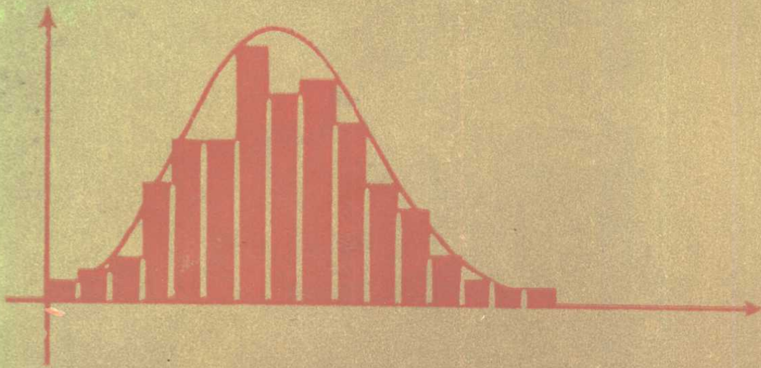
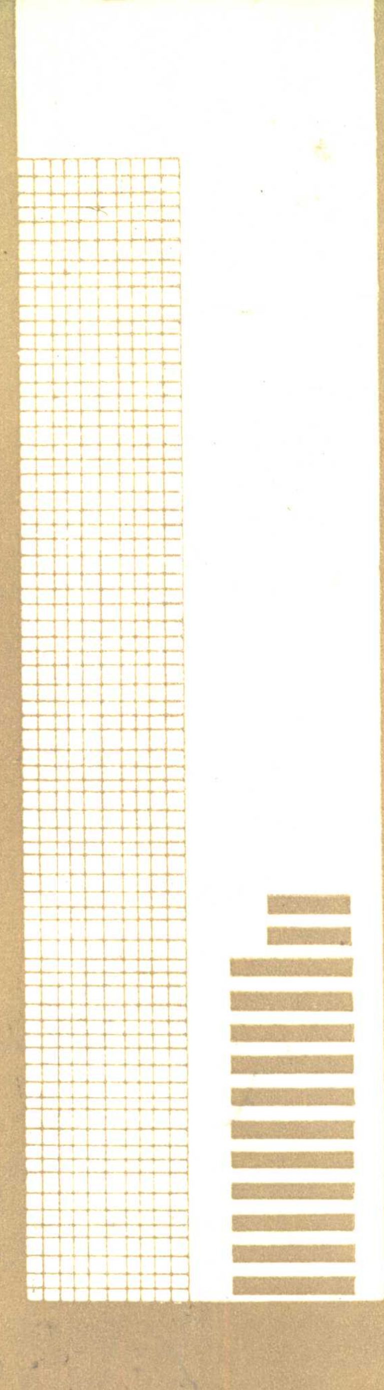




杨有贵 编著

概率统计及其在土建中的应用

中国建筑工业出版社

概率统计及其在土建中的应用

杨 有 贵 编著

中 国 建 筑 工 业 出 版 社

此书介绍了概率统计及其在土建方面的应用。内容由两部分组成，第一部分是概率论基础，主要包括基本概念、随机变量、分布律、数字特征、大数定律和中心极限定理；第二部分是数理统计，主要包括参数估计、假设检验、方差分析和回归分析，还介绍了极值问题和正交试验设计问题。每章都有大量土建方面的例题和习题，紧密结合专业实际。书中的一些繁琐计算附有微机运算程序。

本书可供土建专业的工程技术人员、科研人员、大专院校师生参考使用。

概率统计及其在土建中的应用

杨有贵 编著

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：12⅜ 字数：306 千字

1986年10月第一版 1986年10月第一次印刷

印数：1—8,700册 定价：2.00元

统一书号：15040·5076

前　　言

这本书具有明显地结合土建专业的特点。书中各章节的例题和习题中，大都为土建各专业的概率统计的应用题，读者可从中受到启发，举一反三；书中的一些计算，如样本的均值、方差、回归系数的求得等，采用BASIC语言、引入APPLEⅡ机运算，使繁琐的运算变为简单和精确。为方便读者，把简单程序附录于有关章节之后，供参考使用。

本书可供一般大专院校学生和科技人员、特别是土建人员参考使用。

本书在编写和使用过程中，曾得到湖南大学吴俊杰副教授，重庆建工学院杨春巍同志的热情支持和帮助，提出过宝贵的修改意见；还得到本院的王光远教授、樊承谋教授及有关领导和很多老师的支持与帮助，对此深表谢意！

在编写过程中，尽量地遵循由浅入深，由直观到抽象的认识规律，并照顾到理论的系统性和完整性，以满足不同程度读者的要求，但由于水平所限，实践经验不足，不当之处，望批评指正。

编者

1985.7

于哈尔滨建筑工程学院

目　　录

绪　论

概率论与数理统计是现代数学的重要分支，现在它不仅有了完整的理论系统，而且具有丰富的内容，广泛地涉及到了各学科领域中，特别在理论联系实际方面，在数学领域中说来，概率论与数理统计可说占有独特的地位，因此，对每一个自然科学工作者，或工程技术人员来说，很好地掌握这门学科，确实具有很重要的现实意义。

在这里我们简略地介绍一下概率论与数理统计的研究对象及其应用。

一、随机现象及统计规律性

客观现象可分为确定性的与非确定性的两类。简单的机械运动，例如物体在重力作用下降落是确定性的，只要知道降落时的高度和速度，就可完全肯定地预言随后任一时刻的运动情况。由于生产水平的限制，在一个相当长的历史时期内，数学几乎完全局限于确定性问题的研究。直到十七世纪中叶以后，人们才开始注意到另一种完全不同性质的现象一随机现象。例如重复测量同一距离，结果总有微小偏差；又如某地今年夏天会有多少天下雨；在自动化车间里，每天将有多少台机床发生故障等等。所有这些现象都有一个共同的特点：我们无法对它们作任何确定性的预言，即在观察和试验之前，不能预先肯定所得的结果。

对随机现象，我们可能会想到既然它们都带有不确定性，那可能没有什么规律性可言，但实践证明，当对它们进行大量的观察和试验之后，就会发现它们具有非常明显的统计规律性。例如，婴儿的降生，对个别讲，生男孩或女孩是随机的，但对全国进行统计，就将接近一样各半。又如对靶进行射击时，命中点的分布，当射击次数少时，无规律性，但当次数多时，就会发现离靶心越近，分布越密，越远则分布越稀。

由此可知，对个别现象是随机的，但对大量现象而言，就呈现出规律性，概率论与数理统计就是探讨和揭示这种大量现象的规律性的学科。

二、在建筑工程上的应用举例

在自然界中，严格地说，任何一种客观现象，都不可避免地带有随机性。因而随着科学技术的发展，精确度要求越来越高；加之，有的自然现象，除了用概率论这一有力工具外，其它数学工具就显得无能为力。由此可看出，概率论在近代各学科领域中占有极其重要的地位。同时，这也是近三、四十年来概率论飞速发展的原因。

在建筑工程中，毫无疑问，也大量存在着概率论与数理统计方面的问题，最常见的例子如：

1.洪峰问题：据过去的资料，来估计出若干年内的最大洪峰，这对桥梁和水坝建筑有极其重要的意义。

2.风压问题：据过去的资料，估计出若干年内的最大风压，以合理地确定安全系数，避免财力物力浪费，或造成安全事故。（如图0-1所示）

3.地震问题：找出地震的变化规律，特别是关于地震中心（均值）的确定，这在建筑

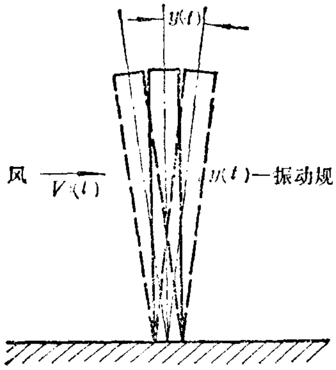


图 0-1

上意义也很大。

还有科研中的试验设计及结果分析方面，都需概率统计方面的知识。

总之，概率论与数理统计，无论在一般生产实际问题中，还是在近代科学领域中，如质量检查、自动控制、信息传递、原子物理、气象、天文等等都有其广泛的应用。

第一部分　概率论基础

第一章　基本概念

§1.1　事件和概率

一、随机事件

当我们多次观察自然现象后，会发现许多事情在一定条件下必然会发生。例如“同性的电互相排斥”，“在标准大气压下，水加热到100°C时必定沸腾”等等。这种在一定条件下必然发生的事情，称为必然事件，记为Ω；反之，在一定条件下不可能发生的事情，称为不可能事件，记为ϕ。显然，必然事件的反面是不可能事件。

然而，在自然现象中，还存在着一类，在一定条件下可能发生，也可能不发生的事情，我们称这种事情为随机事件，简称事件。

于是，我们对随机现象的研究，就转化为对随机事件的研究。实际问题中，我们通过随机试验来观察和分析随机事件。所谓随机试验，就是指这样的一个试验E，如果事先不能预言它的结果，但在相同的条件下，试验E可重复进行。随机试验的任一可能出现的结果称为基本事件，记为ω，全体基本事件构成的集合$\Omega=\{\omega\}$，称为试验E的样本空间（基本空间），基本事件也称为样本点。

例1　E——观察所掷硬币的正反面；这里共有两个基本事件：ω_1——正面；ω_2——反面。$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$。

例2　E——记录某种材料的强度；ω_a——强度为$a\,\mathrm{kgf/cm^2}$。$0\leqslant a<\infty$，$\Omega=\{\omega_a:\ 0\leqslant a<\infty\}$。

例3　E——观察松花江8月间的最高水位；ω_a——最高水位为a米，$0\leqslant a<\infty$；$\Omega=\{\omega_a:\ 0\leqslant a<\infty\}$。

基本事件是事件中的一种，一般的事件总是由许多基本事件组成的。因而是Ω的一个子集。譬如说，在例3中，事件A：“最高水位不超过8米”。它是许多基本事件ω_a（$0\leqslant a\leqslant 8$）构成的，称为复合事件。显然，$A=\{\omega_a:\ 0\leqslant a\leqslant 8\}$，它是$\Omega$的子集合，即$A\subset\Omega$（如图1-1所示）。

事件可以是数量性质的，即试验结果可直接由测量或计算而得，如荷载值、材料强度、江河水位及降雨量等；也可以是属性性质的，如产品抽样中的“合格”或“不合格”，药物疗效中的“有效”或“无效”等。有时为了研究的方便，常予以数值化，如令“合格”为1，而“不合格”为0。

从上面几个例子，可以看出，事件确实广泛存在于自然现象中，而且对它们的研究是非常必要的。例如，对江河最高水位的研究，将有利于桥梁、水坝等工程的设计，对电话

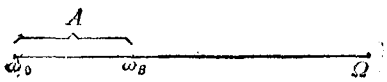
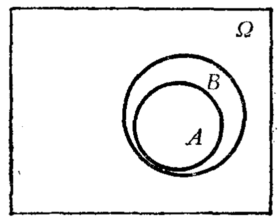


图 1-1



$A \subset B$

图 1-2

交唤台接到呼唤次数的研究，将有助于应该设置多少条线路等等。

二、事件间的关系和运算

在同一随机试验中，往往需要同时研究几个事件，以及它们间的联系。为此，我们引进事件间的一些重要关系和运算，以下的A、B、C、A_i、B_i都表示事件。

（1）特款：如果事件A发生，事件B一定发生，则称A是B的特款（如图1-2），记为

$$A \subset B \text{或} B \supset A$$

例如，“某河最高水位为 5 米”$\subset$“某河最高水位不超过 7 米”。

（2）事件的等价：如果$A \subset B$，$B \subset A$同时成立，则称A与B等价，记为

$$A = B$$

例如，E——掷骰子；ω_i——“出现 i 点”，$i = 1, 2, \cdots\cdots, 6$，则“出现偶数点”$=\{$出现$\omega_2$或$\omega_4$或$\omega_6\}$。

在概率论的讨论中，彼此等价的事件可彼此替换。事实上，它们所含的基本事件完全相同，因而彼此全等。

（3）事件的和：“A、B至少有一件发生”也是一事件，称为A与B的和，或称为A与B的并（如图1-3），记为

$$A + B \text{或} A \cup B$$

例如，“接到的呼唤次数不超过 1 次”=“没有接到呼唤”$\cup$“接到一次呼唤”。

一般地推广到可列个的情形，如果A发生，等价于A_1，A_2，……，A_n，……中至少有一件发生，则称A为A_1，A_2，……，A_n，……的和（或并），记为

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

例如，A_n表示“在一段时间τ内，某分子受到n次碰撞”，而A表示“在时间τ内受到碰撞”，则有

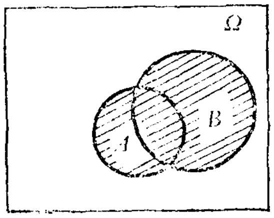
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

（4）事件的积：“A与B同时发生”也是一事件，称为A与B的积（或交）（如图1-4），记为AB，或$A \cap B$。

例如，A =“呼唤次数为偶数”，B =“呼唤次数不超过 3 次”，则

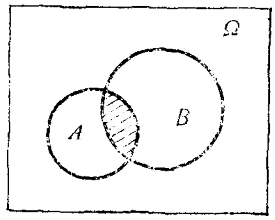
$$AB = \text{“呼唤次数为 2 次”}$$

同理，可定义事件序列A_1，A_2，……，A_n，……的积（或交），记作$A_1A_2A_3$……或$A_1 \cap A_2 \cap A_3$……，简记为$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。



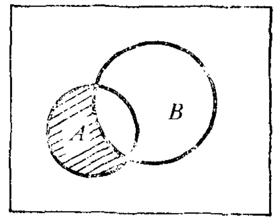
$A\cup B$

图 1-3



AB

图 1-4



$A-B$

图 1-5

（5）互不相容事件：如果A，B不可能同时发生，即$AB=\phi$，则称A与B为互不相容事件。

例如，“在一分钟内接到1次呼唤”和“在一分钟内接到2次呼唤”就为互不相容事件。

（6）事件的差："A发生而B不发生"也是一事件，称为A与B的差如图1-5，记作$A-B$。

例如，掷骰子的试验中，设$A=$“出现偶数点”，$B=$“出现4点”，则

$$A-B=\{\omega_2,\ \omega_6\}$$

（7）对立事件：如果A与B互不相容，但必定发生一件，即

$$AB=\phi,\ A+B=\Omega$$

则称A与B为对立事件。一般地记A的对立事件为$\bar{A}$。

（8）如果$A=B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n$，且$B_i$与$B_j$（$i\neq j$）两两不相容，则称$A$可划分为特款$B_1$，$B_2$，……，$B_n$之和（或并）。

（9）完备事件群：如果在每次试验中，事件B_1，B_2，……，B_n中至少有一件发生，即

$$B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n=\Omega$$

则称“$B_1,B_2,\cdots\cdots,B_n$构成一个完备事件群”。以后对我们特别重要的是“两两互不相容事件的完备群”。

十分明显，任意两个对立事件构成一个完备群，而且是互不相容的。

对上面事件间的种种关系和运算的规定，我们不难发现，它们与集合的关系和运算是完全相同的。例如B是A的特款（$B\subset A$），相当于集合论中集B为集A的子集（$B\subset A$）；事件A，B同时发生（$A\cap B$），相当于集A与集B之交（$A\cap B$），不可能事件及必然事件分别与空集ϕ及全集Ω一致。于是对事件的讨论就可完全用集合论的观点来进行讨论。

三、概率

我们知道随机事件有其不确定性的一面，即它在一次试验中，可能发生也可能不发生，但在多次试验或长期的观察中，即在大量现象中，人们还是可以发现其中的规律性的，为了说明这一点，我们来看下面的例子。

例4 检查大批的产品，当被检查的产品长度介于13.60cm到13.90cm内时，则产品为合格品，否则为次品。我们分别抽取5件、10件、60件、150件、600件、900件、1200件、1800件来检查，情况如表1-1和图1-6所示。

$$合格频率=\frac{合格数}{抽取件数}$$

虽然抽出的产品中，合格数目是随机的，然而随着抽查件数的增多，合格频率越来越趋于

一个稳定值0.9。

表 1-1

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格产品数	5	7	53	131	548	820	1001	1631
合格频率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

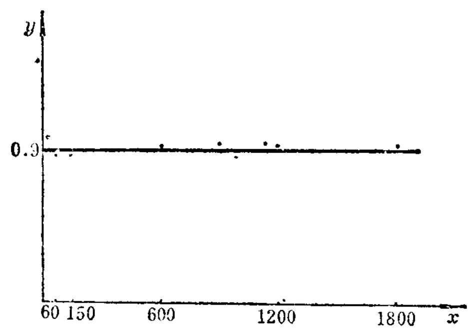


图 1-6

例5 抛掷硬币的试验中，设 n ——抛掷的次数； r ——出现正面的次数； r/n ——出现正面的频率，结果如表1-2。

表 1-2

实验者	n	r	r/n
蒲　丰	4040	2048	0.5080
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

由上述二例看出，随着次数的增多，频率越清楚地呈现出稳定性，而且不论谁去进行这样的试验，只要试验是在相同条件下进行的，这种频率的稳定性就不会因人而改变。近代，人们还在微机上用随机数来模拟旋转硬币的试验，当旋转着的硬币静止后，正面出现用字母“F”表示，反面出现用字母“B”表示，现将运算程序及模拟旋转200次的两个试验结果给出如下：

```
10  INPUT N
15  PRINT
17  F = 0
18  B = 0
20  FOR I = 1  TO  N
30  IF RND(I)<.5 GOTO 60
40  PRINT "F";
42  F = F + 1
50  GOTO 70
60  PRINT "B";
62  B = B + 1
```

```
70  NEXT I
71  PRINT
72  PRINT "F="; F;  "B="; B
99  END
RUN
? 200
BFFFBBBFBBBBFFFBFBBFBFBFFFFBBFFBBBFBFBFBBFF
FBFBFBFFFBFFFBBFBFFBFFBBFFFFFBBBFBFBBBBFBBB
BBBFFBFFFBFBBFBBFFFBBFBFFFFBFFFFFBFBBBFBFFF
BBFBFFBBFBBBFBBFFFBFBFFBFBBFFFBFFBBFBBBBBFB
BFFFFBBFFFFBBFBFBFFBFFFFBBBF
F=104                B=96
RUN
? 200
BBBBFBFBFBBBBFFBBFBFFFFBFBFFBFBBFFBFBBBFBFF
FFBBBFFFBFFBBFFBFFFFBFBFFBFBBFBFBFBBBFFBBBB
FBBBFFFBBBBBFBBBBFFFBFBBBFBFBFFFBFFFBBBFFB
FFBBFFBBBBFFBFFFBFBFFBBFBFFFFBFFBBFFFFFBFBB
FFFBBFBBFFFFBBBFFFBFBBFBFFBBF
F=102                B=98
```

显见出现F或B的次数是随机的，但频率各接近一半。这都说明事件发生的可能性的大小，是事件本身固有的属性。事件的这种属性正是可以对事件发生的可能性大小进行度量的客观基础，因此，我们可以用一个实数$P(A)$来作为事件A发生的可能性大小的数值表征。

如果把必然事件Ω和不可能事件ϕ作为随机事件的两个极端情形，那么$P(\Omega)$应该最大，$P(\phi)$应该最小，若规定$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$，则对任一事件A应有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

我们称这样的实数$P(A)$为事件A的概率。

今后，对事件A，B，C等的概率相应地以$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$来表示。

由于我们将事件与集合间建立了完全对应的关系，于是对事件的讨论就可用集合论的观点来进行讨论，而事件的概率，实际上就是一个满足某些条件的非负的集合函数，这就启示我们从测度论的观点来建立研究随机现象的一般概型。亦即所谓概率场的理论，这将在§1.4中予以讨论。为了建立一般概型，先在下两节讨论两种特殊的概型（即古典型和几何型），它们在实际应用中也是非常重要的。

§1.2 古 典 概 型

现在我们讨论一类既简单又常见的随机概型。

例如，设有标号为1，2，……，n的n个同样的球置于袋中，从中任取一个，因此，每个球被取出的可能性大小应该是相同的，以ω_i表示“取得第i个球”，则共有n个不同

的基本事件：ω_1，ω_2，……，ω_n，其它事件都是由其中的某些基本事件组成的。

关于这类随机试验，在数学上归结成所谓的古典概型，其满足：

（1）只有有限个基本事件：ω_1，ω_2，……，ω_n，其全体记作$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\cdots,\omega_n\}$；

（2）基本事件出现的可能性相等。

这里不难验证上例属于古典概型的问题。

对于古典概型的问题，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\cdots,\omega_n\}$，由于每一个事件$A$总可看成由某些基本事件组成的，而且每个基本事件出现的可能性又相等，于是事件A的概率$P(A)$可定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

k——组成事件A的基本事件的个数（或称为有利于A的基本事件的个数）。

不可能事件ϕ的概率定义为

$$P(\phi)=0$$

在上例中，如果设$n=100$，则

$A=\{$取得偶数号球$\}=\{\omega_2,\omega_4,\cdots\cdots,\omega_{100}\}$

$$P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

$B=\{$取得号数不大于10的球$\}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\cdots,\omega_{10}\}$

$$P(B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

$C=\{$取得号数为3的倍数的球$\}=\{\omega_3,\omega_6,\cdots\cdots,\omega_{99}\}$

$$P(C)=\frac{33}{100}$$

根据上述古典概型的定义，不难得出下列性质：

定理1 古典概型有：

（1）对任意事件A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）$P(\Omega)=1$；

（3）$P(\phi)=0$；

（4）A的对立事件$\bar{A}$的概率

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{1-1}$$

定理2（加法定理） 两事件A与B的和的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-2}$$

证明：设基本事件完备群$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，……，$\{\omega_n\}$，用点表示基本事件(如图1-7)。

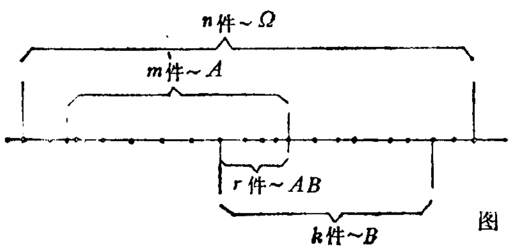


图 1-7

其中m件有利于A，k件有利于B，r件有利于AB，显然，$r \leqslant k$，$r \leqslant m$。由图可以直接看出

$$P(A+B)=\frac{m+k-r}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{r}{n}$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别，当A与B互不相容，即$AB=\phi$时得

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-3}$$

一般地，当A_1，A_2，……，A_n是n个两两互不相容的事件时，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)$$

即

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-4}$$

这是最常用的公式之一。

例1 设N件产品中有M件次品，由此N件产品中任意取出n件，求在取出的n件中恰好有m件次品的事件A的概率。

解 在此题中，“任意”一词表示取得任何n件产品都是等可能的，而所有等可能的试验结果（基本事件）的总数为C_N^n，有利于A的数目可这样来计算：m件次品有C_M^m种不同的取法，次品取定后，$(n-m)$件合格品的取法有C_{N-M}^{n-m}种，因此，有利于A的基本事件数为$C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$，则所求概率为

$$P(A)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

例2 36件产品中有4件次品，现从中任意取出三件产品，求至少有一件次品的概率。

解 设 A_1——“恰好取出一件次品”；

A_2——“恰好取出二件次品”；

A_3——“恰好取出三件次品”；

A——“至少取出一件次品”。

显然，A_1，A_2，A_3为互不相容事件，且

$$A=A_1+A_2+A_3$$

利用上面的结果，可知

$$P(A_1)=\frac{C_4^1C_{32}^2}{C_{36}^3}=\frac{16\times 31}{3\times 35\times 17}=0.2778$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2C_{32}^1}{C_{36}^3}=\frac{3\times 16}{3\times 35\times 17}=0.0269$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^3C_{32}^0}{C_{36}^3}=\frac{1}{3\times 35\times 17}=0.0006$$

于是，由加法定理得

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.3053$$

另一解法：令$\overline{A}$——“未取得次品”，则

$$P(\overline{A})=\frac{C_4^0C_{32}^3}{C_{36}^3}=\frac{32\times 31\times 30}{36\times 35\times 34}=\frac{248}{357}$$

$$\therefore\quad P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{109}{357}=0.3053$$

例3 有n个人，每个人都以同样的概率$\frac{1}{N}$被分配在N（$n\leqslant N$）间房的每一间中，试求下列各事件的概率。

A——“某指定的n间房中各有一人”；

B——“恰有n间房，其中各有一人”；

C——“某指定房中恰有m（$m\leqslant n$）人”。

解 对n人中的每一人来说，可安排在N间房的任一间，即有N种安排法，而将n人联合起来的所有可能的安排法（基本事件的总数）应为N^n种。

今固定某n间房，第一人可分配到其中的任一间，故有n种分法，第二人可分配到余下的$n-1$间中的任一间，故有$n-1$种分法，……，因而有利于事件A的分法共有$n!$种，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

如果这n间房可自N间中任意选出，则有利于事件B的分法为$C_N^n\times n!$种，于是

$$P(B)=\frac{C_N^n\times n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

事件C中的m个人可从n个人中任意选出，共有C_n^m种选法，其余$n-m$个人可以分配到剩余的$N-1$间房里，共有$(N-1)^{n-m}$种分配法，因而有利于事件C的分法为$C_N^m\times(N-1)^{n-m}$种，于是

$$P(C)=\frac{C_n^m\times(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\times\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}$$

例4 用4个螺栓将牛腿连于钢柱上来承受拉力，现有50个螺栓，已知其中混有5个强度较弱的，如取的4个螺栓中，有2个或2个以上是强度较弱的，则牛腿承载力不够，问取出的4个螺栓使牛腿有足够承载力的概率是多少？

解 设A——“牛腿有足够的承载力”

B_i——“取的4个螺栓中恰有i个强度较弱”（$i=0,1$）

显然，B_0，B_1为互不相容事件，且$A=B_0+B_1$，又因从50个螺栓中任取4个的取法共有C_{50}^4种（基本事件的总数），其中，有利于B_0的取法为$C_{45}^4\cdot C_5^0$种，有利于B_1的取法为$C_{45}^3C_5^1$种，则牛腿有足够承载力的概率为

$$P(A)=P(B_0+B_1)=P(B_0)+P(B_1)$$

$$=\frac{C_{45}^4C_5^0}{C_{50}^4}+\frac{C_{45}^3C_5^1}{C_{50}^4}=0.955$$

例5 某建筑工地进来300根钢筋，其中有7根为次品，浇注混凝土梁，每根梁用三根受力筋，试求：1）梁中受力筋均为次品的概率；2）梁中至少有一根钢筋为次品的概率。

解 （1）设A——“梁中的三根钢筋均为次品”，因从300根钢筋中任选3根的选法共有C_{300}^3种，而有利于A的选法有C_7^3种，则梁中受力筋均为次品的概率为

$$P(A)=\frac{C_7^3}{C_{300}^3}=\frac{7\times6\times5}{300\times299\times298}=7.856\times10^{-6}$$

可见同一梁中的钢筋全为次品的事件几乎是不可能发生的事件。

（2）设B——“梁中至少有一根钢筋为次品”

$\overline{B}$——“梁中的钢筋都不为次品”

则所求事件的概率为

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{300-7}^{3}}{C_{300}^{3}}$$

$$=1-\frac{293\times292\times291}{300\times299\times298}=1-0.9314=0.0686$$

§1.3 几何概型

前节中讲的古典概型是有局限性的，它实际上假定了试验的基本事件只有有限个。今介绍一种新的概型，基本事件为无穷多个，但具有某种等可能性。这需用几何的方法来处理。

例如，如果在一个5万平方公里的海里，有表面积达40平方公里的大陆架贮藏着石油，任选一点钻探，问钻到石油的概率是多少？

显然，这个问题中的基本事件（点）有无穷多个，而其中的任选一点意味着每点被选中的可能性相等。钻到石油的概率自然认为与贮油海域的面积成正比，即为40/50000。

一般地，若向平面上某区域Ω任意掷一点M，求M点落在Ω内的一部分区域A上的概率（图1-8）。

如果所掷的点M在Ω中是均匀分布的，则称这一随机试验（掷点）是几何型的。所谓点M在Ω中均匀分布，是指点M落在Ω中的任一部分的概率只与这部分的面积成正比，而与其位置和形状无关，于是“M点落在A中”的概率自然可定义为

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}} \qquad (1\text{-}5)$$

图 1-8

更一般地，假设试验的基本事件有无穷多个，但可用某种数量特征（如长度、面积、体积等）来表示其总和，记为$\mu(\Omega)$，并且其中的一部分，即组成随机事件A的那部分的基本事件数也可用同样的数量特征来表示，记为$\mu(A)$，则事件A的概率可定义为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad (1\text{-}6)$$

例1　（约会问题）　两种有毒微生物在任何相等的时段T中进入某一特定水体内是等可能的，它们在水体中的寿命均为t，现在，对这一水体进行分析，如果两种微生物同时存在，就认为水体受到污染，求在时段T内水体被认为污染的概率。

解　设x，y分别表示第一种有毒生物和第二种有毒生物进入水体的时刻，由已知条件，可认为x，y的取值范围均为$[0,T]$，即

$$0\leqslant x\leqslant T,\quad 0\leqslant y\leqslant T$$

满足此不等式组的点(x,y)就构成边长为T的正方形Ω。如图1-9。由题意知水体受到污