七·二一工人大学教材

数　　学

江苏省七·二一工人大学《数学》教材编写组

内 容 简 介

本书分上、下两篇。上篇讲初等数学与平面解析几何，下篇讲微积分与微分方程初步。每节配有习题，篇末有习题答案。附录为选学内容，包括二进制数简介、复数、对数计算尺、优选法简介。

本书适宜七·二一工人大学机械类专业作为教材，其他专业也可选用。

编者的话

为了贯彻落实伟大领袖和导师毛主席的“七·二一指示”，进一步办好七·二一工人大学，我们遵照省有关部门的指示，编写了这本《数学》教材。

在编写中，我们学习马、列和毛主席有关教育革命的论述，坚持开门编书，到许多地、市进行调查研究，听取工人大学师生的要求和建议，并吸取各地编写教材的成功经验，以求编好这本教材。

在教材中，我们注意既讲清基础理论，也考虑工人大学的教学特点；努力贯彻辩证唯物主义思想，联系生产实践，突出重点，便于自学。

这本教材的编写，得到了全省许多单位的协助和支持，在此一并表示感谢。

本书由江苏师范学院、苏州市商业局七·二一工人大学、苏州试验仪器厂、苏州东方化工厂、苏州市第二十四中学、第三十六中学等单位共同编写。由于时间仓促，书中可能存在缺点和错误，希望广大工人、学员和教师批评指正。

一九七七年四月

目　录

上　篇

下　篇

附录（选学内容）

［注］ 目录中标有**号者可作选学内容

上　篇

第一章　代数式和方程

第一节　用字母表示数

一、用字母表示数的意义

在生产实践和日常生活中，人们不仅要了解事物的具体数量，而且要研究数量之间的相互关系。例如，人们通过长期实践，总结出长方形面积计算的一般公式：

$$长方形面积=长\times宽.$$

这个公式揭示了长方形的面积与其长和宽的相互关系。然而这种式子的表达形式有时还不方便，因此人们创造了用字母代表面积、长和宽等的方法。例如，用字母S表示长方形的面积，a表示它的长，b表示它的宽，则上面的公式可以简单地写作

$$S=a\times b.$$

字母和字母相乘，或者数字和字母相乘，乘号“×”一般记为“·”，甚至可以省略不写。如$a\times b$可以记为$a\cdot b$或ab；又如$4\times a$可以记为$4\cdot a$或$4a$。至于$a\times 4$，通常记为$4a$。

这样，长方形面积公式可以写作：$S=ab$。类似地，三角形的面积计算公式：

$$S=\frac{1}{2}(b\times h)=\frac{1}{2}bh.$$

其中字母S表示三角形的面积，b表示它的底，h表示它的高。

梯形的面积计算公式：

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

其中S表示梯形的面积，a表示它的上底，b表示它的下底，h表示它的高。

如果用字母S表示圆的面积，R表示它的半径，则圆面积公式可以写作

$$S=\pi①\times R\times R.$$

这里出现两个R相乘的情况，即$R\times R$，一般记作R^2。所以，上面的公式可以写作

$$S=\pi R^2.$$

类似地，$a\times a\times a$可以写作a^3。R^2和a^3右上角的数字分别是2和3，指明了相同数相乘的个数叫做“指数”。这里，R^2的指数是2，a^3的指数是3。单独一个字母a的指数是1，即a就是a^1，指数1通常省略不写。

字母代表数的应用很广，下面再举一些例子。

① $\pi=3.14159\cdots\cdots$

我们知道　　　　　　距离 = 速度 × 时间，

$$电流强度 = \frac{电压}{电阻}.$$

如果用字母 s 表示距离，v 表示速度，t 表示时间；用字母 I 表示电流强度，U 表示电压，R 表示电阻．则有

$$s = vt,$$

$$I = \frac{U}{R}.$$

除了用英文字母表示数外，有时也用希腊字母 α、β、γ、……等表示数．

例 1　把"长方形的周长等于长与宽的和的两倍"这句话用数学式子来表达．

解　用字母 l 表示长方形的周长，a 表示它的长，b 表示它的宽，则有

$$l = 2(a + b).$$

例 2　弹簧每圈平均拉伸的计算规律是：

$$每圈平均拉伸 = \frac{拉伸后的长度 - 原来的长度}{圈数},$$

现在要求用字母表示它．

解　用字母 l 表示弹簧的每圈平均拉伸，H 表示拉伸后的长度（图1—1），h 表示原来的长度，n 表示圈数，则有

$$l = \frac{H - h}{n}.$$

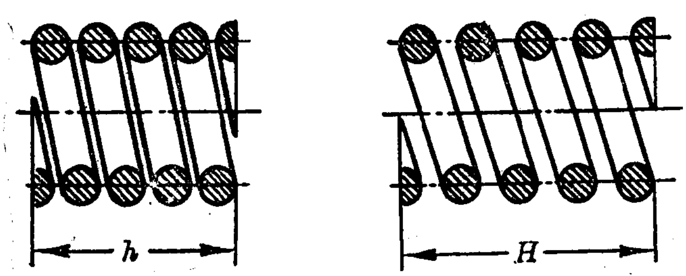


图 1—1

从前面的叙述可以看出，采用字母表示数，可以用含字母的算式简单、明确、普遍地表达某一类问题的一般数量关系，这样就给我们认识和揭示客观事物的规律性带来很大的方便．

二、用字母表示数的运算规律

我们知道，数的运算有交换律、结合律、分配律等性质．过去这些性质是用语言来叙述的．例如加法交换律：

任何两个数相加，交换加数和被加数的位置，它们的和不变．

现在用字母 a、b 表示任何两个数，那么加法交换律就可以表示为

$$a + b = b + a.$$

类似地，把数的运算律列表如下：

运　算　律	用字母表示	例
加法交换律	$a+b=b+a$	$3+4=4+3$
加法结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+3)+4=2+(3+4)$
乘法交换律	$ab=ba$	$2\times3=3\times2$
乘法结合律	$(ab)c=a(bc)$	$(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$
分　配　律	$a(b+c)=ab+ac$	$2\times(3+4)=2\times3+2\times4$

用字母表示数，把语言叙述的内容用简单的数学式子表示出来，这是很重要的。但有时也要求能用恰当的语言解释数学式子所表示的实际意义。例如，$\frac{a}{b}$表示一个任意分数，c表示一个不为零的任意数，根据分数的性质，下列关系式成立：

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc},\quad \frac{a}{b}=\frac{a\div c}{b\div c}.$$

如果用语言解释，上面两个式子的含意是“分数的分子、分母同时乘以（或除以）一个不为零的数时，分数的值不变”。

例 3　用语言叙述下面的数学式子：

(1) $2a+1$；　　(2) $3(a-b)$；　　(3) $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b$。

解　(1) a 的 2 倍与 1 的和；

(2) a 与 b 的差的 3 倍；

(3) a 的$\frac{1}{2}$与 b 的$\frac{1}{3}$的和。

例 4　某厂有煤m公斤，过去每天用煤n公斤，经技术革新后，每天用煤比原来节约 50 公斤，问技术革新后m公斤煤能用多少天？

解　用字母x表示用煤天数，则有

$$x=\frac{m}{n-50}\ (天).$$

习　题 1—1

1. 用数学式子表示下列各题的内容：

(1) 长方体的体积等于它的长、宽和高的乘积；

(2) 一数与 6 的和等于 15 与这数的差；

(3) 两数之和与这两数之差的乘积。

2. 用语言叙述下列数学式子的意义：

(1) $2(a+b)$；　　(2) $3a-2b$；

(3) $ab=ba$；　　(4) $3x=x+6$。

3. 某机床厂每天生产 a 台车床，b 台刨床，m 天生产车床和刨床总共多少台？

4. 车削L长的工件时，若车刀的走刀量（工件转一转，车刀在工件上移动的距离）为S，工件每分钟转n转，求走刀一次所需时间T（单位是分）的计算公式。

5. 某工厂有机床m台，每台每天加工零件n件。经技术革新后，每台机床比原来每天多加工15件。问加工1000个零件在技术革新后需要多少天完成？

第二节　代数式及代数式的值

一、代　数　式

上面我们遇到了许多数学式子：

(1) ab，$\frac{1}{2}bh$，$\frac{1}{2}(a+b)h$，πR^2，……；

(2) $\frac{U}{R}$，$\frac{H-h}{n}$，$\frac{m}{n-50}$，……。

它们有着共同的特征，都是用运算符号把字母或数字连接起来的，象这样的式子叫做代数式。

上面这些代数式中，字母间只是涉及加、减、乘、除等运算。其中分母不含有字母的代数式叫做整式，如(1)中的各式都是整式；分母含有字母的代数式叫做分式，如(2)中各式都是分式。

只有乘除运算，而没有加减运算的整式，叫做单项式，如ab，$\frac{1}{2}bh$，πR^2，$-3xy$等都是单项式，其中的数字（连同它前面的符号）叫做系数。例如$\frac{1}{2}bh$的系数是$\frac{1}{2}$，$-3xy$的系数是-3。当系数是1或-1时，可把“1”省略不写。如$1ab$就写成ab；$-1x^2$就写成$-x^2$。

至于$2+x$，$a-b$，$1-3x+x^2$等式子，它们是由几个单项式组成的，叫做多项式。例如$2+x$，它是由两个单项式“2”与“x”组成，同时字母x的指数是1，所以$2+x$也叫做一次二项式或一次式；再如$1-3x+x^2$，它是由三个单项式“1”、“$-3x$”与“x^2”组成，同时其中x^2项的指数是2，所以$1-3x+x^2$也叫做二次三项式或二次式。

二、代数式的值

代数式是从事物的数量关系中抽象出来的一般概念。当它转过来解决实际问题时，要把具体数值代替字母后再进行计算。例如，三角形面积计算公式是$S=\frac{1}{2}bh$，在实践中遇到的三角形，它的边长和对应的高都是确定的。如三角形的边$b=4$厘米，对应的高$h=3$厘米，那么面积是：

$$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}\times4\times3=6(\text{厘米}^2)①。$$

这种用数值代替代数式中相应的字母，经过计算所得到的结果（数值）叫做代数式的值。

① 厘米^{2}即平方厘米，类似地，毫米^2、米^{2}即平方毫米、平方米。

例 1 根据下面所给x的值，求代数式$3x+2$的值：

(1) $x=1$； (2) $x=-2$；

(3) $x=0$； (4) $x=0.5$。

解 (1) 当$x=1$时， $3x+2=3\times1+2=5$；

(2) 当$x=-2$时，$3x+2=3\times(-2)+2=-4$；

(3) 当$x=0$时，$3x+2=3\times0+2=2$；

(4) 当$x=0.5$时，$3x+2=3\times0.5+2=3.5$。

例 2 当$a=-2$时，求代数式$3a^2-2a+1$的值。

解 当$a=-2$时，$3a^2-2a+1=3\times(-2)^2-2\times(-2)+1=12+4+1=17$。

例 3 当$x=\frac{1}{2}$，$y=1$时，求代数式$x+\frac{y}{3-2xy}$的值。

解 当$x=\frac{1}{2}$，$y=1$时，

$$x+\frac{y}{3-2xy}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3-2\times\frac{1}{2}\times1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

例 4 齿轮是机械传动中的一种基本零件。一个正齿轮，它的外径D是容易测出的，它的齿数Z也可以直接数出。除此以外，一个齿轮还有许多其他重要参数，例如反映齿形大小的模数m、节圆直径（节径）d以及周节t（图 1—2）。这些参数之间有下列关系：

图 1—2

$$m=\frac{D}{z+2},$$

$$d=mz,$$

$$t=\pi m.$$

有了这些关系，参数之间就可以互相换算。

现有一正齿轮，它的外径$D=84$毫米，齿数$z=40$，求它的模数m、节圆直径d及周节t。

解 $\because$① $D=84$，$z=40$，

$$\therefore\quad m=\frac{D}{z+2}=\frac{84}{40+2}=2,$$

$$d=mz=2\times40=80(\text{毫米}),$$

$$t=\pi m\approx3.14\times2②$$

$$=6.28(\text{毫米}).$$

答 这个正齿轮的模数是2，节圆直径是80毫米，周节是6.28毫米。

从这些例子可以看出，代数式的值是根据代数式里的字母所取的值来确定的。一般

---

① 符号“$\because$”读作“因为”，“$\therefore$”读作“所以”。

② 符号“$\approx$”读作“近似等于”，这里就是说π近似等于3.14。

说来，同一个代数式，当它的字母取值不同时，其代数式的值也就不同。当然，代数式里字母的取值应当依据实际需要来确定，而不能使代数式的值失去实际意义。例如，在表示三角形面积的代数式$\frac{1}{2}bh$中，b和h都不能取负数及零；在代数式$\frac{3}{x}$里，x不能取零。

三、合并同类项

在研究代数式的过程中，有时需要把代数式中的一些项进行合并。例如，我们考察正方形周长的计算。

用字母a表示正方形（图1—3）的边长，那么它的周长等于四条边长之和。即

$$a+a+a+a.$$

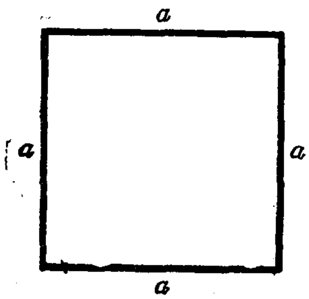


图 1—3

另外，它的周长又可以等于一条边的四倍，即$4a$，所以

$$a+a+a+a=4a.$$

这就是说，只要把代数式中的字母看作和普通的数一样，按照运算规律进行计算，在一定条件下，就能达到化简的要求。例如，

$$4a+6a=(4+6)a=10a;$$

$$3x^2y+5x^2y=(3+5)x^2y=8x^2y.$$

这里，“$4a$”与“$6a$”的字母相同（都是a），只是系数不同；“$3x^2y$”与“$5x^2y$”的字母的组成也相同（都是x^2y），也只是系数不同。这种字母部分组成相同（系数可以不同）的项叫做同类项。从上面的例子可以看到，在一个代数式里，同类项可以合并。合并的方法是：把同类项的系数相加，所得的和作为合并成一项的系数。

例 5 合并$x^3+5x^2-6x+5-3x^2+4x+2$中的同类项。

解 原式$=x^3+(5-3)x^2+(-6+4)x+(5+2)$

$=x^3+2x^2-2x+7.$

例 6 合并$3a^4-8a^2b^2-2ab^3+2a^4+8a^2b^2+6ab^3$中的同类项。

解 原式$=(3+2)a^4+(-8+8)a^2b^2+(-2+6)ab^3=5a^4+4ab^3.$

例 7 当$x=1$，$y=-2$时，计算代数式

$x^4+8x^3y-x^2y^2+xy+5x^4-8x^3y+3x^2y^2+3xy$的值。

解 先把原式化简。

原式$=(1+5)x^4+(8-8)x^3y+(-1+3)x^2y^2+(1+3)xy$

$=6x^4+2x^2y^2+4xy.$

再把$x=1$，$y=-2$代入上式计算，得

原式的值$=6\times1^4+2\times1^2\times(-2)^2+4\times1\times(-2)=6+8-8=6.$

在实际问题中所遇到的代数式有时还带有括号，例如计算图1—4的面积。这是两个长方形和一个梯形所组成的图形，显然，它的面积是：

$$2a+\frac{(a+b)}{2}\times 2+2b$$
$$=2a+(a+b)+2b.$$

上式中出现括号，为了化简这个代数式，首先要去括号，然后再合并同类项。如果括号前是“+”号，那么，去括号时括号内各项的符号不变；如果括号前是“-”号，那么，去括号时括号内各项的符号全部改变。

所以，图 1-4 的面积是：

$$2a+a+b+2b=3a+3b.$$

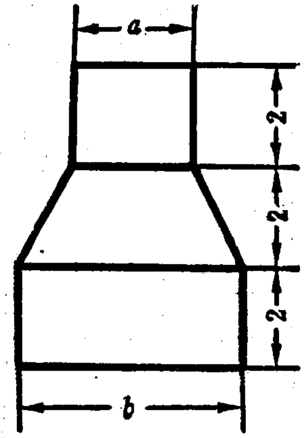


图 1—4

例 8 化简代数式 $x^3+x^2+(x^2-x)+x$。

解 原式 $=x^3+x^2+x^2-x+x$

$=x^3+2x^2$。

例 9 化简代数式 $x^3+[x^2-(1+x^2)]+1$。

解 原式 $=x^3+x^2-(1+x^2)+1$

$=x^3+x^2-1-x^2+1=x^3$。

例 10 当 $x=2$ 时，计算代数式 $x^3-\{3+[x^2-(x-1)]-x^2\}$ 的值。

解 先化简原式。

原式 $=x^3-3-[x^2-(x-1)]+x^2$

$=x^3-3-x^2+(x-1)+x^2$

$=x^3-3-x^2+x-1+x^2$

$=x^3+x-4$。

将 $x=2$ 代入上式，得

原式的值 $=2^3+2-4=6$。

习 题 1—2

1. 指出下列代数式哪些是整式？哪些是分式？哪些是单项式？哪些是多项式(口答)？

$$3a^2b,\quad \frac{ab}{3},\quad \frac{b}{a},\quad 2+x,\quad x-y,$$
$$1+3x+x^2,\quad \frac{1}{x-1},\quad xy+x^2+y^2.$$

2. 指出单项式 ab，$\frac{1}{3}x^2y$，$-xy^2$，πR^2 的系数（口答）.

3. 合并同类项（口答）：

(1) $2a+3b+a-2b$；　　(2) $x^2y+xy^2+2yx^2+3y^2x$；

(3) $2x^2+3y+y^2+x^2-2y^2$；　　(4) $3a^3+5+2b^2-a^3-2b^2-4$。

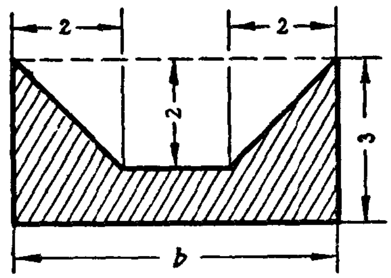
4. 化简下列代数式，并计算当 $x=-2$ 时各代数式的值。

(1) $x^2+(1-2x^2)$；　　(2) $2x^2-(x+x^2)$；

(3) $3x-(x+x^2)+2x^2$；　　(4) $[2x^2-(1+x^2)]+1$；

(5) $(x^2-2x)-[x^2-(1+x)]$；　(6) $\{2x^2+[x^2-(1-x^2)]\}-x^2$。

5. 已知一弹簧被拉伸后的长度 $H=60$ 毫米，原来的长度 $h=45$ 毫米，圈数 $n=75$(圈)，求每圈的平均拉伸 l。



（第 6 题图）

6. 计算左图阴影部分的面积。

7. 有一正齿轮，模数 $m=3$，齿数 $z=24$，求节圆直径 d、外径 D 及周节 t。

8. 一只灯丝电阻为 120 欧姆的灯泡，若通过的电流是 0.3 安培，问灯泡两端的电压是多少？
[提示]：$U=IR$，这里 U、I、R 分别表示电压（伏特）、电流（安培）、电阻（欧姆）。

第三节　代数式的运算

一、正整数幂及其运算法则

1. 正整数幂的意义

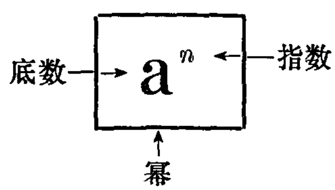
在圆面积计算公式中，出现半径自乘的情况。再如，边长为 a 的正方形面积是 $a\cdot a$，边长为 a 的立方体体积是 $a\cdot a\cdot a$。在第一节中我们曾经指出，相同数连乘可以记作

$$a\cdot a=a^2,$$
$$a\cdot a\cdot a=a^3.$$

一般地，n 个 a 的连乘可以写作

$$\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}=a^n.$$

我们把 n 个 a 连乘积叫做 a 的 n 次幂（或 n 次方），其中 a 叫做幂的底数，n 叫做幂的指数。即



a^2 也叫做"a 的平方"；a^3 叫做"a 的立方"。

例如　$10^2=10\times10=100$；　　$10^4=10\times10\times10\times10=10000$；

$(-2)^2=(-2)\times(-2)=4$；　　$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$；

$(0.2)^3=0.2\times0.2\times0.2=0.008$；

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}.$$

从以上例子可知：正数的任何次幂都为正数；负数的偶次幂为正数，负数的奇次幂为负数。