W. 哈克布思 著

多重网格方法

科学出版社

多重网格方法

W. 哈克布思 著

科 学 出 版 社

1 9 8 8

内 容 简 介

多重网格方法是近十年才发展起来的求解代数方程的新方法．它把求解方程所需的计算量降到最低数量级，这是科学计算上的巨大进步．本书论述了方法的基本思想，理论分析以及在具体问题上的应用．内容包括：多重网格方法，套迭代技术，迭代的收敛性，非线性网格分析，奇异摄动问题，椭圆型系统，特征值问题和奇异方程组，连续问题，外推和亏量校正技巧，以及算法分析程序和习题．本书将有助于广大科学计算工作者跟踪该学科的发展．

读者对象：高等学校数学系、计算机科学系的师生；以及工程、科学计算、科研人员．

多 重 网 格 方 法

W. 哈克布思 著

责任编辑 林 鹏 刘嘉善

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年9月第一版 开本：787×1092 1/32

1988年9月第一次印刷 印张：10

印数：0001—2,660 字数：222,000

ISBN 7-03-000603-8/O·152

定价：2.80 元

译 者 的 话

多重网格方法已发展成为求解工程问题的一个重要的数值手段. 许多人都已听到这个方法的名字,但不一定了解它. 因此,1985 年我们特邀了这个领域中的开拓者,联邦德国的 Hackbusch 教授,来西安为数值分析讲习班作系统的演讲. 这系统演讲包括了多重网格方法的机理、效能、理论、算法以及在应用领域中的实现问题.

多重网格方法可用于流体动力学和结构力学问题以及高度非线性的半导体器件模拟方程. 多重网格方法使得 Navier-Stokes 方程求解速度大大加快. 近年这一技术还应用于求解 Euler 方程. 受这些应用的影响,更为有效的多重网格方法已经研究出来. 将自适应网格加密和有效算法的特点结合起来的多重网格方法软件已问世. 针对不同类型的多处理机,还提出了另外的多重网格方法. 这些最新进展的例子表现了该方法的重要性、灵活性和有效性.

本书是根据 Hackbusch 教授在西安的讲稿,整理翻译,编辑而成的. 由林群、柏兆俊、蔡智强和沈小平整理翻译. 我们相信,本书将有助于我国科学工程界研究人员和高校师生来了解、利用和追踪这一学科的最新进展.

林 群

1987 年 11 月

前　　言

尽管多重网格方法在六十年代初就提出来了，但是直到七十年代中期才认识到，这是一种行之有效的方法，有着广泛的应用．过去的十年，此方法的论文数目迅速增长，其结果是，当今要获得多重网格方法的信息，便面临着大批分散在各种期刊和会议录上的论文．

本专著的目的是论述多重网格方法的基本概念，不同的读者也许对本书的不同部分感兴趣．第一部分主要讨论算法，其对象是那些对于多重网格方法的理论及其实现感兴趣的读者．第二部分的数学分析是特别为数学家而写的．对该理论在工程技术中的应用感兴趣的读者可以发现许多章节是关于多重网格方法的特殊应用和附加技巧，特别是在流体动力学方面的应用．其中有专门一章用来论述解积分方程的多重网格方法，文献中对于这一课题尚无足够的重视．

W.哈克布思

目　　录

1. 预 备 知 识

1.1 引　　言

在几乎所有的物理和工程科学领域中，边值问题的数值求解是必不可少的. 近年的发展(诸如三维问题的研究)导致了方程个数越来越多的方程组. 尽管计算机的计算速度更快了,而且出现了向量机,我们仍然需要引进新的数值方法. 六十年代后期，快速 Poisson 解法的发展在此方向上迈进了一步. 那时似乎离散的椭圆型问题越简单，就存在越快的数值方法. 初期的多重网格法也是用在 Poisson 方程上表明其效率与直接法相似. 但是,不同于其它数值方法,当要求解更加复杂的问题时,其有效性并不丧失.

多重网格迭代的特点是其快速收敛性. 当离散化更加精细时,收敛速度并不变慢,而经典的迭代方法则是随着网格步长的减小而变慢. 其结果是，用多重网格法处理离散问题可得到一个可接受的解,尽管计算量和未知量的个数(即等于方程组的方程个数)成正比. 这时不仅复杂度具有最佳的阶,而且正比例常数相当小，以致其它方法很难与多重网格法的效率相媲美.

上述特点并不意味着,存在一个固定的多重网格算法,适用于所有边值问题，只能说存在多重网格技巧的固定算法框架. 多重网格算法的效率依赖于其各分量相对所求解问题的适应程度. 因此，本书的任务是描述基本框架和不同的多重网格分量的选取.

本书分为五个部分：

第 I 部分（§§2—5）：线性多重网格算法；

第 II 部分（§§6—8）：收敛性分析；

第 III 部分（§§9—12）：特殊的多重网格应用；

第 IV 部分（§§13—15）：附加技巧；

第 V 部分（§§15）：对积分方程的应用.

第 I 部分介绍出多重网格算法的基本概念，几乎没有理论分析. 只是在 §2 中，为了理解多重网格迭代的特性，我们较详细地分析了一维问题.

一般地认为，多重网格算法仅基于直观的考虑，与此不同，第 II 部分则介绍全面的收敛性分析.

第 III 部分论述多重网格算法对于更一般的椭圆型问题的应用. 那里，读者可看到对于非线性问题、对流扩散方程和重要的 Stokes, Navier-Stokes 方程的应用.

第 IV 部分，引进某些数值技巧，并自然地把它们和多重网格求解过程结合起来，提高运算效率.

最后是介绍多重网格算法对积分方程的应用. 如第 V 部分所述，特别快速的第二类多重网格迭代不仅仅可用于普通的积分方程，而且可用于更一般的第二类方程.

1.2 记　　号

在每一小节中，公式分别加以编号. 例如，3.1 小节的第十个公式记为 (3.1.10). 在同一小节中，我们称此公式为 (10)，而在第 3 章的其它部分则记为 (1.10)，在第 3 章之外则用完全的记号(3.1.10).

下面我们列出在本书中有特殊意义的记号

$a, a(\cdot,\cdot)$　　半双线性形式

$\mathbf{C}$	复数集合
C, C_0, C_1, 等	一般常数
$C^t(\Omega)$	Hölder 空间
d	Ω 的维数
f, f_l	右端项
$\mathscr{F}_l$	右端函数的线性空间
$\mathscr{F}_l(\rho)$	见 §9.5.1
h_l	l 层的离散化参数(网格步长)
$\mathscr{H}, \mathscr{H}^1$	Hilbert 空间
$\mathscr{H}^s$	见 §6.3.1.1
$\mathscr{H}_l$	$\mathscr{H}$ 的有限元子空间
$H^k(\Omega), H_0^k(\Omega), H^s(\Omega)$, 等	Sobolev 空间
I	恒等映照,恒等矩阵
l	层数
L, L_Ω, L_Γ	相应于边值问题的算子
L_l	线性方程组的矩阵
$L_l, L_l(v_l)$	$\mathscr{L}_l$ (在 v_l) 的 Jacobi 阵
$\mathscr{L}_l, \mathscr{L}_l(u_l)$	l 层的非线性算子
m	$2m$ 是微分算子的阶
$M_l, M_l', M_l(\nu_1, \nu_2)$ 等	迭代矩阵（在二重和多重网格迭代中出现）
$\mathbf{N}$	自然数集合
N_l	见 § 1.3.1
$\mathscr{N}_l, \mathscr{N}_l(\lambda), \mathscr{N}_l^*$, 等	特征空间
n_l	l 层的变量个数
0	零矩阵
$O(\cdot), o(\cdot)$	Landau 符号
p	由 $l-1$ 层到 l 层的延拓

$\tilde{p}$	见 § 5.1
P_l	延拓 $P_l:\mathscr{U}_l \to \mathscr{H}_l$ 在有限元情形
$\hat{P}_l$	见 § 3.6
r	限制 $r:\mathscr{F}_l \to \mathscr{F}_{l-1}$
$\tilde{r}$	限制 $\tilde{r}:\mathscr{U}_l \to \mathscr{U}_{l-1}$
$r_{l,ni}$	平凡单射
R	实数集合
R_l	限制 $R_l:\mathscr{H}' \to \mathscr{F}_l$;
$\hat{R}_l$	见 § 3.6
$\tilde{R}_l$	限制 $\tilde{R}_l:\mathscr{U} \to \mathscr{U}_l$
$\mathscr{S}_l, \mathscr{S}_l^{(\nu)}, \mathscr{S}_l^{\nu}$	线性或非线性光滑方法
S_l	$\mathscr{S}_l$ 的迭代矩阵
s_F, s_U	见 (6.2.7)
T_l	见 § 2.2
$\mathscr{T}_l$	有限元三角剖分
u_l	离散解
$\tilde{u}_l$	u_l 的逼近
u_l^i	第 i 次迭代
$\mathscr{U}_l(\rho)$	见 § 9.5.1
$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$、$\boldsymbol{y}$ 等	$\mathbf{R}^d$ 中空间向量
(x, y)	$\mathbf{R}^2$ 的坐标
Z	整数集合
α	光滑性和逼近性中的指数
γ	粗网格上迭代次数
Γ	Ω 的边界
ζ, ζ_ν	压缩数(即迭代矩阵范数的界)
$\eta(\nu)$	光滑性中的函数

$\eta_0(s)$	(6.2.1)式定义的函数
κ	通常：相容阶
ν	光滑迭代次数
ν_1	前光滑迭代次数
ν_2	后光滑迭代次数
$\rho(A)$	A的谱半径
ρ，ρ_ν	收敛率的界
ρ_B	光滑率
ρ_L	光滑数
$\sigma(A)$	A的谱
ω，ω_l	松弛因子
$\boldsymbol{\omega}$	半迭代方法的迭代因子向量
Ω	边值问题的区域
Ω_l	l层网格
Ω_l^i，Ω_l^r，Ω_l^b	Ω_l 的子集
$(\cdot,\cdot)_{\mathscr{U}}$，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{U}}$	Hilbert 空间$\mathscr{U}$ 中的内积
$(\cdot,\cdot)$	内积，特别，$L^2(\Omega)$ 的内积
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	$\mathscr{U}_l$ 的内积
$\|\cdot\|_{\mathscr{U}}$，$\|\cdot\|_{\mathscr{F}}$	分别为 $\mathscr{U}_l$，$\mathscr{F}_l$ 的范数
$\lvert\cdot\rvert_0$	$\mathscr{U}_l$ 和 $\mathscr{F}_l$ 的 Euclid 范数
$\lvert\cdot\rvert_s$	Sm 阶的离散 Sobolev 范数
$\|\cdot\|_{\mathscr{F}\leftarrow\mathscr{U}}$，$\|\cdot\|_{\mathscr{U}\leftarrow\mathscr{U}}$，等	相应于$\|\cdot\|_{\mathscr{U}}$和$\|\cdot\|_{\mathscr{F}}$ 的矩阵范数
$\|\cdot\|_{s\leftarrow t}$	相应于$\lvert\cdot\rvert_s$和 $\lvert\cdot\rvert_t$ 的矩阵范数
$\|\cdot\|$	谱范数（$\|\cdot\| = \lvert\cdot\rvert_{0\leftarrow 0}$）

1.3 线性代数的一些基础

为完备起见，本节给出线性代数中的一些记号、定义和结

论．在第一小节，我们回顾了线性迭代的一些结果，以及范数、矩阵范数和内积的定义．

1.3.1 迭代过程分析

设 $\mathscr{U}_l$ 是一个 n_l 维向量空间，考虑具有 n_l 个线性方程的方程组：

$$L_l u_l = f_l \qquad (u_l, f_l \in \mathscr{U}_l) \tag{1.3.1}$$

求解方程(1)的迭代过程是由某个线性变换 $\mathscr{S}_l$:

$$u_l^{j+1} = \mathscr{S}_l\,(u_l^j, f)$$

产生一列逼近 $u_l^0 \longmapsto u_l^1 \longmapsto \cdots \longmapsto u_l^j \longmapsto \cdots$． 多重网格迭代以及熟悉的经典迭代都属于这种形式． 因为 $\mathscr{S}_l$ 是线性的，它可表示为 $\mathscr{S}_l(u_l, f_l) = M_l u_l + N_l f_l$，因此迭代过程成为：

$$u_l^{j+1} = M_l u_l^j + N_l f_l, \tag{1.3.2}$$

M_l 称为迭代矩阵．第 j 次迭代 u_l^j 可以表示为：

$$u_l^j = M_l^j u_l^0 + N_l^{(j)} f_l, \quad N_l^{(j)} = \sum_{k=0}^{j-1} M_l^k N_l. \tag{1.3.3}$$

迭代(2)的一个明显的条件是，(1)的解是(2)的不动点：

$$u_l = M_l u_l + N_l f_l \qquad (u_l \text{ 是(1)的解})． \tag{1.3.4}$$

假设(4)对所有 $f_l \in \mathscr{U}_l$ 成立，那么

$$I = M_l + N_l L_l \tag{1.3.5}$$

(I 总是表示恒等矩阵)．当 L_l 非奇异时，方程(5)可以导出 N_l 的表示式：

$$N_l = (I - M_l) L_l^{-1}. \tag{1.3.6}$$

因此，迭代过程完全可用它的迭代矩阵 M_l 来描述．

$u_l^j - u_l$ 是第 j 次迭代的误差．由(2)和(3)得到：

$$u_l^{j+1} - u_l = M_l(u_l^j - u_l), \quad (\text{其中 } u_l \text{ 是(1)的解}) \tag{1.3.7a}$$

$$u_l^j - u_l = M_l^j (u_l^0 - u_l). \tag{1.3.7b}$$