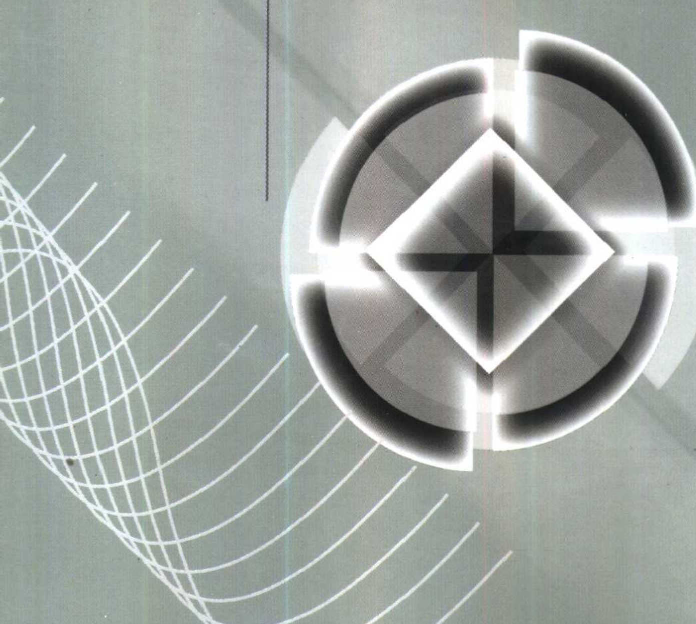
单叶函数的若干问题

DANYEHANSHU DE RUOGAN WENTI



胡克 著

武汉大学出版社
WUHAN DAXUE
CHUBANSHE

单叶函数的若干问题

胡 克 著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

单叶函数的若干问题/胡　克著.—武汉：武汉大学出版社，
2001.4
ISBN 7-307-03172-8

Ⅰ.单…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.单叶函数—研究　Ⅳ.O174.51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03004 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：王　建　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
　　(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
发行：新华书店湖北发行所
印刷：武汉市科普教育印刷厂
开本：850×1168　1/32　印张：5.25　字数：131 千字
版次：2001 年 4 月第 1 版　　2001 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03172-8/O・230　　定价：8.00 元

内容简介

本书是著者对单叶函数论中大家认为艰难而有趣的问题的研究成果汇编而成,多属创新性结果,其中对某些已知定理既进行了改进,又大大简化了证明方法。本书读者对象为高等院校数学系高年级本科生、研究生和有关数学工作者。

前　言

设复变函数 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 在单位圆域 $|z|<1$ 内解析且单叶，记其族为 S. 1916 年，L. Bieberbach 猜测：$f\in S$ 时，$|a_n|\leqslant n$，$n=2,3,\cdots$. 1984 年，de Branges 用参数法中 Löwner 微分方程证明了历时 68 年之久的举世闻名的 Bieberbach 猜测. 但单叶函数中还留有许多难而有趣的问题等待人们去探索与思考. 下面介绍这方面的部分问题，经过著者多年的研究，有的已解决，有的只有进一步的结果，其中有关 S 中的特殊函数族的结果较为满意. 下面概述如下：

1. 寻找最好的偏差定理问题

这历来是单叶函数研究者最感兴趣的问题. J. E. Littlewood 首先用简单偏差定理证明了 $|a_n|\leqslant en$，后来 G. M. Goluzin 用所谓弦与弧的偏差定理证明了：$|a_n|\leqslant\frac{3}{4}en$. 1949 年初，E. Bazilevich，I. M. Milin 和 H. A. Lèbejev 差不多同时用奇函数的 Grunsky 偏差定理证明了进一步的结果：$|a_n|\leqslant\frac{e}{2}n+1.8$. 20 世纪 70 年代初，C. H. FitzGerald 和 D. Horowitz 用指数化的偏差定理，证明了更进一步的结果：$|a_n|\leqslant 1.06n$. 由此可见，历史说明了 Bieberbach 猜测研究工作的推进与偏差定理的改进密切相关. 现在的问题是：

"我们是否可寻求一种更合适的偏差定理,用来证明 Bieberbach 猜测,而不用较深刻的 Löwner 微分方程的工具呢? 即是说,据此能否寻求 Bieberbach 猜测的初等证明? 事实上,$|a_4|\leqslant 4$ 是根据 Grunsky 不等式得出的!"

这是一个很难的问题. 以此出发研究偏差定理也具有深刻的意义.

2. Goluzin 问题

设 $f(z)\in S$, $\lambda\in(0,1]$, $\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\lambda}=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(\lambda)z^n$. 记

$$\begin{aligned}A_n(\lambda) &= \big||D_{n+1}(\lambda)| - |D_n(\lambda)|\big| \\ &\leqslant An^{\frac{b(\lambda)-1}{2}}, \quad n = 1,2,\cdots,\end{aligned}$$

其中 A 为绝对常数. G. M. Goluzin 在 1946 年发现了单叶函数相邻系数互相制约的奇特性质,证明了 $b(1)=\frac{3}{2}$, $b\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 这事引起了很多数学家的兴趣. 后来 W. K. Hayman ([H1])证明了 $b(1)=1$,获得最佳结果. 但当 $0<\lambda<1$ 时,$b(\lambda)$ 的最佳值是什么呢? 此后这个问题虽屡有进展,但至今犹未解决,仍是一个很难的问题.

3. Hayman 常数问题

已知 $f\in S$, $-B\leqslant|a_{n+1}|-|a_n|\leqslant A$,最佳的 A,B 数值应为何? 这也是大家感兴趣而未解决的问题.

4. Littlewood 问题

J. E. Littlewood 首先证明了:$\left|D_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|<A$ (绝对常数),并猜测 $A=1$. 但有人举例指出这是不对的. 到底最佳的 A 是什么呢? 至今犹未解决,也是一个很难的问题.

5. Hayman 问题

设 $f\in S$，$\lim\limits_{r\to 1}(1-r)^2|f(re^{i\theta_0})|=\alpha\neq 0$，记其族为 $S(\alpha)$. W. K. Haymany 证明了：若 $f\in S(\alpha)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left||D_{n+1}(\lambda)|-|D_n(\lambda)|\right|}{d_n(2\lambda-1)}=\alpha,\quad \frac{3}{4}<\lambda\leqslant 1.$$

当 $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$时，上式是否成立呢？这也是一个至今未解决的一个难题$\left(其中\ d_n(\lambda)=\frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{n!}\right)$.

6. Duren 猜测

若 $f\in S$，对任意的正数 ε，Duren 猜测：

$$\left|\left|D_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2-\left|D_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2\right|\leqslant An^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$
$$n=1,2,\cdots.$$

这也是一个很有趣的问题.

7. 较 Goluzin 问题弱的问题

下式是否成立呢？

$$f\in S,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k(\lambda)}{d_k(\lambda)}\leqslant An,\quad 0<\lambda<1.$$

又当 $f\in S(\alpha)$，是否有定数 $B\ (>0)$，使下式成立呢？

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2(\lambda)}{nd_k^2(2\lambda-1)}=B,\quad \frac{1}{2}<\lambda\leqslant\frac{3}{4}.$$

8. 部分和的星形半径问题

设 $f_k(z)=z+\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{km+1}z^{km+1}\in S$. 记

$$S_n^{(k)}(z)=z+\sum_{m=1}^{n}a_{km+1}^{(k)}z^{km+1}.$$

G. Szego、龚昇、陈希孺分别证明了：$S_n^{(k)}$ 在 $|z|<k\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$ 内 $(k=1,2,3)$ 为单叶的. 我们猜测：$S_n^{(k)}$ 在 $|z|<k\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}$ 内不只是单叶的，而且是星形的.

自 1979 年以来，我们对上述问题进行了多方面的研究，解决了问题 6,7,8，对其他问题也取得了现在最好的结果. 特别是对 $S(\alpha)$ 函数族的研究，得到了当时西北大学刘书琴教授的高度赞赏. 例如 $S(\alpha)$ 中函数积分表示最大模增长方向惟一性问题以及 Bazilevich 不等式改进等. 现在汇编成册献给读者，请大家批评指教.

著者 1952 年开始在复旦大学师从陈建功先生学习单叶函数论. 在先生的启发下，以及龚昇、夏道行、何成奇、任福尧、吴卓人群体的带动下，进行了这方面的思考与研究. 1957 年调离复旦大学支援郑州大学并一直任教于该大学. 不久，由于众所周知的原因，中断了研究工作，直至 1979 年才恢复了这方面的研究工作.

本书共分九章，扼要介绍如下：

第一章除开始介绍著者近年来发表的与本书内容相关的几个不等式外，其他均为基础的结果.

第二章为有关 Grunsky 和 Goluzin 的偏差定理及著者的指数化偏差定理方面的工作.

第三章开始叙述平均模数经典结果，而后是著者和龚昇的相关系数的渐近定理.

第四章首先介绍 Milin-Lebejev 不等式及著者的不等式以及著者对 Hayman，Bazilevich 有关研究结果的改进. 特别是著者对 $S(\alpha)$ 中函数性质的阐述，以及具有 k 个方向函数性质的研究结果.

第五章介绍著者提出的关于相邻两系数模之差阶的估值，此为迄今为止最好的结果，即 Goluzin 问题到现在为止最优的结果.

接着是著者的其他成果，即对 Durèn 猜测的证明，有关前述问题 3 的进一步的结果以及解决问题 7 的阐述和用特殊函数解决问题 2、问题 3 的阐述.

第六章介绍参数法、Löwner 微分方程，旨在方便读者阅读.

第七章介绍 Löwner 微分方程的应用，以及有关著者的工作：(1) Littlewood 奇函数系数问题的进一步结果；(2) 对 Goluzin 型的偏差定理的改进.

第八章介绍著者有关问题 8 的解决过程.

第九章是著者近年来对 $S(c)$ 中函数有关系数及偏差定理的研究.

附带说明一下，此书没有标明出处者，均见参考书目，不另说明. 为了帮助数学系高年级学生能逐步看懂此书，特增添了附录部分.

武汉大学路见可教授仔细审阅了本书，修正了不少错误，谨致衷心的谢忱。

著　者

2001 年 2 月

目　录

第一章　一个不等式及若干基础结果

本章介绍一个不等式以备后面应用，以及若干基础结果.

§1.1　一个不等式

本节阐述比[胡 1]中稍强一点的不等式，以备后面应用.

定理 1.1.1　设 a_k, b_k 为任意正数，$p\geqslant q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，以及 $1-e(k)\bar{e}(r)+e(r)\bar{e}(k)\geqslant 0$. 记

$$\begin{aligned}F_s(n) = &\left(\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\right)^s \Bigg\{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^2 \\ &- \Big[\sum_{k=1}^{n} a_k^p e(k) \sum_{k=1}^{n} b_k^q \bar{e}(k) \\ &- \sum_{k=1}^{n} a_k^p \bar{e}(k) \sum_{k=1}^{n} b_k^q e(k)\Big]^2\Bigg\}^{\frac{s}{p}} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^{2s},\end{aligned}$$

我们有 $0\leqslant F_s(n)\leqslant F_s(n+1)$，$s=1,2,\cdots$；$n=1,2,3,\cdots$.

定理 1.1.2　设 $f(x), g(x)\geqslant 0$，$f\in L^p(0,b)$，$g\in L^q(0,b)$，及

$$\begin{aligned}F_s(t) = &\left(\left(\int_0^t g^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\right)^s \Bigg\{\left(\int_0^t f^p \mathrm{d}x\right)^2\left(\int_0^t g^q \mathrm{d}x\right)^2 \\ &- \Big(\int_0^t e(x) f^p \mathrm{d}x \int_0^t \bar{e}(x) g^q \mathrm{d}x \\ &- \int_0^t \bar{e}(x) f^p \mathrm{d}x \int_0^t e(x) g^q \mathrm{d}x\Big)^2\Bigg\}^{\frac{s}{p}} - \left(\int_0^t f g \mathrm{d}x\right)^{2s},\end{aligned}$$

其中 $1-e(x)\bar{e}(y)+\bar{e}(x)e(y)\geqslant 0$. 我们有 $F_s(t_1)\leqslant F_s(t_2)$，$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b$，$s=1,2,\cdots$.

我们只需证明定理 1.1.1 就可以了. [胡 1]中已证明 $F_1(n)\geqslant 0$（实际上，我们下面叙述的方法也说明了这点），即

$$\begin{aligned} y_n &=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2 \\ &\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\Big)^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\Big)^2\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\Big)^2 \\ &\quad-\Big[\sum_{k=1}^{n}a_k^pe(k)\sum_{k=1}^{n}b_k^q\bar{e}(k) \\ &\quad-\sum_{k=1}^{n}a_k^p\bar{e}(k)\sum_{k=1}^{n}b_k^qe(k)\Big]^2\Big\}^{\frac{1}{p}} \\ &=x_n\quad(y_n\leqslant x_n). \end{aligned}\tag{1.1.1}$$

因此，若 $y_{n+1}-y_n\leqslant x_{n+1}-x_n$ 成立，则 $y_{n+1}^s-y_n^s\leqslant x_{n+1}^s-x_n^s$ 成立. 所以要证明定理 1.1.1 成立，只要证明 $s=1$ 时定理为真（当 $\bar{e}(k)=1$ 时参看[胡 2]）. 因为

$$\Big(\sum_{r=1}^{N}a_rb_r\Big)\Big(\sum_{k=1}^{N}a_kb_k\Big)[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)]=\Big(\sum_{r=1}^{N}a_rb_r\Big)^2,\tag{1.1.2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}b_r^qB_r(N,1)&=\sum_{r=1}^{N}b_r^q\sum_{k=1}^{N}b_k^q[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)]\\ &=\Big(\sum_{k=1}^{N}b_k^q\Big)^2,\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

$$\sum_{r=1}^{N}b_r^qA_r(N,1)=\sum_{r=1}^{N}b_r^q\sum_{k=1}^{N}a_k^p[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)],\tag{1.1.4}$$

$$\sum_{r=1}^{N}a_r^pB_r(N,1)=\sum_{r=1}^{N}a_r^p\sum_{k=1}^{N}b_k^q[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)],\tag{1.1.5}$$

而

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1}-y_n+x_n\\
&=a_{n+1}b_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_kb_k[1-e(n+1)\bar{e}(k)+\bar{e}(n+1)e(k)]\\
&\quad+\sum_{r=1}^{n}a_rb_ra_{n+1}b_{n+1}[1-e(r)\bar{e}(n+1)+e(n+1)\bar{e}(r)]+x_n\\
&\leqslant a_{n+1}b_{n+1}\Big\{\sum_{k=1}^{n+1}a_k^p[1-e(n+1)\bar{e}(k)+\bar{e}(n+1)e(k)]\Big\}^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\cdot\Big\{\sum_{k=1}^{n+1}b_k^q[1-e(n+1)\bar{e}(k)+\bar{e}(n+1)e(k)]\Big\}^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\sum_{r=1}^{n}a_rb_r\{a_{n+1}^p[1-e(r)\bar{e}(n+1)+e(n+1)\bar{e}(r)]\}^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\{b_{n+1}^q[1-e(r)\bar{e}(n+1)+\bar{e}(r)e(n+1)]\}^{\frac{1}{q}}+x_n,
\end{aligned}
\tag{1.1.6}
$$

记

$$X_{r,n}=\sum_{k=1}^{n}a_k^p[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)],$$

$$Y_{r,n}=\sum_{k=1}^{n}b_k^q[1-e(r)\bar{e}(k)+e(k)\bar{e}(r)],$$

$$f_{k,n}=b_k^{1-\frac{q}{p}}Y_{k,n}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\quad g_{k,n}=a_kY_{k,n}^{\frac{1}{p}},\quad h_{k,n}=b_k^{\frac{q}{p}}X_{k,n}^{\frac{1}{p}},$$

$$Y_k=a_{n+1}^p[1-e(k)\bar{e}(n+1)+\bar{e}(k)e(n+1)],$$

$$X_k=b_{n+1}^q[1-e(k)\bar{e}(n+1)+\bar{e}(k)e(n+1)],$$

$$f_k=b_k^{1-\frac{q}{p}}Y_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\quad g_k=a_kY_k^{\frac{1}{p}},\quad h_k=b_k^{\frac{q}{p}}X_k^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{p}\quad\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=1\Big),$$

所以，由

$$x_n=\Big(\sum_{k=1}^{n}f_{k,n}^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\sum_{k=1}^{n}g_{k,n}^{\beta}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\sum_{k=1}^{n}h_{k,n}^{\gamma}\Big)^{\frac{1}{\gamma}},\tag{1.1.7}$$

$$y_{n+1}-y_n+x_n\leqslant f_{n+1,n+1}g_{n+1,n+1}h_{n+1,n+1}+\sum_{k=1}^{n}f_kg_kh_k+x_n,\tag{1.1.8}$$

再由 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n + x_n &\leqslant (f^{\alpha}_{n+1,n+1})^{\frac{1}{\alpha}}(g^{\beta}_{n+1,n+1})^{\frac{1}{\beta}}(h^{\gamma}_{n+1,n+1})^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad + \Big(\sum_{k=1}^{n} f^{\alpha}_{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\sum_{k=1}^{n} g^{\beta}_{k}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\sum_{k=1}^{n} h^{\gamma}_{k}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad + \Big(\sum_{k=1}^{n} f^{\alpha}_{k,n}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\sum_{k=1}^{n} g^{\beta}_{k,n}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\sum_{k=1}^{n} h^{\gamma}_{k,n}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\leqslant \Big[f^{\alpha}_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n}(f^{\alpha}_{k} + f^{\alpha}_{k,n})\Big]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\quad \cdot \Big[g^{\beta}_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n}(g^{\beta}_{k} + g^{\beta}_{k,n})\Big]^{\frac{1}{\beta}} \\ &\quad \cdot \Big[h^{\gamma}_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n}(h^{\gamma}_{k} + h^{\gamma}_{k,n})\Big]^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n+1} f^{\alpha}_{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} g^{\beta}_{k}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} h^{\gamma}_{k}\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= x_{n+1}. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

最后利用(1.1.3)、(1.1.4)和(1.1.5)，定理得证.

§1.2 面积原理及若干基础结果

设在一单连通区域 Ω 上一单值的复变数 z 的函数 $w=f(z)$ 对于 Ω 内任意两个不同点 z_1,z_2，有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，则说 $f(z)$ 在 Ω 内是单叶的. 若 $f(z)$ 在 Ω 内又为解析的，则说 $f(z)$ 在 Ω 内是解析单叶的. 我们将介绍一区域 Ω 内解析单叶函数的一些性质，特别是下面几类解析单叶函数.

记 $\mathbf{C}$ 为复平面，$\hat{\mathbf{C}}$ 为扩充复平面及

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}, \quad \Delta = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid |\zeta| > 1\}.$$

S 族：函数 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$, $z\in D$, $f(z)$在 D 内单叶；

Σ 族：函数 $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\alpha_1\zeta^{-1}+\cdots$, $\zeta\in\Delta$, $F(\zeta)$在 Δ 内单叶；

Σ_0 族：$F\in\Sigma$, $\alpha_0=0$.

S 中函数最典型的例子为 Koebe 函数：

$$K(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots.$$

$K(z)$将 D 共形映照于 w 平面除去从$-\frac{1}{4}$开始到$-\infty$的射线.

面积原理看来是一个简单的几何性质，但许多优美单叶函数的不等式可以从中导出来. 最简单的面积定理是 Gronwall 在 1914 年发现的.

定理 1.2.1(Gronwall 面积原理)　若 $F(\zeta)\in\Sigma$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2 \leqslant 1$，等号成立限于映像区域无外点.

证　设 $w=u+\mathrm{i}v=F(\zeta)$将圆周$|\zeta|=\rho$（具有正向）映照成闭曲线 Γ_ρ，其内部区域面积为 S_ρ，则

$$\begin{aligned} S_\rho &= \iint_{S_\rho} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\Gamma_\rho} \overline{w}\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n\rho^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \pi\rho^2 - \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2\rho^{-2n} \geqslant 0 \quad (\rho>1). \end{aligned}$$

令 $\rho\to 1$ 即得定理的前半部分.

等号成立限于$\lim\limits_{\rho\to 1} S_\rho = 0$，即得映像区域无外点.

定理 1.2.2(Bieberbach)　若 $f(z)\in S$，则 $|a_2|\leqslant 2$，等号成立限于函数 $K(z)$.

证　我们定义 $h(z)=\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$，$h(0)=1$，$g(z)=zh(z^2)$，则 $g(z)$在 D 内是单叶的. 因若 $g(z_1)=g(z_2)$，可推出 $f(z_1^2)=f(z_2^2)$，所以 $z_1=z_2$ 或 $z_1=-z_2$. 后一种情形不可能，因为 $g(z)$为奇函数，且当 $z\neq 0$ 时，$g(z)\neq 0$. 所以 $g(z)$为单叶的，$g(z)$的展开式为

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + \cdots,$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta^{-1})} = \zeta - \frac{1}{2}a_2\zeta^{-1} + \cdots \in \Sigma_0, \quad |\zeta| > 1.$$