

七·二一工人大学教材

数 学

江苏省七·二一工人大学《数学》教材编写组

内 容 简 介

本书分上、下两篇。上篇讲初等数学与平面解析几何，下篇讲微积分与微分方程初步。每节配有习题，篇末有习题答案。附录为选学内容，包括二进制数简介、复数、对数计算尺、优选法简介。

本书适宜七·二一工科大学机械类专业作为教材，其他专业也可选用。

编 者 的 话

为了贯彻落实伟大领袖和导师毛主席的“七·二一指示”，进一步办好七·二一工人大学，我们遵照省有关部门的指示，编写了这本《数学》教材。

在编写中，我们学习马、列和毛主席有关教育革命的论述，坚持开门编书，到许多地、市进行调查研究，听取工人大学师生的要求和意见，并吸取各地编写教材的成功经验，以求编好这本教材。

在教材中，我们注意既讲清基础理论，也考虑工人大学的教学特点；努力贯彻辩证唯物主义思想，联系生产实践，突出重点，便于自学。

这本教材的编写，得到了全省许多单位的协助和支持，在此一并表示感谢。

本书由江苏师范学院、苏州市商业局七·二一工人大学、苏州试验仪器厂、苏州东方化工厂、苏州市第二十四中学、第三十六中学等单位共同编写。由于时间仓促，书中可能存在缺点和错误，希望广大工人、学员和教师批评指正。

一九七七年四月

目 录

上 篇

第一章 代数式和方程	(1)
第一节 用字母表示数	(1)
一、用字母表示数的意义	(1)
二、用字母表示数的运算规律	(2)
第二节 代数式及代数式的值	(4)
一、代数式	(4)
二、代数式的值	(4)
三、合并同类项	(6)
第三节 代数式的运算	(8)
一、正整数幂及其运算法则	(8)
二、多项式的运算	(11)
三、分解因式和分式运算	(14)
第四节 一元一次方程	(20)
一、方程的概念	(20)
二、一元一次方程的解法	(20)
三、一元一次方程的应用举例	(22)
第五节 比例	(25)
一、比与比例分配	(25)
二、正比例与反比例	(27)
三、齿轮传动中的计算	(28)
第六节 方程组	(32)
一、二元一次方程组的概念	(32)
二、二元一次方程组的解法	(33)
三、二元一次方程组应用举例	(36)
四、三元一次方程组	(38)
第七节 一元二次方程	(41)
一、平方根与方程 $x^2 - a = 0 (a > 0)$ 的解	(41)
二、一元二次方程的公式解法	(44)
三、一元二次方程应用举例	(46)
第八节 不等式	(50)
一、不等式的意义和性质	(50)

二、一元一次不等式的解法及解的几何表示·····	(51)
三、解一元二次不等式举例·····	(53)
四、绝对值·····	(54)
第二章 指数和对数 ·····	(56)
第一节 指数概念的推广·····	(56)
一、负整数指数和零指数·····	(56)
二、分数指数·····	(58)
第二节 常用对数·····	(67)
一、对数的意义·····	(68)
二、求常用对数的方法·····	(70)
三、已知对数求真数·····	(72)
第三节 对数的运算法则及其应用·····	(74)
一、对数的基本性质及其运算法则·····	(74)
二、利用对数进行计算举例·····	(76)
第四节 对数的换底公式·····	(81)
一、换底公式·····	(81)
二、自然对数·····	(82)
第三章 三角形和三角函数 ·····	(83)
第一节 简单几何图形中的数量关系·····	(83)
一、线段和角的度量·····	(83)
二、垂线和平行线·····	(86)
三、三角形·····	(87)
第二节 直角三角形的边角关系·····	(96)
一、锐角三角函数·····	(97)
二、三角函数间的内在联系·····	(101)
三、应用举例·····	(103)
第三节 斜三角形的边角关系·····	(112)
一、正弦定理·····	(113)
二、余弦定理·····	(114)
三、应用举例·····	(116)
四、斜三角形解法·····	(119)
第四节 三角形的全等和相似·····	(123)
一、全等三角形的意义和判定·····	(123)
二、全等三角形的应用·····	(124)
三、相似三角形的意义和判定·····	(132)
四、相似三角形的应用·····	(134)
第四章 圆 ·····	(141)
第一节 圆的基本性质·····	(141)

一、有关圆的一些概念	(141)
二、弦和直径	(141)
三、圆心角和圆周角	(143)
第二节 圆和直线、圆和圆的相切	(147)
一、圆和直线的相切	(147)
二、圆和圆的相切	(150)
第三节 弧长和弧度制	(154)
一、圆周长和弧长	(154)
二、弧度制	(155)
第四节 圆的面积	(158)
一、圆和扇形的面积	(158)
二、展开图的面积	(159)
第五章 任意角的三角函数	(167)
第一节 平面直角坐标系	(167)
一、平面直角坐标系的意义	(167)
二、两点间的距离公式	(170)
第二节 任意角三角函数	(172)
一、角的概念的推广	(172)
二、任意角的三角函数	(174)
三、 0° 、 90° 、 180° 、 270° 、 360° 角的三角函数值	(178)
第三节 任意角三角函数值的计算	(181)
一、 90° 到 360° 间各象限内角的三角函数和锐角三角函数的关系	(182)
二、 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ 角的三角函数和 α 角的三角函数的关系	(183)
三、 $-\alpha$ 角的三角函数和 α 角的三角函数的关系	(184)
四、任意角三角函数值的计算步骤	(184)
第四节 复角的三角函数	(187)
一、和角公式	(187)
二、和差化积公式	(193)
第五节 已知三角函数值求角	(196)
第六章 函数与图象	(200)
第一节 函数	(200)
一、常量与变量	(200)
二、函数概念	(201)
三、函数关系的三种表示法	(203)
第二节 一次函数与直线	(206)
一、一次函数及其图象	(206)
二、直线方程	(209)
三、两直线间的相互关系与二元一次方程组的解	(212)

第三节 初等函数及其图象	(216)
一、幂函数	(216)
二、指数函数与对数函数	(219)
三、三角函数与反三角函数	(221)
第七章 二次曲线	(229)
第一节 圆	(229)
一、圆的标准方程	(229)
二、坐标轴的平移	(230)
三、圆的一般方程	(231)
第二节 椭圆	(234)
一、椭圆的标准方程	(234)
二、椭圆的几何性质	(235)
三、应用举例	(237)
第三节 双曲线	(239)
一、双曲线的标准方程	(239)
二、双曲线的几何性质	(240)
三、坐标轴旋转	(243)
四、应用举例	(245)
第四节 抛物线	(247)
一、抛物线的标准方程	(247)
二、函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象	(248)
三、抛物线的光学性质	(250)
第八章 参数方程与极坐标	(253)
第一节 参数方程	(253)
一、参数方程的概念	(253)
二、渐开线和摆线的参数方程	(257)
第二节 极坐标和曲线的极坐标方程	(261)
一、极坐标的概念	(261)
二、曲线的极坐标方程举例	(263)
三、等速螺线(阿基米德螺线)	(265)
四、极坐标和直角坐标互换	(268)
习题答案	(270)

下 篇

第九章 导数和微分	(280)
第一节 极限和连续	(280)
一、极限的概念	(280)
二、极限运算法则	(284)

三、函数的连续性.....	(287)
第二节 导数和微分的概念.....	(291)
一、实践中变化率问题举例.....	(291)
二、导数和微分的定义.....	(294)
第三节 基本初等函数的导数和导数的四则运算.....	(298)
一、几个基本初等函数的导数.....	(298)
二、导数的四则运算.....	(299)
三、反函数的求导法则.....	(302)
第四节 复合函数的求导法.....	(305)
一、复合函数概念.....	(305)
二、复合函数的求导法.....	(306)
第五节 参数方程所表示的函数的求导法.....	(309)
第六节 二阶导数及其力学意义.....	(310)
第七节 导数的应用.....	(311)
一、利用导数研究函数的性质.....	(311)
二、函数的最大值、最小值问题.....	(318)
*三、曲线的曲率.....	(321)
四、近似计算.....	(324)
五、方程的近似解.....	(326)
第十章 积分学.....	(330)
第一节 定积分.....	(330)
一、面积与路程问题.....	(330)
二、定积分的概念.....	(336)
三、定积分的几何意义.....	(337)
四、定积分的基本性质.....	(338)
第二节 原函数.....	(341)
一、路程问题的另一解法.....	(341)
二、原函数的概念.....	(342)
三、积分学基本定理.....	(343)
四、微分与积分的联系.....	(345)
第三节 积分法.....	(347)
一、积分公式.....	(347)
二、变量代换.....	(349)
三、定积分的变量代换法.....	(355)
四、分部积分法.....	(356)
五、定积分的分部积分法.....	(358)
六、定积分的近似计算.....	(359)
第四节 积分的应用.....	(368)

一、平面图形的面积.....	(368)
二、旋转体的体积.....	(375)
三、曲线弧的长度.....	(378)
四、片式摩擦离合器的力矩.....	(379)
五、功.....	(380)
六、函数的平均值.....	(383)
第十一章 微分方程初步	(390)
第一节 微分方程的基本概念.....	(390)
第二节 一阶微分方程的解法.....	(396)
一、可分离变量方程.....	(396)
二、线性方程.....	(397)
**第三节 二阶常系数线性微分方程.....	(403)
一、弹簧振动的微分方程.....	(403)
二、二阶常系数线性齐次方程.....	(405)
三、二阶常系数线性非齐次方程.....	(408)
四、弹簧振动.....	(411)
习题答案	(417)

附录 (选学内容)

I 二进制数简介.....	(425)
I 复数.....	(430)
II 对数计算尺.....	(441)
IV 优选法简介.....	(449)

[注] 目录中标有 * * 号者可作选学内容

上 篇

第一章 代数式和方程

第一节 用字母表示数

一、用字母表示数的意义

在生产实践和日常生活中，人们不仅要了解事物的具体数量，而且要研究数量之间的相互关系。例如，人们通过长期实践，总结出长方形面积计算的一般公式：

长方形面积 = 长 × 宽。

这个公式揭示了长方形的面积与其长和宽的相互关系。然而这种式子的表达形式有时还不方便，因此人们创造了用字母代表面积、长和宽等的方法。例如，用字母 S 表示长方形的面积， a 表示它的长， b 表示它的宽，则上面的公式可以简单地写作

$$S = a \times b.$$

字母和字母相乘，或者数字和字母相乘，乘号“ $\times$ ”一般记为“ $\cdot$ ”，甚至可以省略不写。如 $a \times b$ 可以记为 $a \cdot b$ 或 ab ；又如 $4 \times a$ 可以记为 $4 \cdot a$ 或 $4a$ 。至于 $a \times 4$ ，通常记为 $4a$ 。

这样，长方形面积公式可以写作： $S = ab$ 。类似地，三角形的面积计算公式：

$$S = \frac{1}{2}(b \times h) = \frac{1}{2}bh.$$

其中字母 S 表示三角形的面积， b 表示它的底， h 表示它的高。

梯形的面积计算公式：

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

其中 S 表示梯形的面积， a 表示它的上底， b 表示它的下底， h 表示它的高。

如果用字母 S 表示圆的面积， R 表示它的半径，则圆面积公式可以写作

$$S = \pi \textcircled{1} \times R \times R.$$

这里出现两个 R 相乘的情况，即 $R \times R$ ，一般记作 R^2 。所以，上面的公式可以写作

$$S = \pi R^2.$$

类似地， $a \times a \times a$ 可以写作 a^3 。 R^2 和 a^3 右上角的数字分别是 2 和 3，指明了相同数相乘的个数叫做“指数”。这里， R^2 的指数是 2， a^3 的指数是 3。单独一个字母 a 的指数是 1，即 a 就是 a^1 ，指数 1 通常省略不写。

字母代表数的应用很广，下面再举一些例子。

① $\pi = 3.14159 \cdots$

我们知道

距离 = 速度 × 时间,

$$\text{电流强度} = \frac{\text{电压}}{\text{电阻}}.$$

如果用字母 s 表示距离, v 表示速度, t 表示时间; 用字母 I 表示电流强度, U 表示电压, R 表示电阻. 则有

$$s = vt,$$

$$I = \frac{U}{R}.$$

除了用英文字母表示数外, 有时也用希腊字母 α 、 β 、 γ 、……等表示数.

例 1 把“长方形的周长等于长与宽的和的两倍”这句话用数学式子来表达.

解 用字母 l 表示长方形的周长, a 表示它的长, b 表示它的宽, 则有

$$l = 2(a + b).$$

例 2 弹簧每圈平均拉伸的计算规律是:

$$\text{每圈平均拉伸} = \frac{\text{拉伸后的长度} - \text{原来的长度}}{\text{圈数}},$$

现在要求用字母表示它.

解 用字母 l 表示弹簧的每圈平均拉伸, H 表示拉伸后的长度 (图1—1), h 表示原来的长度, n 表示圈数, 则有

$$l = \frac{H - h}{n}.$$

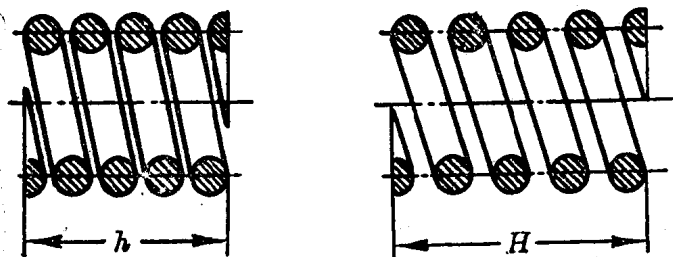


图 1—1

从前面的叙述可以看出, 采用字母表示数, 可以用含字母的算式简单、明确、普遍地表达某一类问题的一般数量关系, 这样就给我们认识和揭示客观事物的规律性带来很大的方便.

二、用字母表示数的运算规律

我们知道, 数的运算有交换律、结合律、分配律等性质. 过去这些性质是用语言来叙述的. 例如加法交换律:

任何两个数相加, 交换加数和被加数的位置, 它们的和不变.

现在用字母 a 、 b 表示任何两个数, 那么加法交换律就可以表示为

$$a + b = b + a.$$

类似地, 把数的运算律列表如下:

运 算 律	用 字 母 表 示	例
加法交换律	$a+b=b+a$	$3+4=4+3$
加法结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+3)+4=2+(3+4)$
乘法交换律	$ab=ba$	$2\times 3=3\times 2$
乘法结合律	$(ab)c=a(bc)$	$(2\times 3)\times 4=2\times (3\times 4)$
分 配 律	$a(b+c)=ab+ac$	$2\times (3+4)=2\times 3+2\times 4$

用字母表示数，把语言叙述的内容用简单的数学式子表示出来，这是很重要的。但有时也要求能用恰当的语言解释数学式子所表示的实际意义。例如， $\frac{a}{b}$ 表示一个任意分数， c 表示一个不为零的任意数，根据分数的性质，下列关系式成立：

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}.$$

如果用语言解释，上面两个式子的含意是“分数的分子、分母同时乘以（或除以）一个不为零的数时，分数的值不变”。

例 3 用语言叙述下面的数学式子：

$$(1) 2a+1; \quad (2) 3(a-b); \quad (3) \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b.$$

解 (1) a 的 2 倍与 1 的和；

(2) a 与 b 的差的 3 倍；

(3) a 的 $\frac{1}{2}$ 与 b 的 $\frac{1}{3}$ 的和。

例 4 某厂有煤 m 公斤，过去每天用煤 n 公斤，经技术革新后，每天用煤比原来节约 50 公斤，问技术革新后 m 公斤煤能用多少天？

解 用字母 x 表示用煤天数，则有

$$x = \frac{m}{n-50} \text{ (天)}.$$

习 题 1—1

1. 用数学式子表示下列各题的内容：

(1) 长方体的体积等于它的长、宽和高的乘积；

(2) 一数与 6 的和等于 15 与这数的差；

(3) 两数之和与这两数之差的乘积。

2. 用语言叙述下列数学式子的意义：

(1) $2(a+b)$; (2) $3a-2b$;

(3) $ab=ba$; (4) $3x=x+6$.

3. 某机床厂每天生产 a 台车床， b 台刨床， m 天生产车床和刨床总共多少台？

4. 车削 L 长的工件时，若车刀的走刀量（工件转一转，车刀在工件上移动的距离）为 S ，工件每分钟转 n 转，求走刀一次所需时间 T （单位是分）的计算公式。

5. 某工厂有机床 m 台, 每台每天加工零件 n 件。经技术革新后, 每台机床比原来每天多加工15件。问加工1000个零件在技术革新后需要多少天完成?

第二节 代数式及代数式的值

一、代 数 式

上面我们遇到了许多数学式子:

$$(1) ab, \frac{1}{2}bh, \frac{1}{2}(a+b)h, \pi R^2, \dots;$$

$$(2) \frac{U}{R}, \frac{H-h}{n}, \frac{m}{n-50}, \dots.$$

它们有着共同的特征, 都是用运算符号把字母或数字连接起来的, 象这样的式子叫做代数式。

上面这些代数式中, 字母间只是涉及加、减、乘、除等运算。其中分母不含有字母的代数式叫做整式, 如(1)中的各式都是整式; 分母含有字母的代数式叫做分式, 如(2)中各式都是分式。

只有乘除运算, 而没有加减运算的整式, 叫做单项式, 如 ab , $\frac{1}{2}bh$, πR^2 , $-3xy$

等都是单项式, 其中的数字(连同它前面的符号)叫做系数。例如 $\frac{1}{2}bh$ 的系数是 $\frac{1}{2}$, $-3xy$ 的系数是 -3 。当系数是1或 -1 时, 可把“1”省略不写。如 $1ab$ 就写成 ab , $-1x^2$ 就写成 $-x^2$ 。

至于 $2+x$, $a-b$, $1-3x+x^2$ 等式子, 它们是由几个单项式组成的, 叫做多项式。例如 $2+x$, 它是由两个单项式“2”与“ x ”组成, 同时字母 x 的指数是1, 所以 $2+x$ 也叫做一次二项式或一次式; 再如 $1-3x+x^2$, 它是由三个单项式“1”、“ $-3x$ ”与“ x^2 ”组成, 同时其中 x^2 项的指数是2, 所以 $1-3x+x^2$ 也叫做二次三项式或二次式。

二、代数式的值

代数式是从事物的数量关系中抽象出来的一般概念。当它转过来解决实际问题时, 要把具体数值代替字母后再进行计算。例如, 三角形面积计算公式是 $S = \frac{1}{2}bh$, 在实践中遇到的三角形, 它的边长和对应的高都是确定的。如三角形的边 $b=4$ 厘米, 对应的高 $h=3$ 厘米, 那么面积是:

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6(\text{厘米}^2) \text{①}.$$

这种用数值代替代数式中相应的字母, 经过计算所得到的结果(数值)叫做代数式的值。

① 厘米²即平方厘米, 类似地, 毫米²、米²即平方毫米、平方米。

例 1 根据下面所给 x 的值, 求代数式 $3x+2$ 的值:

- (1) $x=1$; (2) $x=-2$;
(3) $x=0$; (4) $x=0.5$.

解 (1) 当 $x=1$ 时, $3x+2=3\times 1+2=5$;
(2) 当 $x=-2$ 时, $3x+2=3\times (-2)+2=-4$;
(3) 当 $x=0$ 时, $3x+2=3\times 0+2=2$;
(4) 当 $x=0.5$ 时, $3x+2=3\times 0.5+2=3.5$.

例 2 当 $a=-2$ 时, 求代数式 $3a^2-2a+1$ 的值.

解 当 $a=-2$ 时, $3a^2-2a+1=3\times (-2)^2-2\times (-2)+1=12+4+1=17$.

例 3 当 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ 时, 求代数式 $x+\frac{y}{3-2xy}$ 的值.

解 当 $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ 时,

$$x+\frac{y}{3-2xy}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3-2\times\frac{1}{2}\times 1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

例 4 齿轮是机械传动中的一种基本零件. 一个正齿轮, 它的外径 D 是容易测出的, 它的齿数 z 也可以直接数出. 除此以外, 一个齿轮还有许多其他重要参数, 例如反映齿形大小的模数 m 、节圆直径 (节径) d 以及周节 t (图 1-2). 这些参数之间有下列关系,

$$\begin{aligned} m &= \frac{D}{z+2}, \\ d &= mz, \\ t &= \pi m. \end{aligned}$$

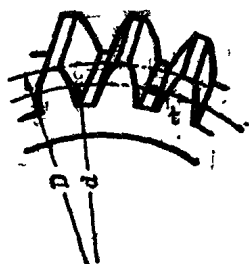


图 1-2

有了这些关系, 参数之间就可以互相换算.

现有一正齿轮, 它的外径 $D=84$ 毫米, 齿数 $z=40$, 求它的模数 m 、节圆直径 d 及周节 t .

解 $\because$ ① $D=84$, $z=40$,

$$\therefore m = \frac{D}{z+2} = \frac{84}{40+2} = 2,$$

$$d = mz = 2 \times 40 = 80 (\text{毫米}),$$

$$t = \pi m \approx 3.14 \times 2$$

$$= 6.28 (\text{毫米}).$$

答 这个正齿轮的模数是 2, 节圆直径是 80 毫米, 周节是 6.28 毫米.

从这些例子可以看出, 代数式的值是根据代数式里的字母所取的值来确定的. 一般

① 符号 “ $\because$ ” 读作 “因为”, “ $\therefore$ ” 读作 “所以”.

② 符号 “ $\approx$ ” 读作 “近似等于”, 这里就是说 π 近似等于 3.14.

说来，同一个代数式，当它的字母取值不同时，其代数式的值也就不同。当然，代数式里字母的取值应当依据实际需要来确定，而不能使代数式的值失去实际意义。例如，在表示三角形面积的代数式 $\frac{1}{2}bh$ 中， b 和 h 都不能取负数及零；在代数式 $\frac{3}{x}$ 里， x 不能取零。

三、合并同类项

在研究代数式的过程中，有时需要把代数式中的一些项进行合并。例如，我们考察正方形周长的计算。

用字母 a 表示正方形（图1—3）的边长，那么它的周长等于四条边长之和。即

$$a + a + a + a.$$

另外，它的周长又可以等于一条边的四倍，即 $4a$ ，

所以

$$a + a + a + a = 4a.$$

这就是说，只要把代数式中的字母看作和普通的数一样，按照运算规律进行计算，在一定条件下，就能达到化简的要求。例如，

$$4a + 6a = (4 + 6)a = 10a;$$

$$3x^2y + 5x^2y = (3 + 5)x^2y = 8x^2y.$$

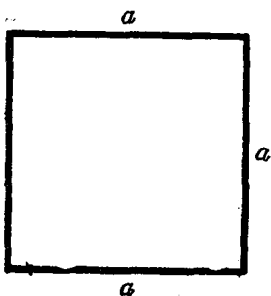


图 1—3

这里，“ $4a$ ”与“ $6a$ ”的字母相同（都是 a ），只是系数不同；“ $3x^2y$ ”与“ $5x^2y$ ”的字母的组成也相同（都是 x^2y ），也只是系数不同。这种字母部分组成相同（系数可以不同）的项叫做同类项。从上面的例子可以看到，在一个代数式里，同类项可以合并。合并的方法是：把同类项的系数相加，所得的和作为合并成一项的系数。

例 5 合并 $x^3 + 5x^2 - 6x + 5 - 3x^2 + 4x + 2$ 中的同类项。

解 原式 $= x^3 + (5 - 3)x^2 + (-6 + 4)x + (5 + 2)$
 $= x^3 + 2x^2 - 2x + 7.$

例 6 合并 $3a^4 - 8a^2b^2 - 2ab^3 + 2a^4 + 8a^2b^2 + 6ab^3$ 中的同类项。

解 原式 $= (3 + 2)a^4 + (-8 + 8)a^2b^2 + (-2 + 6)ab^3 = 5a^4 + 4ab^3.$

例 7 当 $x = 1$ ， $y = -2$ 时，计算代数式

$$x^4 + 8x^3y - x^2y^2 + xy + 5x^4 - 8x^3y + 3x^2y^2 + 3xy \text{ 的值.}$$

解 先把原式化简。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (1 + 5)x^4 + (8 - 8)x^3y + (-1 + 3)x^2y^2 + (1 + 3)xy \\ &= 6x^4 + 2x^2y^2 + 4xy. \end{aligned}$$

再把 $x = 1$ ， $y = -2$ 代入上式计算，得

$$\text{原式的值} = 6 \times 1^4 + 2 \times 1^2 \times (-2)^2 + 4 \times 1 \times (-2) = 6 + 8 - 8 = 6.$$

在实际问题中所遇到的代数式有时还带有括号，例如计算图 1—4 的面积。这是两个长方形和一个梯形所组成的图形，显然，它的面积是：

$$2a + \frac{(a+b)}{2} \times 2 + 2b$$

$$= 2a + (a+b) + 2b.$$

上式中出现括号，为了化简这个代数式，首先要去括号，然后再合并同类项。如果括号前是“+”号，那么，去括号时括号内各项的符号不变；如果括号前是“-”号，那么，去括号时括号内各项的符号全部改变。

所以，图 1-4 的面积是：

$$2a + a + b + 2b = 3a + 3b.$$

例 8 化简代数式 $x^3 + x^2 + (x^2 - x) + x$.

解 原式 $= x^3 + x^2 + x^2 - x + x$

$$= x^3 + 2x^2.$$

例 9 化简代数式 $x^3 + [x^2 - (1 + x^2)] + 1$.

解 原式 $= x^3 + x^2 - (1 + x^2) + 1$

$$= x^3 + x^2 - 1 - x^2 + 1 = x^3.$$

例 10 当 $x = 2$ 时，计算代数式 $x^3 - \{3 + [x^2 - (x - 1)] - x^2\}$ 的值。

解 先化简原式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^3 - 3 - [x^2 - (x - 1)] + x^2 \\ &= x^3 - 3 - x^2 + (x - 1) + x^2 \\ &= x^3 - 3 - x^2 + x - 1 + x^2 \\ &= x^3 + x - 4. \end{aligned}$$

将 $x = 2$ 代入上式，得

$$\text{原式的值} = 2^3 + 2 - 4 = 6.$$

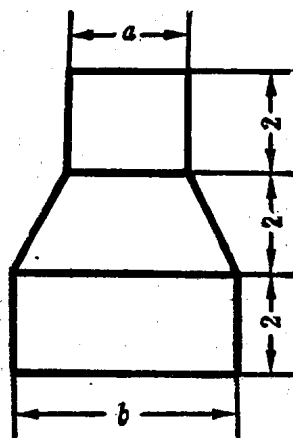


图 1-4

习 题 1-2

1. 指出下列代数式哪些是整式？哪些是分式？哪些是单项式？哪些是多项式（口答）？

$$3a^2b, \quad \frac{ab}{3}, \quad \frac{b}{a}, \quad 2+x, \quad x-y,$$

$$1+3x+x^2, \quad \frac{1}{x-1}, \quad xy+x^2+y^2.$$

2. 指出单项式 ab , $\frac{1}{3}x^2y$, $-xy^2$, πR^2 的系数（口答）。

3. 合并同类项（口答）：

(1) $2a + 3b + a - 2b$;

(2) $x^2y + xy^2 + 2yx^2 + 3y^2x$;

(3) $2x^2 + 3y + y^2 + x^2 - 2y^2$;

(4) $3a^3 + 5 + 2b^2 - a^3 - 2b^2 - 4$.

4. 化简下列代数式，并计算当 $x = -2$ 时各代数式的值。

(1) $x^2 + (1 - 2x^2)$;

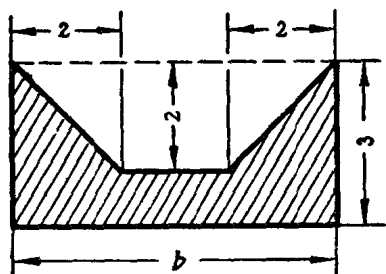
(2) $2x^2 - (x + x^2)$;

(3) $3x - (x + x^2) + 2x^2$;

(4) $[2x^2 - (1 + x^2)] + 1$;

(5) $(x^2 - 2x) - [x^2 - (1 + x)]$; (6) $\{2x^2 + [x^2 - (1 - x^2)]\} - x^2$.

5. 已知一弹簧被拉伸后的长度 $H = 60$ 毫米, 原来的长度 $h = 45$ 毫米, 圈数 $n = 75$ (圈), 求每圈的平均拉伸 l .



(第6题图)

6. 计算左图阴影部分的面积.

7. 有一正齿轮, 模数 $m = 3$, 齿数 $z = 24$, 求节圆直径 d 、外径 D 及周节 t .

8. 一只灯丝电阻为 120 欧姆的灯泡, 若通过的电流是 0.3 安培, 问灯泡两端的电压是多少?

[提示]: $U = IR$, 这里 U 、 I 、 R 分别表示电压 (伏特)、电流 (安培)、电阻 (欧姆).

第三节 代数式的运算

一、正整数幂及其运算法则

1. 正整数幂的意义

在圆面积计算公式中, 出现半径自乘的情况. 再如, 边长为 a 的正方形面积是 $a \cdot a$, 边长为 a 的立方体体积是 $a \cdot a \cdot a$. 在第一节中我们曾经指出, 相同数连乘可以记作

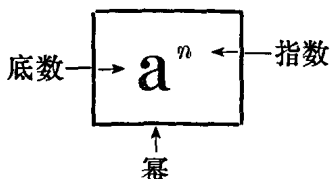
$$a \cdot a = a^2,$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3.$$

一般地, n 个 a 的连乘可以写作

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} = a^n.$$

我们把 n 个 a 连乘积叫做 a 的 n 次幂 (或 n 次方), 其中 a 叫做幂的底数, n 叫做幂的指数. 即



a^2 也叫做“ a 的平方”; a^3 叫做“ a 的立方”.

例如 $10^2 = 10 \times 10 = 100$; $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$;
 $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$; $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$;
 $(0.2)^3 = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008$;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

从以上例子可知: 正数的任何次幂都为正数; 负数的偶次幂为正数, 负数的奇次幂为负数.