$

即　$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

请判断两种解法的正误，并说明理由.

【精要题说】本题考查平均值不等式的概念和应用能力.

通过两种解法的比较，加深对等号成立条件的认识.

【策略点悟】　检查使用均值不等式时，“等号”成立的条件是否存在.

【正确解答】　解法一是错的，因为 $a+1\geqslant2\sqrt{a},b+1\geqslant2\sqrt{b},c+1\geqslant2\sqrt{c}$，等号成立的条件与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant2$，等号成立的条件不同. 所以只能推得 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<2$，即说明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值小于 2；解法二是对的，因为不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}$ 中，“＝”成立