高等学校试用教材

# 电路分析原理

下　　册

吉三成　编

高等教育出版社

本书是根据现行电路教学大纲编写的，经高等学校工科电路理论与信号分析教材编审小组评选审订，可作为电类（不包括无线电技术类）专业的基本教材。

全书分上下两册出版。上册五章，即：电路模型和电路定律，电阻电路的分析，时域分析，正弦稳态分析，非正弦周期电流电路和信号的频谱。下册五章，即：复频域分析，网络图论和网络方程，二端口网络及多端元件，分布参数电路，非线性电路。

本书也可供有关科技人员参考和校外人员自学。

本书责任编辑　刘秉仁


高等学校试用教材

电路分析原理

下　册

南三成　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1108 1/32　印张 8.125　字数 194,000

1985年6月 第1版　1985年8月第1次印刷

印数 00,001—7,160

书号 15010·0653　定价 1.65 元

# 目　　录

# 第六章　复频域分析

第三章讨论了电路的时域分析。时域分析的特点是：给定激励的时间函数，根据电路的微分方程，用经典方法求解，以获得响应的时间函数。第四章讲了正弦稳态分析，用了相量法。相量法的特点是：将正弦激励用相量表示，电路的参数采用复阻抗和复导纳，通过分析计算，求出电路的响应电流和电压的相量。由于复阻抗和复导纳是频率的函数，当频率改变时，电路响应电流和电压的模和辐角随着变化，因此这种分析叫做频域分析。第五章研究了非正弦周期电流电路的分析。应用傅里叶级数谐波分析的原理，在叠加原理的基础上，运用了相量法；同时，对于非周期性信号，由傅里叶变换对其含有谐波的状况进行分析，而谐波又是频率的函数，因此，这些分析也都是频域分析。本章讲电路的复频域分析，这是一种在电路分析中应用更为广泛的方法。复频域分析的数学基础是拉普拉斯变换。为了说明复频域分析，须先简单地讲一讲拉普拉斯变换。

## §6-1　拉普拉斯变换，复频率

什么是拉普拉斯变换？请看下边的说明。

设有一以时间 $t$ 为变量的实变函数 $f(t)$。让我们用一个特殊的指数函数 $e^{-st}$ 去乘 $f(t)$，然后求其从 $t=0_-$ 到 $t=\infty$ 区间的积分，则有

$$\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt$$

这里，$s$ 是复数，其实部设为 $\sigma$，虚部设为 $\omega$，则有 $s=\sigma+j\omega$。对于实变函数 $f(t)$ 实行上述数学演算过程，就叫做拉普拉斯变换。求 $f(t)$的拉普拉斯变换，常以符号 $\mathscr{L}[f(t)]$表示之，即

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt \qquad (6\text{-}1)$$

应当指出，为了确保上述积分为绝对可积，函数 $f(t)$ 应满足下式，即

$$\int_{0_-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t}dt<\infty$$

这里，$\sigma$ 之值可选得使该式成立，$e^{-\sigma t}$ 称为收敛因子。还应当指出，在数学中，在其他一些地方，式(6-1)中的积分下限往往规定为 $t=0$；但在这里，我们把它规定为 $t=0_-$，这是因为：在电路分析中，遇到的激励和响应，其时域函数，有时是冲击函数$\delta(t)$，$\delta(t)$只在 $t=0$ 时有值，为了使积分区间能把 $\delta(t)$ 包括在内，以便于电路的分析，故规定积分下限为 $t=0_-$。

可以想到，函数 $f(t)$ 经拉普拉斯变换之后，其结果乃是 $s$ 的函数，以 $F(s)$表示，则有

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt \qquad (6\text{-}2)$$

由于 $s$ 是复数，所以，$F(s)$为复变函数。这样 来，拉普拉斯变换可以看成是将实变函数 $f(t)$ 变换为复变函数 $F(s)$的一种数学变换。有时，把 $f(t)$ 称为原函数，把 $F(s)$称为象函数。因此，拉普拉斯变换也可以说成是由原函数求其象函数。

特别需要指出的是，复数变量 $s=\sigma+j\omega$ 具有频率的量纲，因而称为复数频率，简称复频率。这是因为 $s$ 来源于指数函数 $e^{-st}$，这里，$s$ 的单位显然为 1/秒($s^{-1}$)，这是频率的单位。$s$ 是一个广义的频率概念。基于这种情况，象函数 $F(s)$ 亦称为复频率函数。

以上所谈为拉普拉斯变换的数学实质。下边让我们具体研究

几个常用实变函数的拉普拉斯变换。这些实变函数在电路分析中占有重要的地位。

1. 单位阶跃函数的拉普拉斯变换

设 $f(t)=1(t)$为单位阶跃函数，则其拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathscr{L}[1(t)]=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot 1(t)\,dt$$

$$=\frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_{0_-}^{\infty}=-\frac{1}{s}[0-1]=\frac{1}{s}$$

即

$$\mathscr{L}[1(t)]=\frac{1}{s} \tag{6-3}$$

2. 指数函数的拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 为指数函数，即 $f(t)=e^{-\alpha t}$，则其拉普拉斯变换为

$$F(s)=\mathscr{L}[e^{-\alpha t}]=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot e^{-\alpha t}\,dt$$

$$=\int_{0_-}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}\,dt=\frac{-1}{\alpha+s}[0-1]$$

$$=\frac{1}{s+\alpha}$$

即

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}]=\frac{1}{s+\alpha} \tag{6-4}$$

3. 单位冲激函数的拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 为单位冲激函数，即 $f(t)=\delta(t)$，求其 $F(s)$。则有

$$F(s)=\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot\delta(t)\,dt$$

$$=\int_{0_-}^{0_+} e^{-st}\cdot\delta(t)\,dt=1$$

即

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1 \tag{6-5}$$

由以上讨论可以看出：$f(t)$与 $F(s)$二者有一一对应关系；换句话说，有一个什么样的 $f(t)$，就有一个且仅有一个与之对应的 $F(s)$，同样，有一个什么样的 $F(s)$，就有一个且仅有一个与之对

应的 $f(t)$。$f(t)$与其 $F(s)$形成一对一对的，叫拉普拉斯变换对。表 6-1 所列是一些常用拉普拉斯变换对。

**表 6-1**

| 原函数$f(t)$ | 象函数$F(s)$ | 原函数$f(t)$ | 象函数$F(s)$ |
|---|---|---|---|
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ | $te^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ |
| $\frac{1}{\omega}\sin\omega t$ | $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ | $1-e^{-\alpha t}$ | $\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$ |
| $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\delta(t)$ | $1$ |
| $e^{-\alpha t}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ | $\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ |
| $e^{-\alpha t}\cos\omega t$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ | $t^2e^{-\alpha t}$ | $\frac{2}{(s+\alpha)^3}$ |

一般地讲，电路的激励是时间的函数，有与之对应的复频率函数；电路的响应是时间的函数，也有与之对应的复频率函数。由激励的复频率函数求电路响应的复频率函数，以及由此获得对电路性能的了解，这种分析就叫复频域分析。

## 练习题

6-1. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $3\cdot 1(t)$;　　(2) $1(t-3)$;

(3) $(2+e^{-3t})\cdot 1(t)$;　　(4) $\delta(t-5)$

$$\left[\frac{3}{s};\ \frac{e^{-3s}}{s};\ \frac{2}{s}+\frac{1}{s+3};\ e^{-5s}\right]$$

## § 6-2 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换具有若干基本性质。掌握和运用这些性质，不但使我们可以由某些已知原函数的象函数求另外一些原函数的象函数；同时，还使我们能够认识电路的某些规律和特性，以利于分析和研究。本节讨论几个常用的基本性质。

### 一、线性性质

线性性质包含两个内容。其一是：

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[af(t)]=aF(s) \tag{6-6}$$

其中，$a$ 为常数。证明如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[af(t)]&=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot af(t)\,dt\\&=a\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=aF(s)\end{aligned}$$

线性性质的另一个内容是：

若 $f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$，且已知

$$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\quad \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\mathscr{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]\\&=F_1(s)\pm F_2(s)\end{aligned} \tag{6-7}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\mathscr{L}[f_1(t)\pm f_2(t)]\\&=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}[f_1(t)\pm f_2(t)]\,dt\\&=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f_1(t)\,dt\pm\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f_2(t)\,dt\\&=F_1(s)\pm F_2(s)\end{aligned}$$

作为线性性质的应用，让我们研究下面的例题。

**例 6-1** 试求函数 $f(t)=1-e^{-\alpha t}$ 的象函数。

**解**: $f(t)$由二函数合成,即 $1(t)$ 和 $e^{-\alpha t}$。由于$\mathscr{L}[1(t)]=\frac{1}{s}$, $\mathscr{L}[e^{-\alpha t}]=\frac{1}{s+\alpha}$, 故得

$$\mathscr{L}[1-e^{-\alpha t}]=F_1(s)-F_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}$$

$$=\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$$

将此结果与表 6-1 所列比较,便见相同。

## 二、微分性质

微分性质的内容是:

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 则

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0_-) \tag{6-8}$$

式中, $f(0_-)$为 $t=0_-$ 时原函数的值。在 $f(0_-)=0$ 的情况下, 式(6-8)则变为

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s) \tag{6-9}$$

微分性质可证明如下:

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

现在让我们用分部积分法,即$\int udv=uv-\int vdu$, 求上式的积分。为此, 使 $u=f(t)$, $dv=e^{-st}dt$, 则有 $v=-\frac{1}{s}e^{-st}$, 于是得

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\cdot f(t)dt$$

$$=-\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]dt$$

$$=\frac{f(0_-)}{s}+\frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]dt$$

$$=\frac{f(0_-)}{s}+\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$$

以 $s$ 乘上式之两端并作适当移项，则可得

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0_-)$$

根据上面的讨论情况可知，对于高阶微分，例如二阶和三阶微分，不难得到下列关系：

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0) \tag{6-10}$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right]=s^3F(s)-s^2f(0_-)-sf'(0_-)-f''(0_-) \tag{6-11}$$

式中，$f'(0_-)$和$f''(0_-)$分别为$f(t)$的一阶导数和二阶导数的初值。可以看出，若所有这些初值都为零，则时域中的求导反映在复频域中，就是乘以 $s$；求导一次等于乘以 $s$，连续求导两次等于乘以 $s^2$，余类推。

作为微分性质的应用，让我们研究下面的例题。

**例 6-2** 已知 $\mathscr{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\ \omega t\right]=\frac{1}{s^2+\omega^2}$，求$\mathscr{L}[\cos\ \omega t]$。

**解：** 由于 $\cos\omega t=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega}\sin\ \omega t\right)$，且 $\sin\omega t\Big|_{t=0_-}=0$，因此，可得

$$\mathscr{L}[\cos\ \omega t]=s\frac{1}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

可将此结果与表 6-1 所列者作比较，便见相同。

### 三、积分性质

积分性质的内容是：设 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$，则其积分函数$\int f(t)dt$ 的象函数为

$$\mathscr{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0_-}}{s} \tag{6-12}$$

式中，$\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0_-}$ 为 $t=0_-$ 时积分函数的值。若该值为零，则有

$$\mathscr{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\frac{F(s)}{s} \tag{6-13}$$

积分性质可证明如下：还是让我们用分部积分法求式

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

中的积分。此时，宜令 $u=e^{-st}$，$dv=f(t)\,dt$，则 $v=\int f(t)\,dt$，且 $du=-se^{-st}dt$，由此，我们得

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt\\&=\left|e^{-st}\int f(t)\,dt\right|_{0_-}^{\infty}+s\int_{0_-}^{\infty} e^{-st}\left[\int f(t)\,dt\right]dt\\&=-\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0}+s\mathscr{L}\left[\int f(t)\,dt\right]\end{aligned}$$

以 $s$ 除上式之两端并作适当移项，则可得

$$\mathscr{L}\left[\int f(t)\,dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0_-}}{s}$$

由上面的讨论情况可知，对于重积分，例如二重积分，不难得到下列关系：

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left[\int dt\int f(t)\,dt\right]\\&=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0_-}}{s^2}+\frac{\left[\int dt\int f(t)\,dt\right]_{t=0}}{s}\end{aligned} \tag{6-14}$$

式中，$\left[\int dt\int f(t)\,dt\right]_{t=0_-}$ 为 $f(t)$ 的二重积分的初值。可以看出，若

所有的初值都是零，则时域中的积分反映在复频域中，就是除以 $s$。积分一次除以 $s$；连续积分两次除以 $s^2$；余类推。

作为积分性质的应用，让我们研究下边的例子。

**例 6-3** 已知 $\mathscr{L}[1(t)]=\dfrac{1}{s}$，求 $\mathscr{L}[t\cdot 1(t)]$。

**解：** 因为 $t\cdot 1(t)=\int 1(t)dt$，因而可得

$$\mathscr{L}[t\cdot 1(t)]=\mathscr{L}\left[\int 1(t)\cdot dt\right]$$

$$=\frac{\mathscr{L}[1(t)dt]}{s}+\frac{\left[\int 1(t)dt\right]_{t=0_-}}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{0}{s}=\frac{1}{s^2}$$

## 四、时延性质

时延性质的内容是：若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f(t-T)\cdot 1(t-T)]=e^{-sT}F(s) \tag{6-15}$$

式中函数 $f(t-T)\cdot 1(t-T)$ 是函数 $f(t)\cdot 1(t)$ 位移了一时间 $T$。这说明，时域中时间上位移 $T$，反映在复频域中则是乘以 $e^{-sT}$。

时延性质可证明如下：

令 $t'=t-T$，则有

$$\mathscr{L}[f(t-T)\cdot 1(t-T)]=\int_0^{\infty} f(t-T)\cdot 1(t-T)e^{-st}dt$$

$$=\int_{-T}^{\infty} f(t')\cdot 1(t')\cdot e^{-s(t'+T)}\cdot dt'$$

$$=e^{-sT}\int_{-T}^{\infty} f(t')\cdot 1(t')e^{-st'}dt'$$

由于 $t<T$，亦即 $t'<0$ 时，$f(t')\cdot 1(t')=0$，所以，积分下限可由 $(-T)$ 改取为 $0_-$，于是得

$$\mathscr{L}[f(t-T)\cdot 1(t-T)]=e^{-sT}\int_{0_-}^{\infty} f(t')\cdot 1(t')\cdot e^{-st'}dt'$$

$$=e^{-sT}F(s)$$

即　$\mathscr{L}[f(t-T)\cdot 1(t-T)]$

$$=e^{-sT}F(s)$$

作为时延性质的应用，让我们研究下例。

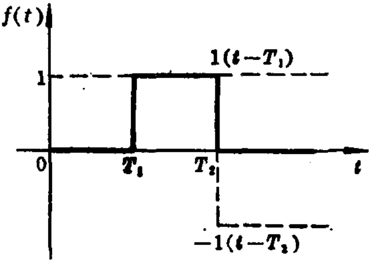

图　6-1

**例 6-4**　求图 6-1 所示矩形脉冲函数的拉普拉斯变换。

**解**：该脉冲可看成是两个延迟了的单位阶跃函数的合成，如图中所示，即 $f(t)=1(t-T_1)-1(t-T_2)$。于是，得

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[1(t-T_1)]-\mathscr{L}[1(t-T_2)]$$

$$=\frac{e^{-sT_1}}{s}-\frac{e^{-sT_2}}{s}$$

## 思考题

1. 试想一想，在表 6-1 所列拉普拉斯变换对中，都有哪些可以由本节所述基本性质直接进行互求？

2. 已知图 6-2(*a*)所示波形函数的拉普拉斯变换为 $1.5(1-e^{-2s})/s^2$，试问图 6-2(*b*)所示波形之函数的拉普拉斯变换是什么？

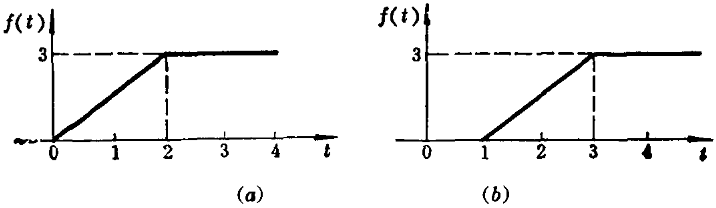

图　6-2

## 练习题

6-2. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $\sin(\omega t+\theta)$；　　(2) $\cos(\omega t+\theta)$；

(3) $e^{-a(t-3)}\cdot 1(t-3)$；　　(4) $(1-at)e^{-at}$

$$\left[\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2};\quad \frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2};\quad \frac{e^{-3s}}{s+a};\quad \frac{s}{(s+a)^2}\right]$$

## § 6-3 拉普拉斯反变换，进行拉普拉斯反变换的部分分式展开法

上两节讲了拉普拉斯变换及其基本性质，主要是解决如何由原函数求象函数的问题。但是，在对电路进行复频域分析的过程中，常常也需要由象函数求原函数，此称为拉普拉斯反变换，由下式表示，即

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

为了求反变换，有着一定的基本公式。关于此公式，在这里不需要作介绍，我们只讲电路中求反变换时较常用而简单的方法。

首先，可以想到的是，为了由象函数求原函数，可利用拉普拉斯变换表。例如，设

$$F(s)=\frac{6}{(s+3)^2}，由表 6-1 可得$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+3)^2}\right]=6\cdot te^{-3t}$$

但是，应当指出，在一般的拉普拉斯变换对表中，只是包含一些简单的形式，对于复杂形式，就不能直接由变换对表解决问题。遇到这种情况，我们就会自然地想到，是否通过某些数学处理，可使原来复杂的象函数分解成一些简单的基本象函数之和，然后根据拉普拉斯变换的线性性质，再通过查表，求出原函数来。下边讲的进行拉普拉斯反变换的部分分式展开法，就是属于在这种指导思想下由象函数求原函数的一种方法。

设象函数

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1s+a_0}{s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0} \qquad (6\text{-}16)$$

式中，$N(s)$和$D(s)$都是复频率$s$的多项式，前者为$m$次，后者为$n$次，并且所有系数都是实数。也就是说，$F(s)$是一有理多项分式。应当指出，我们的研究只限于$n>m$的情况。如果遇到其它情况，例如，$n=m$，则可使二多项式相除，得一常数项$a_m$，其余部分便是分母次数大于分子次数的多项分式了。为了便于掌握部分分式展开法，分成下面三种情形，分别进行讨论。

## 一、都是单根的情况

即多项式

$$D(s)=s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots b_1s+b_0=0$$

有$n$个不同的单实根，设分别以$s_1, s_2, \cdots, s_n$表示，则根据部分分式展开法，式(6-16)可改写为

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\\&=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\end{aligned}\tag{6-17}$$

式中，$K_1, K_2, \cdots, K_n$都是待定常数。很明显，当这些常数一旦确定，则$F(s)$的原函数便可立刻写出，即

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]\\&=\sum_{k=1}^{n}K_ke^{s_kt}\end{aligned}\tag{6-18}$$

如何确定各常数呢？讨论如下：

首先，为了确定$K_1$，可以$(s-s_1)$乘式(6-17)的两边，得

$$(s-s_1)\frac{N(s)}{D(s)}=K_1+(s-s_1)\left(\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\right)$$

令$s=s_1$，则等式右端除$K_1$一项以外，其余都为零，于是得

$$K_1=\left[(s-s_1)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=s_1}$$

一般而言，常数$K_k$由下式确定，即