测量质量工程学

韩之俊　靳京民　编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

测量质量工程学/韩之俊,靳京民编著.-北京:中国计量出版社,1999.10
ISBN 7-5026-1259-9

Ⅰ.测… Ⅱ.①韩… ②靳… Ⅲ.精度-技术测量-测量方法 Ⅳ.TG806

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 70867 号

内 容 提 要

本书较系统地介绍了田口式“测量质量工程学”的基本概念、原理和方法、应用案例。全书共分八章:第一章为概论,主要说明传统计量学和田口式测量质量工程学的区别和联系;第二章至第五章,主要从测量设备使用者和管理者立场出发,介绍测量设备的校准方法,测量结果的评定以及测量系统(测量方法和测量设备等的总称)的比较和选择方法;第六章、第七章是针对测量方法和测量设备的研究、设计人员而写的,介绍了测量误差分析方法及测量方法和测量设备的优化设计方法;第八章是近几年来一些应用实例,以帮助读者更好地掌握和运用田口方法。

本书可供广大计量人员、工程技术人员和质量管理人员使用,也可作为相关专业的培训教材。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲2号
邮政编码 100013
北京迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
787 mm×1092 mm 16开本 印张 11.75 字数 276 千字
2000年1月第1版 2000年1月第1次印刷
*
印数 1—5000 定价:18.00 元

前　言

在科学研究、工农业生产、医疗卫生、国内外贸易乃至日常生活中,测量是一项必不可少的基础工作。所谓测量就是以确定量值为目的的一组操作,测量的质量有着举足轻重的影响。例如,在卫星的发射中,如果对卫星的重量或运载火箭燃料的重量测量不准,就可能会导致卫星因推力不足而发射失败。在工业生产中,当我们对工序条件或产品质量特性进行测量时,如果测量误差太大,就不能对产品的质量进行有效的监控,甚至会导致不合格品的产生。在医疗卫生中,当使用 γ 射线或激光治疗疾病时,如对剂量测量不准,剂量太少达不到治病的目的,延误治疗;剂量太大会对人体造成极大的伤害。在国内外贸易中,当一批产品进行交验时,如果对产品的质量特性测量不准,既有可能将合格品误判为不合格品使卖方受损,亦有可能将不合格品误判为合格品而使买方蒙受损失。如此等等,足以见测量的重要性。

既然测量的质量如此重要,计量人员总是期望测量误差小的测量设备。但殊不知,一味追求高准确度、昂贵测量设备的想法是不妥当的。寻找解决问题的途径就是要研究如何评价测量方法和测量设备的优劣,如何开发质高、价廉的测量方法和测量设备,在耗费人力、财力最少的前提下,如何选择和配备适宜的测量设备,怎样实施计量检测才能使产品的质量特性波动降至最小等等。

本世纪60年代日本著名质量工程学家田口玄一博士提出了 *SN* 比(信号功率与噪声功率之比)的概念和质量损失函数的概念,并且用来评价测量设备和测量方法,逐渐形成一门新的、颇具特色的“测量质量工程学”。在日本计量管理协会,由于通商产业省的大力支持,着力宣传推广田口式的“测量质量工程学”,极力鼓励和帮助工程技术人员在实际中加以应用。在取得社会和经济效益的同时,一批批成功的案例被汇编成专辑出版。还设置了以“不二越株式会社”命名的“田口计量管理不

二越奖”，以奖励运用田口方法在改进、开发测量设备和测量方法以及在计量管理方面卓有成效的工程技术人员。目前，在日本以田口博士为代表的田口式测量质量工程学的思想和技术方法占据着主导地位。

本书较系统地介绍了田口式“测量质量工程学”的基本概念、原理和方法、应用案例。全书共分八章：第一章为概论，主要说明传统计量学和田口式测量质量工程学的区别和联系；第二章至第五章，主要从测量设备使用者和管理者立场出发，介绍测量设备的校准方法，测量结果的评定以及测量系统（测量方法和测量设备等的总称）的比较和选择方法；第六章、第七章是针对测量方法和测量设备的研究、设计人员而写的，介绍了测量误差分析方法及测量方法和测量设备的优化设计方法；第八章是近几年来一些应用实例，以帮助读者更好地掌握和运用田口方法。

本书是在中国兵器工业总公司质量技术监督局各级领导的关怀和大力支持下编写的，编写本书的目的是向广大计量人员、工程技术人员和质量管理人员系统介绍田口式的测量质量工程学，并且推广应用这种新技术。在编写本书的过程中，编著者先后去航空工业 304 所、兵器工业 152 厂、202 所、204 所、205 所及 53 所调研、收集实例，受到了这些单位的热情接待和有关人员的密切配合和大力支持。本书初稿写于 1995 年 7 月，此后在国防科技工业和兵器工业系统举办了几期学习班，听取了有关专家和读者的修改意见。经过近 4 年多时间的酝酿和几经修改，今天终于和读者见面。在本书正式出版之际，谨向他们致以衷心的谢意。

对于本书可能出现的疏漏之处，恳请读者给予批评指正。

编委会

1999.8

第一章 概　论

本章主要讲述传统计量方法与田口式测量质量工程学中的基本概念，及其联系与区别。1.1～1.2节属于传统计量方法，1.3～1.5节属于测量质量工程学。

1.1 测量误差

1.1.1 定　义

所谓测量误差，就是测量结果 y 与被测量真值 m 之差，也即

$$e = y - m \tag{1.1}$$

需要说明的是，被测量的真值 m，是一个理想的概念，从测量的角度来说，真值不可能确切获知，通常把高一等级计量标准所复现的量值作为约定真值（或称为被测量的实际值）。

1.1.2 种　类

测量误差，按其出现的特点可以分为系统误差，随机误差和粗大误差。

(1) 系统误差

在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差，称之为系统误差。

系统误差又有恒定值系统误差和随条件变化的系统误差之分。恒定值系统误差指其符号和数值大小恒定，例如，用天平称重时，校准砝码误差引起的测量误差就是恒定值系统误差；随条件变化的系统误差虽然其值不是恒定的，但是其值以确定的、可预知的方式随某些测量条件而变化。例如：随温度周期变化引起的温度附加误差。

(2) 随机误差

测量结果与在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值之差，称之为随机误差。它引起对同一量的测量列中各次测量结果之间的差异，常用标准差表征。

(3) 粗大误差

明显超出规定条件下预期的误差，称之为粗大误差。它是统计的异常值，测量结果带有粗大误差时，应按照一定的规律剔除。

下面从统计角度解释上述三种类型的测量误差。

在对同一被测量的多次测量过程中，测量结果 y 表现为一个具有一定分布规律的随机变量（在大多数情况下，可以认为服从正态分布），记 y 的数学期望为 μ_y，标准差为 σ_y，则测量的系统误差为

$$\mu = E(e) = \mu_y - m \tag{1.2}$$

而测量的随机误差为 $y - \mu_y$，其标准差为

$$\sigma = \sqrt{V(e)} = \sigma_y \tag{1.3}$$

此时，我们可以将(1.1)式表示为

$$e = y - m = (\mu_y - m) + (y - \mu_y) \tag{1.1'}$$

即测量误差等于系统误差与随机误差之和。

此外，当 μ 为一个恒定常数时，系统误差为恒定系统误差，当 μ 按一定的方式变化时(例如，$\mu = \alpha + \beta t$)，则为随条件变化的系统误差。倘若第 i 次的测量结果 y_i 与其他 $n-1$ 的测量结果 $y_1, \cdots y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots y_n$ 不服从同一分布，则第 i 次的测量误差 $e_i = y_i - m$ 为粗大误差，y_i 为异常值应予剔除。

1.1.3 误差源

引起测量误差的原因很多，通常有：

(1) 器具误差

计量器具本身所具有的误差。

(2) 人员误差

测量人员主观因素和操作技术所引起的误差。

(3) 环境误差

由于实际环境条件与规定条件不一致所引起的误差。

(4) 方法误差

测量方法不完善所引起的误差。

(5) 调整误差

由于测量前未能将计量器具或被测对象调整到正确位置或状态所引起的误差。

(6) 观测误差

在测量过程中由于观测者主观判断所引起的误差。

(7) 读数误差

由于观测者对计量器具示值不准确读数所引起的误差。

1.1.4 合成公式

(1) 直接测量时的误差合成公式

在直接测量中，设 e 为总的测量误差，$e_1, e_2, \cdots, e_k$ 为 k 种误差源引起的误差，它们通常是相互独立的，可以认为误差合成公式为：

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_k \tag{1.4}$$

据统计知识有

$$E(e) = E(e_1) + E(e_2) + \cdots + E(e_k) \tag{1.5}$$

也即

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \tag{1.6}$$

同理有

$$V(e) = V(e_1) + V(e_2) + \cdots + V(e_k) \tag{1.7}$$

两边开平方得

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2} + \cdots + \sigma_k^{\ 2}} \tag{1.8}$$

(1.6)式和(1.8)式称之为直接测量时，系统误差和随机误差的合成公式。式中 μ_i 和 σ_i 是第 i 种误差源的系统误差和随机误差标准差。

(2) 间接测量时的误差合成公式

在实际测量中,有时被测量的值不能直接测量,只能通过间接测量获得。例如,圆的面积 $S=\pi R^2$,只有通过测量半径 R 来测量面积 S;又例如,长方体的体积 $V=a\cdot b\cdot c$,只有通过测量长 a、宽 b、高 c,来间接测量体积 V。

一般情况下,我们设被测量的真值为 m,与之有关的若干个可直接测量的量的真值为 m_1, $m_2,\cdots,m_k$,且关系式如下:

$$m=f(m_1,m_2,\cdots,m_k) \tag{1.9}$$

又设 m_i 的直接测量结果为 $X_i(i=1,2,\cdots,k)$,于是 m 的间接测量结果 y 为

$$y=f(X_1,X_2,\cdots,X_k) \tag{1.10}$$

将(1.10)式在点$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$处展开成线性式,则有

$$\begin{aligned} y-m=&\frac{\partial f}{\partial X_1}\Big|(m_1,\cdots,m_k)\cdot(X_1-m_1)+\frac{\partial f}{\partial X_2}\Big|_{(m_1,\cdots,m_k)}\cdot(X_2-m_2)\\ &+\cdots+\frac{\partial f}{\partial X_k}\Big|(m_1,\cdots,m_k)\cdot(X_k-m_k) \end{aligned} \tag{1.11}$$

若间接测量误差为

$$e=y-m \tag{1.12}$$

各直接测量的误差为

$$e_i=x_i-m_i \tag{1.13}$$

则式(1.11)为:

$$e=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|(m_1,\cdots,m_k)\cdot e_i=\sum_{i=1}^{k}c_ie_i \tag{1.14}$$

式(1.14)即间接测量时的误差合成公式,式中

$$c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|(m_1,\cdots,m_k) \tag{1.15}$$

c_i 称之为误差传播系数。

据统计知识,有

$$E(e)=\sum_{i=1}^{k}c_iE(e_i) \tag{1.16}$$

或记为

$$\mu=\sum_{i=1}^{k}c_i\mu_i \tag{1.17}$$

式(1.17)为间接测量时的系统误差合成公式。

$$V(e)=\sum_{i=1}^{k}c_i^2V(e_i)+2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}c_ic_j\operatorname{cov}(e_i,e_j) \tag{1.18}$$

或两边开平方得

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}c_i^2\sigma_i^2+2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}c_ic_j\sigma_{ij}} \tag{1.19}$$

此为间接测量时随机误差标准差的合成公式。式中

$$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(e_i,e_j) \tag{1.20}$$

为 e_i 与 e_j 的协方差。

特别，当各种直接测量误差相互独立时，则式(1.19)简化为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^{\,2} \sigma_i^{\,2}} \tag{1.21}$$

1.1.5 估计公式

设被测量的真值为 m，进行 n 次独立重复测量，所得测量结果为：$y_1, y_2, \cdots, y_n$，据统计知识，有

(1) 系统误差的估计

$$\hat{\mu} = \bar{y} - m \tag{1.22}$$

式中

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

(2) 随机误差标准差的估计

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{1.23}$$

从式(1.22)、式(1.23)可知，若被测量的真值 m 未知，则系统误差无法估计，但是随机误差标准差却可以估计。

此外，在间接测量时，可以首先分别计算各分量的 $\hat{\mu}_i$ 和 $\hat{\sigma}_i$，然后按照误差合成公式，计算 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$，即：

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{k} c_i \hat{\mu}_i \tag{1.24}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \hat{\sigma}_i^2} \tag{1.24'}$$

[例 1.1] 一个立方体，长、宽、高的(约定)真值依次为 $m_1 = 5\text{cm}$, $m_2 = 6\text{cm}$, $m_3 = 3\text{cm}$，今进行 4 次独立重复测量，长、宽、高的测量结果依次记为 x, y, z，并计算体积 $V = xyz$ 的值，数据如表 1.1，试求体积 V 的系统误差，μ_V 和随机误差标准差 σ_V 的估计值。

表 1.1 例 1.1 立方体测量数据表

i	x_i(cm)	y_i(cm)	z_i(cm)	$V_i = x_i \cdot y_i \cdot z_i$(cm^3)
1	5.01	5.98	2.99	89.58
2	5.02	5.99	2.97	89.31
3	4.96	6.05	3.01	90.32
4	4.97	6.10	3.02	91.56

解：①求 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 4.99(\text{cm})$$

$$\bar{y} = 6.03\ (\text{cm})$$

$$\bar{z} = 3.00(\text{cm})$$

②求 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$

$$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.03(\text{cm})$$

$$\hat{\sigma}_2=0.06(\text{cm})$$

$$\hat{\sigma}_3=0.02(\text{cm})$$

③求 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$

$$\hat{\mu}_1=\bar{x}-m_1=4.99-5.00=-0.01(\text{cm})$$

$$\hat{\mu}_2=\bar{y}-m_2=6.03-6.00=0.03(\text{cm})$$

$$\hat{\mu}_3=\bar{z}-m_3=3.00-3.00=0.00(\text{cm})$$

④求 c_1,c_2,c_3

$$c_1=\frac{\partial V}{\partial x}(m_1,m_2,m_3)=m_2\cdot m_3=6\times 3=18(\text{cm}^2)$$

$$c_2=\frac{\partial V}{\partial y}(m_1,m_2,m_3)=m_1\cdot m_3=5\times 3=15(\text{cm}^2)$$

$$c_3=\frac{\partial V}{\partial x}(m_1,m_2,m_3)=m_1\cdot m_2=5\times 6=30(\text{cm}^2)$$

⑤求 $\hat{\mu}_V$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_V&=c_1\hat{\mu}_1+c_2\hat{\mu}_2+c_3\hat{\mu}_3\\&=18\times(-0.01)+15\times(0.03)+30\times 0=0.27(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

⑥求 $\hat{\sigma}_V$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_V&=\sqrt{c_1^2\hat{\sigma}_1^2+c_2^2\hat{\sigma}_2^2+c_3^2\hat{\sigma}_3^2}\\&=\sqrt{18^2\times 0.03^2+15^2\times 0.06^2+30^2\times 0.02^2}=1.21(\text{cm}^3)\end{aligned}$$

必须提醒读者注意，在间接测量中不宜采用下述方法估算 $\hat{\mu}_V$ 和 $\hat{\sigma}_V$：

$$\hat{\mu}_V=\bar{V}-m_V=90.19-5\times 6\times 3=0.19(\text{cm}^3)$$

$$\hat{\sigma}_V=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(V_i-\bar{V})^2}=1.01(\text{cm}^3)$$

1.2 测量不确定度

1993 年国际上七个权威组织：国际计量局（BIPM）、国际电工委员会（IEC）、国际分析化学联盟（IFCC）、国际标准化组织（ISO）、国际纯化学和应用化学联盟（IUPAC）、国际纯物理和应用物理联盟（IUPAP）和国际法制计量组织（OIML）共同制订并由 ISO 出版了“测量不确定度表示导则”，该标准规定用测量不确定度来表征测量结果的质量，本节概要说明测量不确定度的定义、分类、来源以及评定方法。

1.2.1 定 义

测量不确定度是表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参数。

测量不确定度可以用测量结果的标准差表示，必要时也可以用标准差的倍数或被测量的置信区间的半宽度表示。

1.2.2 分 类

测量不确定度一般包含着若干个分量，按其数值评定方法可分为两类：

(1) A类

用统计方法评定的不确定度，可以用实验标准差(或称为样本标准差)来表征。

(2) B类

用非统计方法评定的不确定度，用根据经验或资料及假设的概率分布标准差的估算值来表征。

测量不确定度还可以按其使用所表示的方式来分类，此时可分为如下三类：

(1) 标准不确定度

用标准差表示的测量结果的不确定度。

(2) 合成不确定度

当测量结果由若干其他量得来时，以合成标准差表示的测量结果的不确定度。

(3) 扩展不确定度

规定测量结果的区间的量，可期望该区间包含了可合理赋予的被测量值分布的大部分。

事实上，扩展不确定度就是被测量的置信区间之半径，该区间以一定的置信水平包含被测量的真值。

1.2.3 来 源

测量不确定度的来源与测量误差的来源大致相同，主要是如下几个方面：

(1) 被测量的定义不完整

例如，定义被测量是一根标称值为1m长的钢棒的长度，如果要求测准到微米量级，则被测量的定义就不够完整。因为钢棒受温度和压力的影响比较明显，而这些条件没有在定义中说明，由于定义的不完整就使测量结果引入温度和压力的不确定度。完整的被测量的定义如：标称值为1m的钢棒在25.00℃和101325Pa时的长度，在此要求下测量就可以避免温度和压力引起的不确定度。

(2) 被测量的定义值的实现不理想

如在(1)中，对完整定义的被测量，由于测量时温度和压力达不到定义上的要求，使测量结果引入不确定度。

(3) 被测量的样本可能不完全代表定义的被测量

例如，被测量为某种介质材料在给定频率时的相对介电常数。由于测量方法和测量设备的限制，只能取这种材料的一部分做样块，然后对样块进行测量，如果测量时所用的样块在材料的成分或均匀性方面不能完全代表定义的被测量，则样块就引起测量不确定度。

(4) 对环境条件的影响认识不足或环境条件的不完善测量

同样以钢棒为例，不仅温度与压力对长度有影响，实际上湿度和钢棒的支撑方式对长度都有明显影响，由于认识不足，未采取措施，这又引起不确定度。此外，在按测量值定义测量钢棒长度时，测量温度和压力所用的温度计和压力表的不确定度也会使测量结果中引入不确定度。

(5) 人员对模拟式仪器的读数误差

(6) 测量仪器的分辨力或识别门限不够引起不确定度

(7) 测量标准包括标准装置，标准器具和标准物质的给定值的不确定度

(8) 在处理数据时所引用的常数及其他参数的不确定度

(9) 测量方法，测量系统和测量程序引起的不确定度

(10) 被测量的各种随机影响,使测量时复现值随机变化

由此可见,测量不确定度一般来源于随机性和模糊性,前者归因于条件不充分,后者归因于事物本身概念不明确。这就是测量不确定度一般由许多分量组成,其中一些分量具有统计性,另一些分量非统计性的原由。所有这些不确定度的来源影响测量结果的综合效应,使测量结果的可能值呈现某种分布规律(通常可认为服从正态分布),因此可以用分布的标准差来表征测量结果的不确定度。

1.2.4 评定方法

(1) 标准不确定度的评定

①标准不确定度的 A 类评定方法

设被测量的真值为 m,在同一条件下进行 n 次独立重复测量,测量值为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,据统计知识

样本平均值

$$\hat{\mu}_y = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.25}$$

样本标准差

$$\hat{\sigma}_y = S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{1.26}$$

当不存在系统误差时,即 $\mu_y = m$,此时 m 的估计为

$$\hat{m} = \bar{y} \tag{1.27}$$

或者说被测量的测量结果为 $\bar{y}$,而测量结果的标准不确定度为

$$\hat{\sigma}(\bar{y}) = \hat{\sigma}_y / \sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{1.28}$$

〔例 1.2〕 对一未知目标距离进行 10 次独立重复测量,测量值如下(单位 m):

101, 102, 99, 97, 100, 99, 98, 98, 102, 101.

假定测量无系统误差,求未知目标距离 m 的估计值和标准不确定度

解:(a) 先求 m 的估计值 $\hat{m}$.

$$\hat{m} = \bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 99.70(\mathrm{m})$$

(b) 再求 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$.

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1.77(\mathrm{m})$$

(c) 最后求测量结果 $\bar{y}$ 的标准不确定度。

$$\hat{\sigma}(\bar{y}) = \hat{\sigma}/\sqrt{n} = 1.77/\sqrt{10} = 0.56(\mathrm{m})$$

②标准不确定度的 B 类评定方法

当不能得到被测量的若干个独立重复测量时,标准不确定度可用被测量的可能变化的有关信息或资料来评定。

设根据以往的经验或有关资料和信息,被测量的可能值 y 不会超出范围 $(m-\delta, m+\delta)$,且置信水平(即包含概率)为 $1-\alpha$,即

$$P\{|y - m| < \delta\} = 1 - \alpha \tag{1.29}$$

若令

$$\delta = k\,\sigma_y \tag{1.30}$$

则据测量结果 y 的分布规律(正态分布或均匀分布)可以从表 1.2 中查出包含因子 k,此时测量不确定度为

$$\sigma_y = \delta / k \tag{1.31}$$

表 1.2　置信概率 $1-\alpha$ 与包含因子 k

$1-\alpha$	包含因子　k	
	正态分布	均匀分布
0.50	0.676	0.866
0.6827	1	1.182
0.90	1.645	1.559
0.95	1.960	1.645
0.9545	2	1.653
0.99	2.576	1.715
0.9973	3	1.727
1.00	-	$\sqrt{3}$

〔例 1.3〕 校准证书说明标称值为 10Ω 的标准电阻值在 23℃时为 10.000742Ω ± 129μΩ,且具有 99% 的置信水平,求该电阻的标准不确定度。

解:据题意　$\delta = 129\mu\Omega$,$1-\alpha = 99\%$,又电阻的测量值可认为服从正态分布,于是从表 1.2 可查得包含因子 $k = 2.576$,所以该电阻的标准不确定度为:

$$\sigma_k = 129/2.576 = 50(\mu\Omega)$$

〔例 1.4〕 手册给出了纯铜在 20℃时线热膨胀系数值 α_{20}(Cu)为 16.52×10^{-6}(℃$^{-1}$),并指出此值的误差不超过 0.40×10^{-6}(℃$^{-1}$),求线热膨胀系数 α_{20}的标准不确定度。

解:据题意 $\delta = 0.40\times10^{-6}$(℃$^{-1}$),又据经验知 α_{20}的值服从均匀分布,于是从表 1.2,查得包含因子 $k=\sqrt{3}$,所以 α_{20}的标准不确定度为

$$\sigma_{\alpha_{20}} = \frac{0.40\times10^{-6}}{\sqrt{3}} = 0.23\times10^{-6}(℃^{-1})$$

(2) 合成标准不确定度的评定

①如测量结果的标准不确定度包含若干个不确定度分量,且各分量相互独立时,此时有

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2} + \cdots + \sigma_k^{\ 2}} \tag{1.32}$$

式中 σ_i 为第 i 个分量的标准不确定度;σ 为合成标准不确定度。

②在间接测量时,若被测量的间接测量值 y 由其他 k 个直接测量值 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的函数关系确定,即

$$y = f(X_1, X_2, \cdots, X_k) \tag{1.33}$$

则 y 的合成标准不确定度为

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^{\ 2}\sigma_i^{\ 2} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\ \sum_{j=i+1}^{k} c_i c_j \sigma_{ij}} \tag{1.34}$$

特别，当各直接测量值 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 相互独立时，有

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^{\ 2} \sigma_i^{\ 2}} \tag{1.35}$$

式中

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \tag{1.36}$$

c_i 通常称为误差传播系统，这里称之为灵敏度。

〔例 1.5〕 有 10 个电阻器，每个电阻器的标称值为 $R_i = 1000\Omega$，用 1000Ω 的标准电阻器校准，比对的不确定度可以忽略。标准电阻器的不确定度由校准证书给出为 $\sigma(R_s) = 100\text{m}\Omega$。将这些电阻器串联起来，导线的电阻可忽略，串联后得到标称值为 $10\text{k}\Omega$ 的参考电阻 R_{ref}。求 R_{ref} 的合成标准不确定度。

解：$R_{ref} = f(R_1, \cdots, R_{10}) = \sum_{i=1}^{10} R_i$

又因为 10 个电阻器的校准是用同一个标准电阻器 R_s 校准的，所以 $r(R_i, R_j) = 1$（即它们完全相关），因此，有

$$R_{ref} = 10 R_i$$

据题意

$\sigma(R_s) = 100\text{m}\Omega$

$\sigma(R_i) = \sigma(R_s)$ （因比对不确定度可忽略）

$\sigma(R_{ref}) = 10\sigma(R_s) = 10 \times 100\text{m}\Omega = 1\Omega$

必须提醒读者注意，倘若按下列方法计算 $\sigma(R_{ref})$：

$$\sigma(R_{ref}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} \sigma^2(R_i)} = \sqrt{10\sigma^2(R_s)}$$
$$= \sqrt{10}\sigma(R_s) = \sqrt{10} \times 100 = 0.32(\Omega)$$

是不正确的，因为 $R_i(i = 1,2,\cdots,10)$ 不相互独立，而是两两完全正相关。

(3) 扩展不确定度的评定

设被测量的真值为 m，n 次独立重复测量值为：$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 由前面标准不确定度的讨论可知，当无系统测量误差时，m 的估计值为：

$$\hat{m} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.37}$$

$\bar{y}$ 的标准不确定度为

$$\hat{\sigma}(\bar{y}) = \hat{\sigma}/\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} \tag{1.38}$$

此外，据统计学区间估计的理论，m 的以 $1-\alpha$ 为置信水平的置信区间为：

$$(\bar{y} - k\hat{\sigma}/\sqrt{n}, \bar{y} + k\hat{\sigma}/\sqrt{n}) \tag{1.39}$$

我们称该区间的半径

$$\delta = k\hat{\sigma}/\sqrt{n} = k\sigma(\bar{y}) \tag{1.40}$$

为扩展不确定度。由式(1.40)可见，所谓扩展不确定度就是测量结果 $\bar{y}$ 的标准不确定度的 k 倍，系数 k 称之为包含因子，k 的确定如下：

$$k=\begin{cases}u_{\frac{\alpha}{2}},\text{正态分布临界限},n\text{ 充分大时}\\ t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),t\text{ 分布临界限},n\text{ 有限时。}\end{cases}\tag{1.41}$$

当看做正态分布时，$k=u_{\frac{\alpha}{2}}$的值可以从表 1.2 查出。

〔例 1.6〕(续例 1.2)　求目标距离测量结果的扩展不确定度，并给定置信水平 $1-\alpha=0.95$。

解：由例 1.2，目标距离 m 的测量结果为

$$\hat{m}=\bar{y}=99.70(\mathrm{m})$$

其标准不确定度为

$$\hat{\sigma}(\bar{y})=0.56(\mathrm{m})$$

又给定置信水平 $1-\alpha=0.95$，则扩展不确定度为

$$k\hat{\sigma}(\bar{y})=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\hat{\sigma}(\bar{y})$$

查 t 分布表得：

$$k=t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=2.262$$

由此得

$$k\hat{\sigma}(\bar{y})=2.262\times0.56=1.27$$

此时，我们有 95% 的把握断定，区间 $99.70\pm1.27=(98.43,100.97)$包含未知目标距离 m 的值。

如果近似看作正态分布，则从表 1.2 查得 $k=1.96$，此时 m 的 95% 置信区间为 $99.70\pm1.96\times0.56=99.70\pm1.10=(98.60,100.80)$。

1.3　测量误差损失函数

在传统的计量方法中，用随机测量误差之标准差或测量结果不确定度来表征测量质量的优劣。然而，在田口玄一创建的测量质量工程学中，用测量误差损失函数及测量特性的 SN 比来加以描述。本节将讲述测量误差损失函数。

1.3.1　定　义

设被测量的真值为 m，其测量结果为 y，称下述函数

$$L(y)=k(y-m)^2\tag{1.42}$$

为测量误差损失函数。其图形见图 1.1。

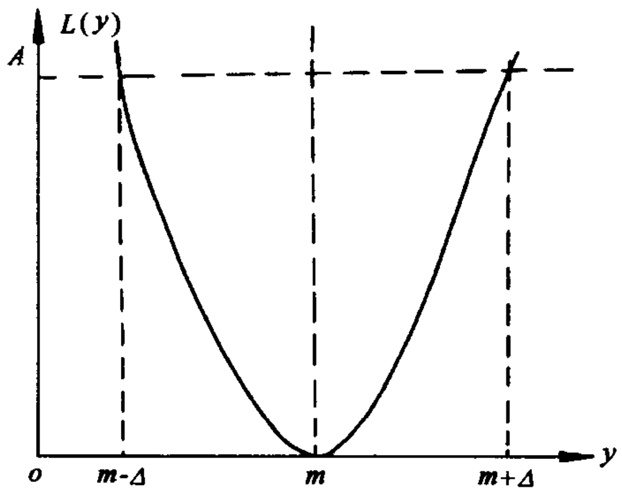

图 1.1　测量误差损失函数

式(1.42)说明，当测量误差 $y-m=0$ 时，损失为零，而测量误差(绝对值)越大，损失越大。

倘若对式(1.42)两边求数学期望，则有

$$\begin{aligned}E[L(y)]&=kE(y-m)^2\\&=k[(\mu-m)^2+\sigma^2]\end{aligned}\tag{1.43}$$

式(1.43)说明，期望总损失 $E[L(y)]$是系统测量误差的损失 $k(\mu-m)^2$ 和随机测量误差的损失 $k\sigma^2$ 之和。我们称 $E[L(y)]$为测量质量水平。一般说来，

系统测量误差可以通过测量器具的校准和调整加以消除。因此,改进测量质量的关键在于尽可能减少测量的随机误差,减小测量结果的不确定度。

1.3.2 k 的确定方法

设测量误差的容差(即允许差)为 Δ,超过容差 Δ 时的损失为 A,则由式(1.42)有

$$A = k\Delta^2 \tag{1.44}$$

于是

$$k = \frac{A}{\Delta^2} \tag{1.45}$$

〔例 1.7〕 某产品的尺寸图纸规定为 $m_0 \pm 12\mu m$,产品不合格时的损失为 $A = 2.50$ 元,今用电子测微仪来测量该产品的尺寸,试建立测量误差损失函数。

解:在测量产品质量特性的场合,测量误差的容差就是产品的容差,测量误差超出容差的损失就是产品不合格的损失,所以据题意

$$\Delta = 12(\mu m), \qquad A = 2.50(元)$$

由式(1.45)

$$k = \frac{A}{\Delta^2} = \frac{2.5}{12^2} = 0.0174$$

所求测量误差的损失函数为

$$L(y) = k(y - m)^2 = 0.0174(y - m)^2.$$

1.3.3 平均损失

设被测量的真值为 m,进行 n 次独立重复测量,测量值为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,称

$$\begin{aligned} \overline{L}(y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L(y_i) = k\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2 \\ &= k \cdot V_T \end{aligned} \tag{1.46}$$

为测量误差的平均损失。

式中

$$V_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - m)^2 \tag{1.47}$$

为测量误差均方值。

〔例 1.8〕 某种温度计最大允许误差(即容差 Δ)为 0.5(℃),测量误差超过允许误差的损失为 10 元,今对标准温度 25℃,进行 10 次独立重复测量,10 次测量值为(单位℃)。

24.7, 25.1, 25.2, 24.8, 24.6, 24.9, 25.0, 25.3, 25.1, 24.8

求测量误差的平均损失。

解:据题意 $\Delta = 0.5$(℃),$A = 10$(元),$m = 25$(℃)

测量误差损失函数为

$$L(y) = k(y - m)^2$$

由式(1.45)

$$k = \frac{A}{\Delta^2} = \frac{10}{0.5^2} = 40$$

所以

$$L(y) = 40(y - 25)^2$$

平均损失为

$$\overline{L}(y) = 40 \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - 25)^2$$
$$= 40 \times \frac{1}{10}[(24.7 - 25)^2 + (25.1 - 25)^2 + \cdots + (24.8 - 25)^2]$$
$$= 40 \times \frac{1}{10} \times 0.49 = 1.96(\text{元})$$

1.4 测量特性的 *SN* 比

本世纪60年代，田口玄一博士提出 *SN* 比(信噪比)的概念，并用它来评价测量系统的测量特性，信噪比的概念源于通信理论，*SN* 比的最初含义是信号功率与噪声功率之比，*SN* 比越大则该通信系统的稳健性越好，抗干扰能力越强。在测量质量工程学中，*SN* 比赋予新的含义，下面分两种情况介绍测量特性的 *SN* 比，即静态测量时测量特性的 *SN* 比及动态测量时测量特性的 *SN* 比。前者被测量为固定值，后者被测量是动态变化的。

1.4.1 静态测量时的 *SN* 比

(1) 定义

设被测量的真值为 m，测量结果为 y，记

$$\mu = E(y), \sigma = \sqrt{V(y)} \tag{1.48}$$

分别表示测量结果 y 的期望值和标准差，令

$$r = \sigma/\mu \tag{1.49}$$

统计上称为变异系数，计量学中称为相对标准差(或相对标准不确定度)。再令

$$\eta = \frac{1}{r^2} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \tag{1.50}$$

并称之为测量特性 y 的 *SN* 比。*SN* 比越大，说明测量结果的相对标准差(或相对标准不确定度)越小，也即测量特性越稳健，测量结果越可靠。

(2) 估计(评定)方法

设对同一被测量，进行 n 次独立重复测量，测量值为

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

据数理统计知识

$$\hat{\mu} = \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.51}$$

$$\hat{\sigma}^2 = V_e = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \tag{1.52}$$

$$\hat{\mu}^2 = (\overline{y})^2 - \frac{V_e}{n} = \frac{1}{n}(S_m - V_e) \tag{1.53}$$

式中

$$S_m = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 \tag{1.54}$$

将式(1.52)，(1.53)代入式(1.50)，得

$$\hat{\eta} = \frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e} \tag{1.55}$$

此外，田口博士还仿照通信理论的做法，对式(1.55)取常用对数并扩大10倍，化为以分贝(dB)为单位的 SN 比，即

$$\eta = 10\lg \frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e}(\mathrm{dB}) \tag{1.56}$$

〔例1.9〕(续例1.8) 求例1.8中温度计的测量特性的 SN 比。

解：据例1.8计算如下：

①求 S_m

$$S_m = \frac{1}{n}(\sum y_i)^2 = \frac{1}{10}(24.7 + 25.1 + \cdots + 24.8)^2$$
$$= 6225.0250$$

②求 V_e

$$V_e = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 0.0517$$

③求 $\hat{\eta}$

$$\hat{\eta} = \frac{\frac{1}{n}(S_m - V_e)}{V_e} = \frac{\frac{1}{10}(6225.0250 - 0.0517)}{0.0517} = 12040.567$$

④求以dB为单位的 SN 比

$$\eta = 10\lg\hat{\eta} = 10\lg 12040.5673 = 40.81(\mathrm{dB})$$

此外，我们还可以由 $\hat{\eta}$ 计算相对标准不确定度

$$r = \frac{1}{\sqrt{\hat{\eta}}} = \frac{1}{\sqrt{12004.5673}} = 0.0091$$

1.4.2 动态测量的 SN 比

任一种测量设备均有一定的量程，研究测量设备的测量特性仅考虑被测量为固定值是不够的，必须对测量范围中每一个被测量进行研究，也即要研究整个量程内的测量特性。

(1) 定义

设某测量设备的测量范围为(m_l, m_u)，M 为此范围内的任一被测量，其测量设备读出值为 y，并假设有

$$y = \alpha + \beta M + e \tag{1.57}$$

β 是相应于真值 M 单位变化时 y 的变化量，α 是 $M = 0$ 时的读出值，也即测量设备零点的飘移，e 是读出值 y 的误差。

由式(1.57)可知，被测量的真值 M 为

$$M = \frac{y - \alpha - e}{\beta} \tag{1.58}$$

而 M 的测量结果(即估计值)为

$$\hat{M} = \frac{y - \alpha}{\beta} \tag{1.59}$$

于是，测量误差为

$$e' = \hat{M} - M = e/\beta \tag{1.60}$$

测量误差标准差(也即测量结果标准不确定度)为