职业高级中学数学

教学参考书

第三册

全国职业高级中学数学教材编写组 编著

教育部规划教材

职业高级中学数学

第 三 册

教学参考书

全国职业高级中学数学教材编写组 编著

人民教育出版社

教育部规划教材

职业高级中学数学

ZHIYE GAOJIZHONGXUE SHUXUE

第三册

教学参考书

JIAOXUE CANKAOSHU

全国职业高级中学数学教材编写组　编著

*

人民教育出版社出版发行
(北京沙滩后街55号　邮编：100009)
全国新华书店发行
大厂第一胶印厂印装

*

开本：787mm×1092mm　1/32　印张：9　字数：225 000
1998年12月第1版 1999年6月第1次印刷
印数：00 001～6 000
ISBN 7-107-13005-6
G·6123（课）　定价：6.30元

说　明

这本教学参考书是根据1999年秋季开始使用的新编职业高级中学数学课本第三册编写的教师教学用书.

这本教学参考书编写的原则是：

（一）努力体现新编职业高级中学数学教材的指导思想，帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图；

（二）从当前职业高级中学数学教学的实际出发，根据教材内容指出教材中的难点和重点，帮助教师克服教学中的一些困难；

（三）明确各章的教学要求；

（四）努力吸收职业高级中学数学教学的经验.

这本教学参考书每章包括教学要求；教材分析和教学建议；测验题及答案；习题答案、提示与解答等4部分. 第三册教材是选修教材. 书中的教学要求仅供参考，教师可根据自己教的专业提出适合自己专业的教学要求. 在教材分析和教学建议中，先介绍本章的内容结构，说明编辑的意图和编写指导思想，并指出教学的重点和难点，然后分小节进行内容分析、提出教学建议. 测验题是一份课堂考卷，仅供参考. 习题答案、提示与解答部分，一般地，简单题只给答案，中等题给出答案或提示，难题给出解答. 在课本的说明中，已对全套教材的结构和编排指导思想作了

阐述.在第三册的教学中仍要贯彻教材编写的指导思想:加强基础,深入浅出,温故知新.要根据职业高中学生的特点,改进教学方法,引导职业高中学生学好数学、用好数学.

本册教材共三章:第十三章行列式与矩阵,第十四章微积分初步,第十五章布尔代数.微积分是研究变量的数学,是学习专业课的重要数学工具.学生由学习常量数学到学习变量数学是学习数学的一次重大转折,教师要积极引导学生较顺利地实现这次转折.学习时,要多强调直观,引导学生充分理解微分和积分概念的实质,掌握微分和积分的应用.行列式和矩阵是研究线性问题的重要微学工具,学习的重点是掌握行列式和矩阵的运算.布尔代数是逻辑电路分析、化简和设计的重要工具与方法,应使学生在掌握逻辑代数的公式和定理的基础上,学习它的实际应用。

第三册教学总课时约为112课时.

由于缺乏编写这册参考书的经验,本书一定存在不少缺点和问题,恳切希望广大教师和教学研究人员,提出意见,以便再版时修改、订正.

这本教学参考书由高存明主编,徐一冰、黄宁生、吴洪生、刘德荣、王军、吴永寿、瞿润德等编写.陈宏伯、鲍珑审定.

人民教育出版社职业教育室

1998年12月

目　录

第十三章　行列式与矩阵

Ⅰ　教学要求

1. 理解二阶、三阶行列式的概念，能熟练地用对角线法则展开二阶、三阶行列式.

2. 了解行列式的性质，能灵活地运用性质化简和计算三阶行列式.

3. 理解余子式和代数余子式的概念，能正确地按一行（列）展开三阶行列式.

4. 了解四阶行列式的定义，进而了解用 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式的方法. 能够利用行列式的性质来展开、计算四阶行列式.

5. 了解克莱姆法则，会用克莱姆法则解四元线性方程组.

6. 了解矩阵的概念. 理解转置矩阵、矩阵相等、方阵、单位矩阵、逆矩阵、矩阵的初等变换等概念，了解矩阵的运算律，熟练掌握矩阵的运算和逆矩阵的求法.

7. 了解线性方程组的矩阵表示，理解系数矩阵及其增广矩阵的概念，掌握通过对增广矩阵进行行初等变换解线性方程组的方法.

8. 了解矩阵在几何学科和一些实际问题中的简单应

用.

II 教材分析和教学建议

行列式和矩阵是高等代数的基本内容之一，行列式是研究线性方程组的重要工具，在解析几何学等学科研究中也很有用处. 矩阵也可用来解线性方程组，并可判断其解的情况. 除此之外，在自然科学、工程技术，以及生产实际中，还有大量的各种各样的问题也都涉及矩阵的概念，并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究，甚至于有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题，归结为矩阵问题后，却是相同的，而且可以通过对矩阵的研究获得解决. 因此矩阵成为一个非常重要的数学工具. 教材介绍了行列式的一些主要知识，以及用行列式解一般线性方程组的方法，介绍了矩阵的部分基本知识，并将矩阵用于线性方程组的求解，还介绍了一些矩阵的实际应用.

本章教材分为两部分：行列式和矩阵. 13.1、13.2 两节在学生已经掌握解二元一次方程组的加减消元法的基础上，引入了行列式的概念，以及展开二阶、三阶行列式的对角线法则，并用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组. 接着在 13.3 与 13.4 两节详细地叙述和证明了行列式的性质. 在这个基础上，13.5 节仿照三阶行列式按行（列）展开定理，给出了四阶行列式的定义，进而给出了 n 阶行列式的定义. 13.6 介绍了一般 n 元线性方程组的行列式解法 —— 克莱姆法则. 13.7 节从经济问题中的数表引入矩阵定义，并介绍了转置矩阵、矩阵相等等概念. 13.8 与

13.9 两节介绍了矩阵的加、减、乘运算，规定了矩阵的数乘运算，并指出了矩阵运算满足的运算律. 13.10、13.11、13.12 等三节主要研究了方阵，讲了有关方阵行列式的性质，介绍了单位矩阵、逆矩阵以及矩阵的初等变换等概念，以及求已知矩阵的逆矩阵的两种方法. 13.13 节介绍了线性方程组的矩阵表示和增广矩阵的概念，在此基础上通过对增广矩阵作行初等变换解线性方程组. 13.14 节安排了两个较典型的实际例子，说明矩阵在科学与生产实际中的应用，并对用矩阵方法导出的转轴公式在解析几何中的应用作了举例说明.

考虑到学生的实际情况，教材对一些算律、公式等未作严格证明，而是通过具体例子导出. 对此，教师在教学中应向学生说明，以防止学生误认为用不完全归纳法获得的结论肯定是正确的.

本章的重点是三阶行列式的性质和运算，矩阵的运算，用行初等变换方法求逆矩阵；难点是三阶行列式的性质和运算，矩阵乘法，逆矩阵的求法，用增广矩阵解线性方程组.

本章教学约需 27 课时，具体分配如下（仅供参考）：

13.1	二元线性方程组与二阶行列式	2 课时
13.2	三元线性方程组与三阶行列式	2 课时
13.3	行列式的性质	2 课时
13.4	余子式、代数余子式	2 课时
13.5	高阶行列式	1 课时
13.6	克莱姆法则	1 课时
13.7	矩阵的概念	2 课时

一　行　列　式

13.1　二元线性方程组与二阶行列式

1. 本节有两个内容：(1) 二阶行列式；(2) 二元线性方程组解的行列式表示法．重点是二阶行列式的展开式及方程组解的行列式表示法．

2. 教材是在复习初中已学过的二元线性方程组加减消元法的基础上引入行列式的概念的．这里可以先举一个数字系数的二元线性方程组的例子作为铺垫，然后再讲字母系数的二元线性方程组．讲解时，要提醒学生注意解存在的条件是 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，并注意讲清数字系数只是字母系数的特殊情况．

3. 教材从字母系数的二元线性方程组的解出发，进而提出二阶行列式的概念．在讲解这个概念时，重点是讲清它是按照对角线法则展开的，并注意符号的取法．

4. 注意说明代表行列式 D 中各元素字母足码的两个

数字的意义，前一个数字在方程组中表示方程的序号，在行列式中表示所在行数. 后一个数字在方程组中表示未知数的序号，在行列式中表示所在列数.

5. 行列式的计算结果可能是一个数值，也可能是一个代数式或一个三角式. 行列式的计算中所涉及到的有关代数，三角等知识，要及时帮助学生复习.

6. 用行列式解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{I}$$

时，要注意以下几点：

① 必须把一般二元线性方程组化成标准形式 (I) 后才能求解，否则 D_1、D_2 的符号要出现错误. 教学时可以举例说明.

② 求解时先计算 D 的值，只有当 $D\neq 0$ 时，方程组 (I) 才能有解，并且解是唯一的.

③ 学生往往把 D_1、D_2 算错，教学时应指出 D_1 是用方程组 (I) 中的 b_1，b_2 取代 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}所得；D_2 是用 b_1，b_2 取代 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得. 还要强调 x_1，x_2 的系数和常数项都应包括它们前面所带的符号.

7. 当方程组 (I) 的系数行列式 $D=0$ 时，方程组 (I) 无解或有无穷多组解. 教学时不必再去讨论什么时候有无穷多解，什么时候无解.

13.2 三元线性方程组与三阶行列式

1. 本节是从解三元线性方程组的需要出发，引入三阶

行列式概念的.在介绍了展开三阶行列式的对角线法则后，讨论了三元线性方程组解的行列式表示法. 最后通过例题作了示范. 本节的重点是展开三阶行列式的对角线法则.

2. 可以按教材上的方法引入三阶行列式. 在引入时要先复习用二阶行列式解二元线性方程组的有关知识.另外，也可以用引伸二阶行列式的方法，直接给出三阶行列式的定义. 说明如下：

二阶行列式是由 2^2 个数排成 2 行 2 列的正方形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

表示代数式 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. 由此引伸用 3^2 个数排成 3 行 3 列的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

它用来表示一个 6 项式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，叫三阶行列式. 所以三阶行列式仍然是代数式的一种符号记法.

3. 在讲解对角线法则时，要注意讲清符号法则：实线上 3 个元素的积，添上正号；虚线上 3 个元素的积，添上负号，简记为“实正虚负”. 可借助教材中“马蹄形连线图”辅助记忆. 另一方面要注意复习实数乘法运算的符号法则：“偶数个负数的积是正数，奇数个负数的积是负数”. 以上两个符号法则在展开行列式计算中将经常用到，因此要求学生认真仔细，避免混淆、错漏. 教学时要通过反复

练习，使学生牢固掌握. 对角线法则的辅助记忆也可用“三角形连线图”（图 13-1）

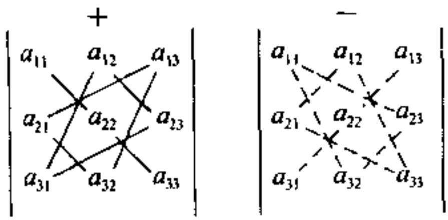

图 13-1

4. 三元线性方程组（1）通过消元可得①，仿照用二阶行列式解二元线性方程组的方法，①可写成 $Dx_1=D_1$；同理，$Dx_2=D_2$；$Dx_3=D_3$，其中 D 为三元线性方程组（1）的系数行列式，D_1，D_2，D_3 分别是将 D 中的第 1、2、3 列元素换成 b_1、b_2、b_3 而得. 当 $D\neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

用集合的形式表示，方程组（1）的解集为

$$\left\{\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right)\right\}.$$

这是一个单元素集合，要防止把（1）的解集错写成

$$\left\{\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right\}.$$

5. 解练习第 4(2)题时,可利用第 3(2)题的结论.

13.3 行列式的性质

1. 行列式作为代数式,也有化简、求值,变形等问题.要学好它,仅仅知道按对角线法则展开是不够的.特别是对四阶以上的行列式,对角线法则并不适用.因此,要进一步从行列式本身来研究它所具有的性质.本节所学的行列式的 6 个性质、3 个推论,是为简化行列式的计算服务的.行列式的计算能否顺利进行,能否正确,迅速地完成,就在于能否熟练地运用这些性质.因此本节为本章的重点内容之一.

2. 本节以三阶行列式为例,叙述并证明了行列式的性质.这些性质对任意阶行列式都是适用的.

3. 本节给出的 6 个性质、3 个推论的证明都比较容易.性质 1、性质 2、性质 3、性质 5 是用对角线法则直接展开来证明的.如性质 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的证明为:

把等式左边的行列式按对角线法则展开,得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=ka_{11}a_{22}a_{33}+ka_{12}a_{23}a_{31}+ka_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-ka_{11}a_{23}a_{32}-ka_{12}a_{21}a_{33}-ka_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=k(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

另外一些性质或推论是由性质 1、2、3、5 推证出来的. 在教学中，应当讲清性质的条件和结论. 证明可由师生共同进行或由学生自己独立进行.

4. 为了帮助学生在理解的基础上加强记忆，教学时还应当注意指出每一性质的作用及需要应当强调的字句.

(1) 性质 1 的作用是，行列式关于行具有的性质和对行可施行的运算用在对列时同样成立，反过来也是这样. 在讲解性质 1 时，应强调“各行”与“相对应的列”，而不是“某一行”与“某一列”.

(2) 性质 2 的作用之一是用来证明推论. 在讲解性质 2 时，要注意强调它的条件是将两行（列）对调. 超过两行（列）的对调就不能轻意改变行列式的符号. 例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$\because \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1、3 行对调}} -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 2、3 行对调}} -\left(-\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

性质 2 推论的作用是用来判断某些行列式的值为零，给某些行列式的运算带来方便.

(3) 性质 3 和它的推论 1 实质上是一样的，只是表达方法不同. 在行列式的计算中常使用推论 1，从而使行列式的元素尽可能变得简单. 性质 3 推论 2 的作用也是用来判断某些行列式的值为零，以简化运算.

(4)性质 4 的作用与性质 3 推论 2 相同，它是性质 2 的推论与性质 3 推论 1 的综合.

(5)性质 5 的作用在于可使行列式的元素变成单项式，特别是在拆成两个行列式的和以后，至少有一个（或者两个）行列式容易判断为零时，简化计算的作用更加明显. 如本节的例 2.

在讲解性质 5 时，要注意强调“某一行（或一列）”的意义，如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

因为