

理论力学

(修 订 本)

邓危梧 裴家驹 梁智权 主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

全书共十二章。第一章是力的基本性质和计算以及物体受力分析;第二章至第四章为静力学,包括力系的简化与合成、物体的重心、力系的平衡、有摩擦的平衡问题;第五章和第六章为运动学,讲述点和刚体运动的解析法、复合运动法;第七章至第十二章为动力学,其中第七章至第十章为动力学的基本理论和基本方法,包括质点运动微分方程、动力学普遍定理、动静法、分析力学初步,第十一章和第十二章为动力学的应用专题。

本书可作为高等工业学校本科多学时类型专业(删减部分内容后,亦可作为中学时类型专业)理论力学课程的教材,也可供工程技术人员参考。

理论力学

(修订本)

邓危梧 裴家驹 梁智权 主编

责任编辑 曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆花溪印制厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:20.5 字数:512千

1994年1月第1版 1996年2月第2版 1996年2月第1次印刷

印数:6001—11000

ISBN 7-5624-1145-X/O·129 定价:16.80元

(川)新登字 020号

第一版前言

本书是按照 1980 年教育部组织制订的高等工业学校多学时类型专业的《理论力学教学大纲》编写的。现在,参照国家教委组织制订的高等工业学校 100~110 学时(多学时)类型专业《理论力学课程教学基本要求》,进行了修改和补充。可作为高等工业学校本科多学时(删减部分内容后亦可供中学时)理论力学课程的试用教材,也可供有关工程技术人员参考。

本书的编写,旨在加强基本理论及其应用,使学生能更好地掌握理论力学的基本理论,并能应用这些理论去处理工程中的力学问题。因此,本书从改变传统的教材体系入手,以“方法”为主线来组织教学内容,在基本理论的叙述上,力求做到清晰、简练,避免繁琐的论证和叙述;注意讲清基本理论以及它作为“方法”在应用上的特点;处理好与相关课程(特别是物理课)的关系,并根据当前学生的实际水平适当提高起点。因此,本书在内容、体系和叙述方法等方面,都和当前已出版的教材有所不同。特别是在静力学的体系上,与传统的静力学体系更有明显的差异。

全书共十二章,分上、下两册出版。上册包括第一章至第六章:第一章介绍有关力的一些重要基本概念,力的基本性质、力的投影、力矩、力偶、约束及约束反力和物体的受力分析等。将这些在本书的各部分都会用到的力的重要基本概念集中起来,既可以加深对基本概念的理解和在计算上得到一定的训练,从而为后来学习静力学和动力学打下基础,又能有效地避免由于概念分散而造成的繁琐和重复。第二章至第四章为静力学,直接从空间一般力系的普遍情况出发,讨论了力系的简化、合成和平衡,而在平衡方程的应用时,则又以平面力系作用下物体体系的平衡为重点,这就使论证过程简练,重点突出。第五章和第六章为运动学,这里以“方法”为主线,分别用直接方法和间接方法(运动分解与合成法或复合运动法)讨论了点和刚体的运动,有助于加深对间接方法的认识和掌握。下册为第七章至第十二章,全部属动力学。其中前四章为动力学基本理论,每章所介绍的基本理论,同时又是一种解决动力学问题的途径或方法。这样,既介绍了基本理论,又突出了“方法”这个主题,而且每一方法的应用特点也便于比较,从而加深了对基本理论的理解。第十一章和第十二章,则分别讨论了工程中常见的两个动力学应用专题:单自由度线性系统的振动以及碰撞。

本书采用国际单位制。

为便于学习、复习和巩固,掌握要点,书中对重要概念、结论等,均特别加上框线;各章末附有小结,并选配有足够数量的习题,书末附有习题答案。

本书成书过程中,得到了重庆大学力学系的部分老师和杨绪灿教授、朱庆祥副教授、西南交通大学黄安基教授、昆明工学院屈维德教授、中国人民解放军后勤工程学院刘宏宝教授的大力支持,在此一并表示感谢。

限于编者水平,本书必然存在不少缺点和错误,恳请批评指正。

邓危梧
于四川轻化工学院

第二版前言

本书的第一版是由重庆大学出版社出版、邓危梧编著的《理论力学》，曾获四川省高等学校优秀教学成果二等奖。这次再版，注意收集和听取了使用过该书的各兄弟院校的意见，对全书的内容和文字等作了多处增删和修改，并重新编写了有的章节，使本版更加体现了本书以“方法”为主线来组织教学内容形成新的教材体系的特色。

为使本书修订工作做得更好，我们组成了编写组。编写组由四川轻化工学院邓危梧、裴家驹、梁智权，四川工业学院苏明泉，陕西工学院张宝中组成，由邓危梧、裴家驹、梁智权任主编。

本书虽经修改，但缺点错误仍属难免，敬请批评指正。

编 者

1994年7月

目 录

绪论	1
第一章 力的基本性质及其计算·物体受力分析	3
§ 1-1 力和刚性的概念	3
§ 1-2 力的基本性质	4
§ 1-3 力在轴上的投影	7
§ 1-4 力矩	10
§ 1-5 力偶和力偶矩	15
§ 1-6 约束与约束反力	17
§ 1-7 力学计算简图与受力图	23
本章小结	27
习题	28

静 力 学

第二章 力系的简化与合成·物体的重心	35
§ 2-1 汇交力系的合成	35
§ 2-2 力偶系的合成	36
§ 2-3 力的平移定理	37
§ 2-4 任意力系向任一已知点简化	38
§ 2-5 力系简化的最后结果	40
§ 2-6 平行力系的中心和物体的重心	43
本章小结	52
习题	53
第三章 力系的平衡	57
§ 3-1 力系的平衡条件和平衡方程	57
§ 3-2 平面力系平衡方程及其应用	59
§ 3-3 静不定问题的概念	64
§ 3-4 平面桁架的内力计算	64
§ 3-5 空间力系平衡方程的应用	68
本章小结	71
习题	72
第四章 有摩擦的平衡问题	81
§ 4-1 滑动摩擦	81
§ 4-2 滚动摩擦的概念	86
本章小结	88
习题	89

运 动 学

第五章 研究点和刚体运动的解析法	94
§ 5-1 确定点运动的几种方法	94
§ 5-2 用矢径法确定点的速度和加速度	98
§ 5-3 用直角坐标法确定点的速度和加速度	99
§ 5-4 用自然法确定点的速度和加速度	103
§ 5-5 刚体的基本运动	108
本章小结	116
习题	117
第六章 研究点和刚体运动的复合运动法	122
§ 6-1 复合运动法中的基本概念	122
§ 6-2 点的速度合成定理	123
§ 6-3 点的加速度合成定理	127
§ 6-4 刚体的平面运动分解为牵连平移与相对转动	134
§ 6-5 平面图形内任一点的速度	136
§ 6-6 平面图形内任一点的加速度	140
§ 6-7 刚体绕平行轴转动的合成	143
§ 6-8 刚体绕相交轴转动的合成	147
本章小结	149
习题	150

动 力 学

第七章 质点运动微分方程	161
§ 7-1 动力学基本定律与基本方程	161
§ 7-2 质点运动微分方程	163
§ 7-3 质点相对运动动力学基本方程	169
本章小结	172
习题	172
第八章 动力学普遍定理	178
§ 8-1 动力学普遍定理概述	178
§ 8-2 动量定理和质心运动定理	179
§ 8-3 动量矩定理	187
§ 8-4 动能定理·势力场和机械能守恒定律	201
§ 8-5 动力学普遍定理的综合应用	215
本章小结	217
习题	219
第九章 动静法	228
§ 9-1 惯性力与惯性力系的简化	228
§ 9-2 动静法	232
§ 9-3 转动刚体对轴承的动压力·动平衡的概念	235
本章小结	237

习题	238
第十章 分析力学初步	242
§ 10-1 约束的概念	242
§ 10-2 自由度数和广义坐标的概念	244
§ 10-3 虚位移与理想约束的概念	245
§ 10-4 虚位移原理	247
§ 10-5 用广义坐标表示质点系的平衡条件	251
§ 10-6 动力学普遍方程	253
§ 10-7 拉格朗日方程	254
本章小结	258
习题	259
第十一章 单自由度线性系统的振动	265
§ 11-1 单自由度振动系统的力学模型	265
§ 11-2 单自由度系统的自由振动	266
§ 11-3 阻尼对自由振动的影响	274
§ 11-4 单自由度系统的受迫振动	277
§ 11-5 减振与隔振的概念	283
§ 11-6 转子临界转速的概念	286
本章小结	287
习题	289
第十二章 碰撞	293
§ 12-1 基本概念	293
§ 12-2 恢复系数以及质点对固定面的碰撞	295
§ 12-3 两物体的对心正碰撞及其动能损失	297
§ 12-4 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用·撞击中心	301
本章小结	303
习题	303
习题答案	307

绪 论

理论力学是研究物体机械运动一般规律的学科。宇宙中的所有物质,都在不断运动着。运动,是物质不可分割的属性,它包括宇宙间所有事物的一切变化。例如物体在空间的位移、热、电磁现象、生命的成长和衰亡、社会的发展等等,都是物质运动的各种形态。物质最简单的运动形态,是它在空间相对其周围物体的位移,称为**机械运动**,在力学中简称**运动**。河水的流动,车辆的行驶,机器的运转,弹簧的变形等等,都是物体机械运动的实例。

理论力学研究的内容,是速度远小于光速的宏观物体的机械运动。它是以伽利略和牛顿所总结的物体机械运动的基本定律为基础。属于**古典力学**的范畴。其学科体系主要是在15~17世纪中逐步形成,后来又不断完善并有所发展。至于速度接近光速的物体和基本粒子的运动,古典力学的规律已不适用,而必须用相对论力学和量子力学的观点才能完善解决。但是,在一般工程实际问题中,即使是如航天以及火箭等尖端科学技术中的大量力学问题,用古典力学的方法来解决,仍然是既方便而又有足够的准确性。因此,古典力学至今仍有很大的实用价值。

要全面讨论物体的机械运动,就必然要研究机械运动的基本形式及其传递和转移,以及机械运动在传递和转移中物体与物体间的相互作用,也就是力。

机械运动及其传递和转移,在工程技术领域的各种实际问题中是极其普遍的。例如设计机器时,必然会遇到各种构件的强度、运动以及作用力的问题,也要考虑其传动、变速装置、振动等问题;对于发动机,就应仔细考虑其平衡和扭转等问题;对于起重运输机械、道路、桥梁、建筑结构等等,都有着强度、稳定、振动等大量的力学方面的问题。这些问题,有些可以直接应用理论力学的基本理论和方法去解决,有些较复杂的问题,则需要理论力学和其他专门知识共同来解决。而且,理论力学又是工科各专业都应学习的重要技术基础课之一,它和材料力学、机械原理、机械零件、流体力学等课以及一些专业课,都有非常密切的联系。也可以说,理论力学是学习这些课程的重要理论基础。由此可知,对工科院校的学生来说,学好理论力学是具有十分重要意义的,它将给今后的学习和工作打下必要的力学基础。

理论力学是随着生产发展的需要而逐渐形成和发展起来的。人们在生产实践中,不断积累知识,认识自然,改造自然,从而产生并发展了这门学科。我国是世界文明古国之一,远在商代(约公元前16~11世纪)即已进入奴隶社会,生产力已达一定水平。到春秋战国时代(公元前722~221年),农业、手工业、建筑、运输等方面都已有很大发展,在生产实践中已使用了杠杆、斜面、滑轮、车、磨、天平等工具,积累了很多力学知识。公元前5世纪,我国的科学著作《墨经》中,已经总结了人们在生产实践中积累的许多力学经验,其中有力的定义、杠杆的平衡、梁和绳索的挠曲等。由于当时生产力水平的限制,这些知识主要是静力学方面的。秦汉至隋(公元前221~公元618年),是我国力学史上的黄金时代。这时由于新的封建经济基础推动着生产的发展,从而推动我国科学的发展,力学原理也得到广泛应用。但到唐代以后,由于封建社会的生产关系逐渐阻碍了生产力的发展,唯心主义哲学以及宗教在思想领域中占统治地位,因而阻碍了我国科学的发展。即使如此,我国在力学上仍有较大的贡献,作为现代科学尖端的喷气推进技术,其原始形态就是我国在这个时期发现并加以应用的。直到14世纪,我国在力学上的一些成

就,也还是超过许多西方国家的。新中国成立以来,我国机械、汽车、船舶、航空、航天等现代工业技术,都逐步发展起来。随着我国生产的发展,科学技术也很快发展,并建立和发展了一系列新兴和尖端科学技术。原子弹、氢弹、导弹等的多次成功发射,卫星和同步通讯卫星的发射和准确回收等,都标志着我国科学技术已发展到了新的高度,力学研究也发展到新的水平。实现四个现代化,把我国建设成为高度民主和高度文明的社会主义现代化强国的宏伟目标,为我国力学的研究和发展开辟了更加广阔的前途。总之,力学的形成和发展也和其他学科一样,完全决定于生产的发展。人们在生产实践中不断认识和改造自然,科学也就不断得到发展。正如恩格斯在《自然辩证法》中所指出:“科学的发生和发展从开始起便是由生产所决定的”。当然,科学不仅是被动地适应生产的需要,科学的发展又为生产开辟了新的途径,引起新的生产需要,进一步促进生产的发展。因此,科学技术也是生产力,而且是第一生产力。

理论力学有着严密的逻辑系统,它和数学的关系非常密切,数学是力学的重要工具。在深入的研究和应用中,还需借助于计算机技术的帮助。处理力学问题的一般途径,是先将研究的问题抽象为**力学模型**,再按力学的基本原理和各力学量间的数学关系建立方程,进行求解和必要的实验。建立力学模型的抽象化过程是很重要的一步,它包含对所研究的问题和对象的认真周密的观察了解,确定问题的要点,明确问题中的主要和次要因素,以及哪些因素可以略去而不影响问题的研究等。在认识和分析的基础上建立起来的力学模型,是理想的模型而不是现象的再现,这种科学的抽象化模型、将更深刻地、集中地反映客观事物的本质。当然,力学模型的建立也并非绝对的。同一事物,同一问题,由于在不同情况下着重反映它本质的不同方面,因而也就可能建立起不同的模型。

根据工科专业的特点,本课程的内容将分为**静力学**、**运动学**和**动力学**三个部分。静力学主要研究力系的简化和平衡;运动学则是从几何的观点研究物体的运动,而不涉及影响物体运动的物理因素(如力、质量等);而动力学则将研究物体运动的变化与作用于物体上的力之间的关系。

第一章 力的基本性质及其计算·物体受力分析

§ 1-1 力和刚体的概念

一、力的概念

力是物体间相互的机械作用，其效应是使物体的运动状态发生变化和使物体产生变形。

力使物体运动状态发生变化的效应，称为力的**外效应**，而使物体变形的效应则称为力的**内效应**。在本课程中，主要是研究力的外效应。

应注意到，力总是一物体与另一物体间的相互作用，在对物体进行受力分析时，必须明确区分受力物体和施力物体。

实践表明，力对物体的作用效果，完全取决于力的大小、方向(方位与指向)和作用点这三个因素。这三个因素表明力是一个**定位矢量**。力的矢量在印刷时常用黑体字母表示，而力的大小则用普通字母表示。如图 1-1 中的 $\mathbf{F}$ 就表示力矢量， F 则表示力 F 的大小。在作图时，力矢的起点 A 表示力的作用点，力矢所在的直线 AA' 和箭头分别表示力的作用线和指向。而力矢的长度 AB 则按一定的比例尺表示力的大小。力的量度单位在国际单位制(SI 制)中是牛顿

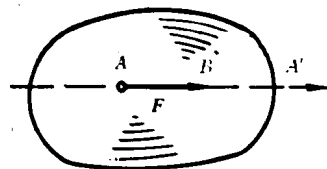


图 1-1

(N)或千牛顿(kN);在工程单位制中，则是千克力(公斤力)(kgf)或吨力(tf)而

$$1\text{kgf} = 9.81\text{ N}$$

本书主要采用国际单位制。

两个以上的力的集合，称为**力系**。两个不同的力系，如果它们对同一物体的作用效应完全相同，则这两个力系是等效的，它们互称为**等效力系**。

若一个力系对物体作用后，并不改变物体原有的运动状态，则该力系称为**平衡力系**。即平衡力系的外效应为零。

二、刚体的概念

刚体，是指在力作用下不变形(即任意两点间的距离保持不变)的物体。严格说来，实际上并不存在绝对的刚体，而这里所说的刚体，只是实际物体在一定条件下抽象的力学模型。在实际问题中，有很多物体的变形对所研究的问题影响很小而可忽略不计，这时实际的物体就可以抽象为刚体。但是，这种抽象不能绝对化，当物体的变形(即使是很微小)成为所研究问题的主

要方面而不应忽视时,则不应再抽象为刚体而应当成弹性体看待。例如在计算桥墩的受力时,一座桥梁就可视为刚体。但在讨论桥梁的振动问题时,则不论其变形大小如何,都必须把桥梁作为弹性体。在理论力学中,主要是研究力的外效应,故除个别特殊情况外,一般都把研究的物体抽象为刚体。若在研究的问题中,刚体的尺寸可以忽略不计时,则可抽象为质点来处理。

§ 1-2 力的基本性质

下面介绍有关力的几个基本性质,是从大量实践中总结出来的,其正确性是显见的,因而具有公理的性质。

一、二力平衡条件

刚体受两个力作用而处于平衡,其必要与充分条件是:二力大小相等,沿同一直线作用且指向相反。这常称为二力平衡条件。

满足此条件且作用于同一物体上的两个力,构成一个最简单的平衡力系。二力平衡条件对于刚体来说,既是必要的,也是充分的。但是对于变形体,它只是平衡的必要条件,而不是充分条件。例如在一条绳子的两端分别作用两个等值反向且沿绳子轴线的压力,虽然此二力满足二力平衡条件,但绳子也不可能平衡。

对于只受两个力作用而处于平衡的物体,称为二力体或二力构件。根据二力平衡条件可知:

二力构件平衡时,不论其形状如何,其所受的两个力的作用线,必沿两力作用点的连线。

二力构件上两个力的作用线必沿两力作用点的连线这一性质,在以后对物体进行受力分析时,常常是很有用的。例如图1-2(a)中的三铰拱,在力 F 作用下处于平衡,则 BC 部分就是二力构件。作用于 B 、 C 两点的力的作用线必沿两点的连线 BC ,如图1-2(b)所示。

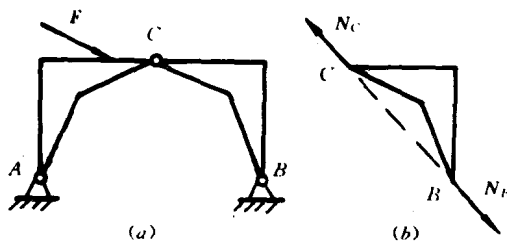


图 1-2

二、作用与反作用定律

任何两物体相互作用时,它们之间的

作用力与反作用力,总是大小相等,沿同一直线作用且指向相反,并分别作用在这两个物体上。

机械运动的传递与转移,总是通过相互作用而实现的。作用力与反作用力总是相互依存,

互为条件,同时存在,同时消失。掌握这一规律,对我们进行物体的受力分析是非常重要的。每一个力都要从相互作用的关系上去分析,每一个力都要明确其施力物体和受力物体,否则,就容易发生错误。如果一个物体同时和两个以上的物体相互作用时,就应分别地逐对分析其作用与反作用关系。例如图 1-3(a)为重 W 的球用绳子 AB 挂在铅垂墙上,球与墙在 C 点相靠。球、绳子和墙在 A 、 B 、 C 点所受的力,按作用力与反作用力的关系分别画在图 1-3(b)、(c)、(d)中。其中 T_A 和 T_A' 是分别作用在小球和绳子上的作用力和反作用力, T_B 和 T_B' 是分别作用在绳子和墙上的作用力和反作用力, N_C 和 N_C' 是分别作用在小球和墙上的作用力与反作用力,它们都是成对出现的。至于哪一个是“作用力”,哪一个是“反作用力”,则不是绝对的,而是将其中一个作为作用力,则另一个就是反作用力。

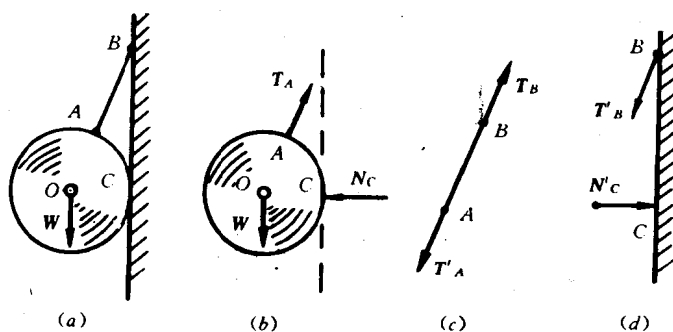


图 1-3

应当指出,作用力与反作用力并不作用在同一物体,而是分别作用在两个不同的物体上。所以对任一个物体来说,都不能把作用力与反作用力视为平衡力系,亦即它们不满足二力平衡条件。

作用与反作用定律,对于刚体或变形体都是同样适用的。

三、刚体上平衡力系的可加减性

在刚体上可以任意增加或去掉一个或多个平衡力系,而不会改变刚体原有的运动状态。

力的这一性质,对以后讨论力系的简化是很有用的。但是应当指出,这一性质对于变形体来说是不适用的。

四、力在刚体内的可传性

作用于刚体上的力,可沿其作用线任意移动而不会改变它对刚体的作用效应。

力的这一性质是显而易见的。如果应用上述刚体上平衡力系的可加减性,也容易从逻辑上

导出这一结论。

如图 1-4 的刚体, 在 A 点受力 F 作用, 若在力 F 的作用线上的 B 点增加一平衡力系 F' 、 F'' , 且使 $F = F' = -F''$, 则 F 与 F'' 又成为一平衡力系。将此平衡力系去掉后则得到作用于 B 点的力 F' 。而 $F = F'$, 且二力均沿同一作用线, 故即是将力 F 从 A 点沿作用线移到了 B 点。

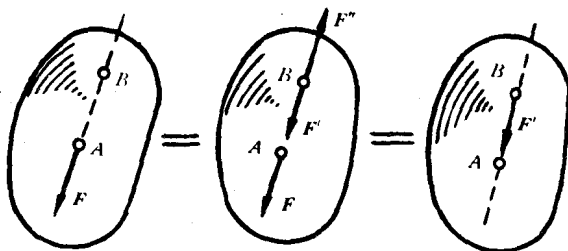


图 1-4

根据力在刚体内的可传性可知, 作用于刚体上的力的作用点, 可以用力的作用线来代替。于是, 作用于刚体上的力的三个因素是: 力的大小、作用线和指向。因而作用于刚体上的力是滑动矢量。

显然, 力的可传性只能适用于刚体, 而对于变形体则不适用。

五、力的平行四边形法则和平行六面体法则

如果用一个力去代替一个力系对刚体作用, 其效应完全相同, 则这个力称为该力系的合力; 而力系中的各力则称为分力。求力系的合力称为力的合成; 将一个力分成两个以上的力, 称为力的分解。

作用于物体上同一点的两个力 (称为汇交力) 的合成, 以及将一个力在其作用点分解成汇交的两个力, 可用力的合成与分解的基本法则——力的平行四边形法则。

作用于物体上同一点的两个力, 其合力作用点仍在该点, 合力的大小和方向由这两个力矢为邻边所构成的平行四边形的对角线矢来确定。这就是力的平行四边形法则。

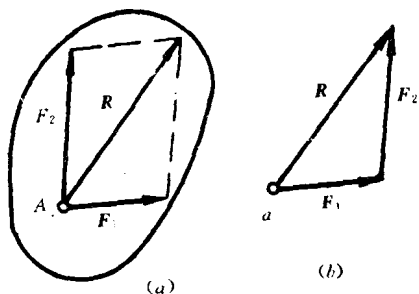


图 1-5

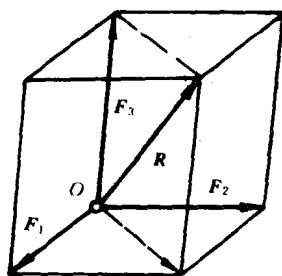


图 1-6

事实上, 平行四边形法则是一般矢量合成的基本法则, 而力也是矢量, 故确定合力的大小和方向就是求力矢的矢量和。如图 1-5(a) 中作用于 A 点的两个力 F_1 与 F_2 的合力为 R , 或写成如下

的矢量式

$$F_1 + F_2 = R$$

有时,我们并不需要画出完整的平行四边形,而只要如图 1-5(b)那样画出力三角形,即可求得合力 R 的大小和方向。

对于汇交于一点的空间三个力,根据力的平行四边形法则,即可得到求合力的平行六面体法则。即

空间汇交于一点的三个力的合力,作用点仍在汇交点,合力的大小和方向由这三个力矢为棱边的平行六面体的对顶线矢来确定。

如图 1-6 中汇交于 O 点的力 F_1 、 F_2 和 F_3 的合力为 R ,即有

$$F_1 + F_2 + F_3 = R$$

根据上述力的平行四边形和平行六面体法则,则易于将一力进行分解。例如可将一力在其作用点分解为两个已知方向的分力,或将一个力分解为汇交于其作用点的三个不共面的已知方向的分力等。

平行四边形法则和平行六面体法则,对于刚体和变形体都是适用的。但对于刚体,由于力的可传性,则不要求各力有同一的作用点,而只要它们的作用线相交于同一点即可。

§ 1-3 力在轴上的投影

在理论力学的计算中,常常需要计算力以及其他各种矢量(如力矩、力偶矩、速度、加速度、动量、冲量、动量矩等等)在轴上(特别是在直角坐标轴上)的投影。关于矢量在轴上投影的问题,在数学中已讨论过,但为了今后应用方便起见,我们再通过力这一矢量来说明它。

一、力在轴上的投影

设有力 F 与任一轴 x (有正负方向的直线),则力 F 在该轴上的投影 X 可这样求得:通过此力矢的始、末端 A 和 B 作 x 轴的垂线,这两条垂线与轴的交点 a 和 b 间的线段 ab 就是 X ,如图 1-7 所示。力在轴上的投影是代数量,其正负则视 ab 的指向与轴的正向是否一致而定。如图 1-7(a)中力 F 的投影 X 应为正;而图 1-7(b)中力 F 的投影 X 则应为负。

若经过力 F 的作用点 A 作平行于 x 轴的直线,则图中的角 α 就表示力与投影轴正向间的夹角。于是得

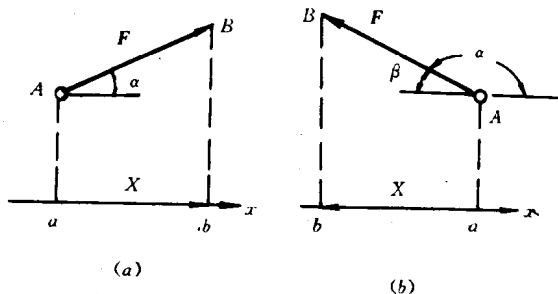


图 1-7

力在轴上的投影，等于该力的大小与力矢和投影轴正向间夹角的余弦的乘积。即

$$X = F \cos \alpha$$

上式虽然具有普遍性，但当角 α 不是锐角时(图 1-7b)，计算不甚方便。此时，

$$X = F \cos \alpha = F \cos(180^\circ - \beta) = -F \cos \beta$$

式中 β 为力 F 与投影轴所夹的锐角。因此，在实际计算力的投影时，通常是先用力模乘以该力与投影轴间所夹锐角的余弦，然后再按该力在轴上的投影是否与轴的正向一致而决定其正负号。

二、力在坐标轴上的投影及力沿坐标轴分解

设有作用于刚体上 O 点的力 F ，它与直角坐标系 $Oxyz$ 的三个坐标轴之间的夹角 α, β, γ 是已知(图 1-8)，则按上述定义，该力在三个坐标轴上的投影 X, Y, Z 应为

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha \\ Y &= F \cos \beta \\ Z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

它们都是代数量，其符号分别由三个方向余弦的符号来确定。在实际计算时，也常用 F 的作用线与各坐标轴所夹锐角来代替 F 的三个方向角 α, β, γ ，然后再按各投影是否与其投影轴(坐标轴)的正向一致来决定其正负号。

若用平行六面体法则将力 F 沿各坐标轴方向分解(图 1-8)， i, j, k 分别表示沿 x, y, z 轴方向的单位矢量，则

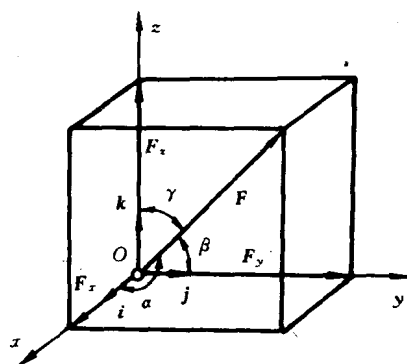


图 1-8

力沿坐标轴的分解式为

$$F = F_x + F_y + F_z = Xi + Yj + Zk \quad (1-2)$$

其中

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

而 X, Y, Z 则由(1-1)式确定。

由(1-2)式可知，在直角坐标系中，一力沿坐标轴方向分解的三个分力，正好与该力在三个坐标轴上的投影一致。但应当注意，力的投影与力沿某轴方向的分力是不同的两个概念，除直角坐标系之外，在其他情况下这两者并不是一致的。

在空间力系问题中计算力在轴上的投影时，常常还会遇到力与某轴之间的夹角不易求得，这时就可采用二次投影法。即先将力投影到包含此投影轴的某一平面上，得到一力矢量，然后再将此力矢量投影到该轴上。如图 1-9 所示的力 F ，已知角 γ 和 φ ，则力 F 在各坐标轴上的投影分别为

$$X = F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi$$

$$Y = F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi$$

$$Z = F \cos \gamma$$

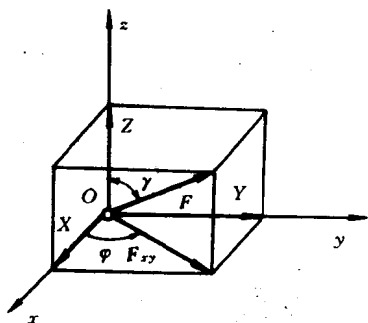


图 1-9

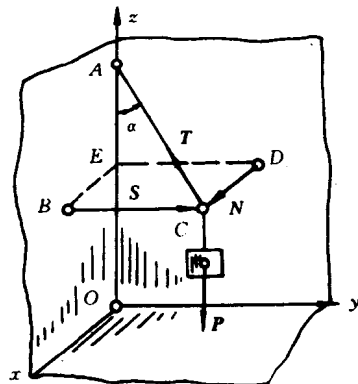


图 1-10

关于力在坐标轴上投影的计算,是力学中大量而基本的运算,读者必须熟练掌握。

例 1-1 用绳子 AC 和两根等长直杆 BC 、 DC 吊挂重 P 的重物(图 1-10)。已知 $BCDE$ 为一正方形,且此平面位于水平。坐标面 O_{xz} 和 O_{yz} 为互相垂直的铅垂墙面,绳子 AC 与铅垂线的夹角 α 为 25° 。各力大小是: $P=100\text{N}$, $T=110\text{N}$, $N=S=32.9\text{N}$ 。求各力在图示各坐标轴上的投影。

解 根据题设条件,除力 T 在 x 、 y 轴上的投影应用二次投影法外,其余各力在各坐标轴上的投影均可直接按(1-1)式进行计算。于是得各力在 x 轴上的投影分别为

$$X_P = 0$$

$$X_T = -T \sin \alpha \sin 45^\circ = -110 \sin 25^\circ \sin 45^\circ = -32.9 \text{ N}$$

$$X_N = 32.9 \text{ N}$$

$$X_S = 0$$

各力在 y 轴上的投影分别为

$$Y_P = 0$$

$$Y_T = -T \sin \alpha \cos 45^\circ = -110 \sin 25^\circ \cos 45^\circ = -32.9 \text{ N}$$

$$Y_N = 0$$

$$Y_S = 32.9 \text{ N}$$

各力在 z 轴上的投影分别为

$$Z_P = -100 \text{ N}$$

$$Z_T = T \cos \alpha = 110 \cos 25^\circ = 99.7 \text{ N}$$

$$Z_N = 0$$

$$Z_S = 0$$

例 1-2 长方体的尺寸如图 1-11 所示。在其顶点 A 和 B 处分别作用有力 $P=100\text{N}$ 和 $Q=50\text{N}$,其作用线与指向如图。求此二力在图示坐标轴上的投影。

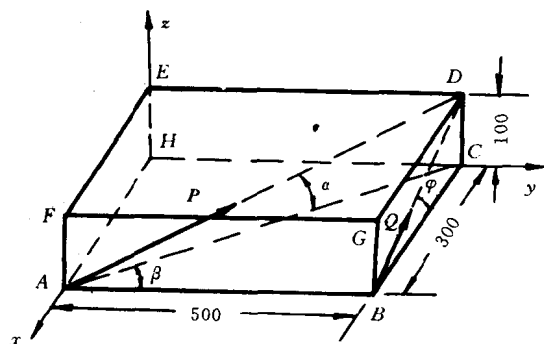


图 1-11

解 由长方体的几何关系以及题设条件,即可得

$$X_P = -P \cos \alpha \sin \beta$$

$$= -P \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{AC} = -100 \times 300 / \sqrt{500^2 + 300^2 + 100^2}$$

$$= -50.7 \text{ N}$$

$$Y_P = P \cos \alpha \cos \beta = P \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AB}{AC}$$

$$= 100 \times 500 / \sqrt{500^2 + 300^2 + 100^2} = 84.5 \text{ N}$$

$$Z_P = P \sin \alpha = P \cdot \frac{CD}{AD} = 100 \times 100 / \sqrt{500^2 + 300^2 + 100^2}$$

$$= 16.9 \text{ N}$$

$$X_Q = -Q \cos \varphi = -Q \cdot \frac{BC}{BD} = -50 \times 300 / \sqrt{300^2 + 100^2}$$

$$= -47.4 \text{ N}$$

$$Y_Q = Q \cos 90^\circ = 0$$

$$Z_Q = Q \sin \varphi = Q \cdot \frac{CD}{BD} = 50 \times 100 / \sqrt{300^2 + 100^2} = 15.8 \text{ N}$$

§ 1-4 力 矩

力对物体作用的效应,有平移和转动两种。力的平移效应由力矢量的大小和方向来决定,而力的转动效应,则决定于力矩。

一、力对点的矩

力对点的矩,是力使物体绕某点(称为力矩中心,简称矩心)转动效应的量度。实践表明,力使物体绕某点转动的效应,取决于:(一)力的大小以及矩心到力作用线的距离(称为力臂);(二)力和矩心所组成的平面的位置;(三)力使物体绕矩心转动的转向。在平面问题中,由于各力作用线与矩心均位于同一平面,故只要将力对点的矩作为代数量即可,即用力与力臂的乘积