



经济数学

主编 赵安顺 苏晓东

JINGJISHUXUE

东北财经大学出版社

序 言

数学是所有科学进行数量研究的基础,它的研究范围、领域十分广泛。本书着重对在经济领域中经常用到的一些数学理论和方法加以介绍,试图围绕经济学中的某些重要概念和理论,使读者在学习数学理论和方法的同时,得到一些在经济学方面的具体形象的感性认识。

内容上,本书主要包括四个方面:一、高等数学中的函数、极限、导数和积分的基本概念、理论和应用;二、对资金时间价值的分析和应用;三、矩阵代数理论中关于矩阵的计算和应用;四、对不确定现象进行研究的概率统计理论和方法以及如何利用这些理论和方法对有关经济现象和问题进行分析和研究。基于财经类学生学习使用的特点,在编写过程中,主要贯彻了以下基本思想:

1. 力图在数学理论和方法介绍的同时,配以对有关经济学问题的分析,增强读者应用数学理论和方法的自觉性。

2. 对数学和经济问题的分析,尽量给出其图形或数据表格表示,使读者能够得到有关经济数学问题直观形象的表述。

3. 为了便于自学,在每章开始部分编写了“本章要点”,在每章结束部分编写了“本章概念”和“单元测验题”,使读者在每学习新的一章之前能较深入地提出问题,把握住该章的骨架和灵魂;在学习每一章之后,围绕“本章概念”将所学知识串成一线,再通过“单元测验题”的练习,将一章中

最基本的内容和方法复习、巩固、掌握。

为读者使用方便，在书末附录中还给出了有关表格及查用方法举例。

本书的第三章、第五章是由苏晓东同志编写的，其余各章由赵安顺同志编写。在编写过程中，得到了苏奎章教授、时庆祝教授等老师们的支持和鼓励，以及烟台大学经管系九三级部分同学的热心帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

另外，由于编者水平所限，尽管几经查阅，书中一定仍有不少问题和缺点，谨此欢迎读者多提宝贵意见。

赵 安 顺

1993年11月28日于烟台

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1. 函数	(2)
§ 2. 线性函数	(9)
§ 3. 多项式函数	(16)
§ 4. 幂函数、指数函数与对数函数	(25)
§ 5. 复合函数与反函数	(32)
§ 6. 多元函数	(37)
第二章 极限与导数	(46)
§ 1. 极限	(46)
§ 2. 极限与连续的性质	(53)
§ 3. 导数	(59)
§ 4. 隐函数的导数、高阶导数	(66)
§ 5. 导数与边际分析	(74)
§ 6. 导数与弹性分析	(81)
§ 7. 偏导数与多元函数的极值与最值	(91)
第三章 积分与级数	(99)
§ 1. 不定积分	(99)
§ 2. 换元积分法与分部积分法	(105)
§ 3. 定积分	(114)
§ 4. 定积分的计算	(119)
§ 5. 广义积分	(129)

§ 6. 常数项级数	(131)
第四章 资金的时间价值	(145)
§ 1. 利息	(145)
§ 2. 现值	(150)
§ 3. 年金	(155)
§ 4. 设备的折旧方法	(163)
§ 5. 通货膨胀	(170)
第五章 矩阵代数	(179)
§ 1. 行列式	(179)
§ 2. 矩阵	(193)
§ 3. 矩阵的逆	(205)
§ 4. 矩阵方程	(214)
§ 5. 矩阵代数的应用	(220)
第六章 概率统计初步	(233)
§ 1. 概率	(234)
§ 2. 概率运算	(241)
§ 3. 随机变量的概率分布	(248)
§ 4. 期望与方差	(258)
§ 5. 参数估计	(266)
§ 6. 参数假设检验	(274)
§ 7. 一元线性回归分析	(283)
§ 8. 一元线性回归分析的扩展	(293)

第 1 章 函 数

本章要点:

- 函数的概念与直角坐标系的建立
- 线性函数与需求函数、供给函数
- 多项式函数与成本函数、收益函数和利润函数
- 幂函数、指数函数、对数函数与消费函数和储蓄函数
- 复合函数与反函数
- 多元函数与柯布——道格拉斯生产函数

在社会经济生活中,经常会碰到一些难以一时讲清楚的现象和问题,象彩电、冰箱的价格为什么会升升降降,它与哪些因素有关? 什么时间购买才是理智的? 上海、深圳股市的变化有什么规律,如何去把握这些规律,如何利用这些规律实现资金的有效使用? 企业新研制的产品能否得到用户的信赖? 要得到用户的信赖,企业又应做哪些工作?……。所有这些问题,都需在科学分析的基础上寻求解决的办法,需要将与这些问题相关的因素析别出来,分析它们之间的关系,建立它们之间的因果互动的联系,从而在已知某些条件下预测或判断将要出现的结果,增强经济分析决策的准确性。

概括来讲,就是要建立在社会经济现象中各相关因素数量之间的对应关系。在数学上,称这种对应关系为函数。

§ 1 函数与直角坐标系

一、函数

在实际工作中,经常会遇到这样一些例子。

例 1:某商店统计了某商品的价格与销售量之间有如下关系(见表 1.1.1):

表 1.1.1

价格(元)	1	2	3	4	5
销售量(kg)	40	30	20	10	0

商品价格高时,则销售量少;商品价格低时,则销售量多。由此可见,该商品的价格与销售量之间存有反向关系。

例 2:某电视机生产厂家研究了某型号电视机的价格与可能的生产量之间的关系如下(见表 1.1.2):

表 1.1.2

价格(元)	500	1 000	1 500	2 000
生产量(台)	0	500	1 000	1 500

此时产品价格与生产量之间存有正向关系,即产品价格低则生产量少;产品价格高时,则生产量多。

例 3:某皮鞋生产厂家收集到皮鞋产量与相应固定成本与可变成本的数据资料如下(见表 1.1.3):

表 1.1.3

产量(千双)	10	20	30	40	50
固定成本(千元)	50	50	50	50	50
可变成本(千元)	20	40	60	80	100

由表中数据可知,可变成本随着产量的增加而增加,固定成本始终保持不变。

一般地,在现象的观察过程中,数值保持不变的量称为**常量**,一般用字母 a, b, c 等表示,如例 3 中的固定成本即为常量;在现象的观察过程中数值经常变动的量称为**变量**,一般用字母 x, y, z 等表示,如例 1 中的价格、销售量,例 2 中的价格与生产量都是变量。

若存在两个变量 x 和 y ,每确定变量 x 的一个数值,变量 y 都有唯一的一个数值与之相对应,则称变量 x 与 y 之间的对应关系为**函数**。记作

$$y=f(x)$$

变量 x 称为函数的**自变量**,它的可能取值范围称为函数的**定义域**,记作 D 或 D_f ;变量 y 称为函数的**因变量**,它的可能取值范围称为函数的**值域**,记作 Z 或 Z_f ;" f "称为对应关系。

例 4:求下列函数的定义域和值域:

$$(1)y=\frac{1}{x-2} \quad (2)y=\sqrt{x+5}+7$$

$$(3)y=\ln(2x+3) \quad (4)y=3x+5$$

解:(1)由 $x-2 \neq 0$ 得 $x \neq 2$ 。由此知函数 $y=1/(x-2)$ 的定义域为: $x \neq 2$,值域为 $y \neq 0$ 。

(2)由 $x+5 \geq 0$ 得 $x \geq -5$ 。由此知函数 $y=\sqrt{x+5}+7$ 的定义域为: $x \geq -5$;值域为 $y \geq 7$ 。

(3)由 $2x+3 > 0$ 得 $x > -3/2$ 。即函数 $y=\ln(2x+3)$ 的定义域为 $x > -3/2$;值域为 R 。

(4)函数 $y=3x+5$ 的定义域为 R ,值域也为 R 。(其中 R 表示全体实数)

例 5:假定价格用 P 表示,销售量用 Q 表示,则例 1 中销

售量与价格的关系可表示为:

$$Q = 50 - 10P$$

根据常识有

$$\begin{cases} P \geq 0 \\ Q = 50 - 10P \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} P \geq 0 \\ P \leq 5 \end{cases}$$

即上述函数的定义域为: $D = [0, 5]$, 值域为: $Z = [0, 50]$ 。

例 6: 对例 2 中的资料, 若用 P 表示电视价格, Q 表示电视产量, 则电视产量与价格的关系可表示为:

$$Q = -500 + P$$

由常识可知, 根据

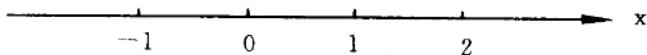
$$\begin{cases} P \geq 0 \\ Q = -500 + P \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} P \geq 0 \\ P \geq 500 \end{cases}$$

即得上述函数的定义域为: $D = [500, \infty)$, 值域为 $Z = [0, \infty)$ 。

二、直角坐标系

1. 实数轴

实数轴是由含有原点和方向的一条直线构成的, 直线上的每一点都与一个实数相对应, 数的大小由左至右依次增大。原点对应实数的零, 原点左方表示负数, 原点右方表示正数。如: $-1, 0, 1, 2$ 在数轴上可表示为(见图 1.1.1):

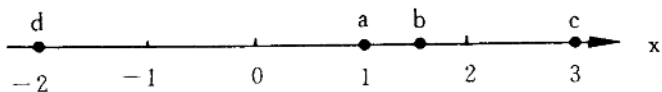


(图 1.1.1)

例 7: 在数轴上表示常量 $a=1, b=1.5, c=3, d=-2.3$ 。

解: 在数轴上用实心圆点将 $1, 1.5, 3, -2.3$ 表示如图

1.1.2:

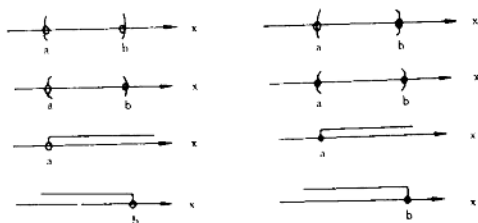


(图 1.1.2)

利用数轴不仅可以表示常数,还可以表示变量的取值范围。

例 8: 在数轴上表示区间 (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ 。

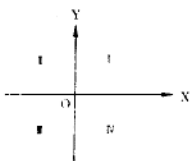
解: 区间 (a, b) 、 $(a, b]$ 、 $[a, b)$ 、 $[a, b]$ 、 $(a, +\infty)$ 、 $[a, +\infty)$ 、 $(-\infty, b)$ 、 $(-\infty, b]$ 可分别表示为图 1.1.3 的(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8)(见图 1.1.3)。



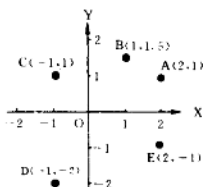
(图 1.1.3)

2. 直角坐标系

直角坐标系是由一条水平的实轴和一条垂直的实轴在原点处相交构成的。水平轴常用来表示函数关系中自变量 x 的变化范围,有时也称为 x 轴。垂直轴常用来表示因变量 y 的变化范围,有时也称为 y 轴,它们的交点称为直角坐标系的零点或原点,用 O 表示。直角坐标系的两条实轴将平面分成了四部分,称为四个象限,按逆时针方向依次称为第 I 象限,第 II 象限,第 III 象限和第 IV 象限(见图 1.1.4)。



(图 1.1.4)



(图 1.1.5)

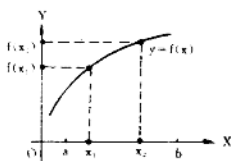
利用直角坐标系,可将变量 x 和 y 的任意一组对应值在坐标系中表出,亦即直角坐标系平面上的任一点都对应着变量 x 和 y 的一对取值。

例 9: 在直角坐标系中标出点 $A(2, 1)$, $B(1, 1.5)$, $C(-1, 1)$, $D(-1, -2)$, $E(2, -1)$ (见图 1.1.5)。

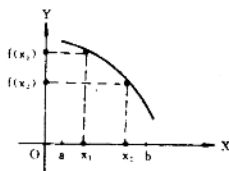
三、函数的性质

1. 单调性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的任意两点 x_1, x_2 , 有 $x_1 < x_2$, 则有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加(见图 1.1.6); 若对区间 (a, b) 内的任两点 x_1, x_2 有 $x_1 < x_2$, 则有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少(见图 1.1.7), 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。



(图 1.1.6)



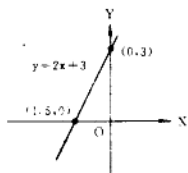
(图 1.1.7)

例 10: 判断下列函数的单调性:

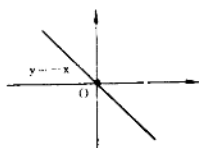
(1) $y=2x+3$ (2) $y=-x$

解: (1) $y=2x+3$ 的定义域为 R , 对任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$, 则 $f(x_1)=2x_1+3 < 2x_2+3=f(x_2)$, 知 $y=2x+3$ 为单调增加函数 (见图 1.1.8)。

(2) $y=-x$ 的定义域为 R , 对任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$, 则 $f(x_1)=-x_1 > -x_2=f(x_2)$, 知 $y=-x$ 为单调减少函数 (见图 1.1.9)。



(图 1.1.8)



(图 1.1.9)

2. 奇偶性

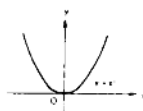
函数 $y=f(x)$ 在以原点为中心的对称区间 $(-a, a)$ 上有定义, 对任 $x \in (-a, a)$, 若 $f(-x)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x)=-f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数。

例 11: 判断下列函数的奇偶性

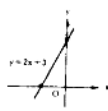
1) $y=x^2$ 2) $y=2x+3$

解: 1) 对任意 $x \in R$, 有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ 知 $y=x^2$ 为偶函数 (见图 1.1.10)。

2) 对任意 $x \in R$, 有 $f(-x) = 2(-x) + 3 = -2x + 3 \neq$
 $\begin{cases} f(x) = 2x + 3 \\ -f(x) = -2x - 3 \end{cases}$, 知 $y = 2x + 3$ 为非奇非偶函数 (见图 1.1.11)。



(图 1.1.10)



(图 1.1.11)

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域和值域

$$(1) y = \sqrt{x-3}$$

$$(2) y = \frac{1}{x+2} - 3$$

$$(3) y = \arcsin x$$

$$(4) y = \ln(x+2)$$

2. 在直角坐标系内标点 $A(1,1), B(-1,2), C(1,-2), D(-2,-2), E(3,2)$ 。

3. 判断下列函数的单调性

$$(1) y = 2x^2 \quad D_f = [0, +\infty)$$

$$(2) y = 10 - 3x$$

$$(3) y = 5x + 2$$

$$(4) y = -\sqrt{x} \quad D_f = [2, 10]$$

4. 判断下列函数的奇偶性

$$(1) y = 10x \quad (2) y = 10x - 5$$

$$(3) y = -x^5 \quad (4) y = x^4$$

§ 2 线性函数

线性函数关系是表示变量之间对应关系中最简单的一种,它是理解变量之间的相互联系的基础。

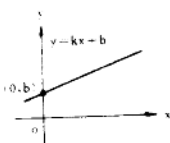
一、线性函数的表示

线性函数一般表示为:

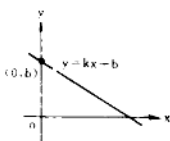
$$y = kx + b \quad (1.2.1)$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, k, b 为常数, k 为斜率, b 为 y 轴截距。

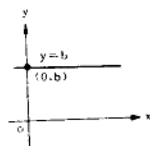
根据斜率 k 和截距 b 的取值,线性函数的图形具有如下特点(见图 1.2.1)。



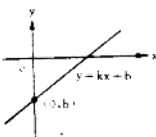
(1) $k > 0, b > 0$



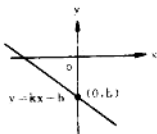
(2) $k < 0, b > 0$



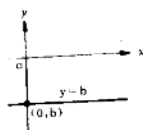
(3) $k = 0, b > 0$



(4) $k > 0, b < 0$



(5) $k < 0, b < 0$



(6) $k = 0, b < 0$

(图 1.2.1) 线性函数的图形

线性函数在直角坐标系中的图形为一条直线。一条直线可由两个点确定,因此,在画线性函数的图形时,只需确定函数的两个点,然后将其连接,即得到线性函数的图形。

例 1:画出下列线性函数的图形。

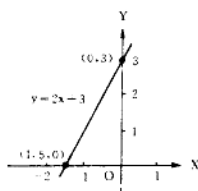
$$(1)y=2x+3$$

$$(2)Q=50-10P$$

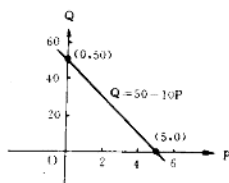
解:(1)当 $x=0$ 时, $y=3$; 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时, $y=0$

将点 $(0,3)$ 、 $(-\frac{3}{2},0)$ 在直角坐标上标出并连接,即得函数 $y=2x+3$ 的图形(图 1.2.2)。

(2)当 $P=0$ 时, $Q=50$, 当 $Q=0$ 时, $P=5$, 将点 $(0,50)$ 和点 $(5,0)$ 标出并连接即得 $Q=50-10P$ 的图形(见图 1.2.3)。



(图 1.2.2)



(图 1.2.3)

二、线性函数表达式的求法

给定线性函数可确定变量之间数值对应关系,给出变量之间的数值时,同样可求出其线性函数表达式,一般采用下述方法求线性函数的表达式:

1. 两点法

假定点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是线性函数上的两点, 则线性函数可表示为:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad (1.2.2)$$

例 2: 已知 $(0, 3), (1, 5)$ 为线性函数 l 上的两点, 试求其函数表示式。

解: 由两点法得该线性函数为:

$$y - 3 = \frac{5 - 3}{1 - 0} \cdot (x - 0)$$

$$y - 3 = 2x$$

即所求线性函数为 $y = 2x + 3$ (见图 1.2.2)。

2. 点斜法

若已知线性函数的斜率 k 及线性函数的一个点 (x_0, y_0) , 则线性函数可表示为:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1.2.3)$$

例 3: 已知汽水销售量 Q 与汽水价格 P 的对应关系为线性关系, 其斜率为 -10 , 经过点 $(0, 50)$ 则其线性函数为 (见图 1.2.3):

$$Q - 50 = -10(P - 0)$$

$$\text{或 } Q - 50 = -10P \quad \text{或 } Q = 50 - 10P$$

三、需求函数与供给函数

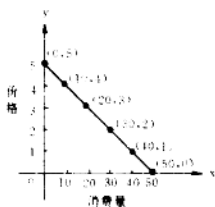
1. 需求函数

一般地讲, 人们对某商品的消费水平受该商品价格的影响, 当价格水平降低时, 人们的消费水平则高; 而当价格增高时, 则人们的消费水平降低, 需求函数就是用来反映这一变化的。比如某单位对汽水的消费情况如下 (见表 1.2.1):

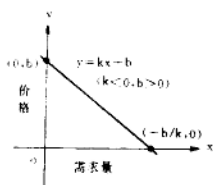
表 1.2.1

价 格(元)	0	1	2	3	4	5
消费量(瓶)	50	40	30	20	10	0

假定价格以字母 y 表示,消费量以字母 x 表示,则其对应关系可表为: $y=5-0.1x$, 图形表示为(图 1.2.4):



(图 1.2.4)

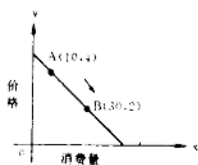


(图 1.2.5)

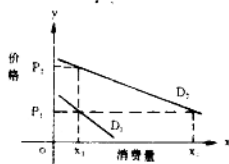
一般地,若需求量 x 与价格 y 之间关系为线性,可将其表示为(见图 1.2.5):

$$y = kx + b \quad (k < 0, b > 0) \quad (1.2.4)$$

给出了需求函数及图形,就可以直观地把握需求的变化情况(见图 1.2.6、图 1.2.7)。



(图 1.2.6)



(图 1.2.7)