9/24

高等学校教材

线性代数与空间解析几何

电子科技大学应用数学系 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/电子科技大学应用数学系编.—北京:高等教育出版社,2000(2001 重印)
ISBN 7-04-008584-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.电…　Ⅲ.①线性代数②立体几何:解析几何　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 22433 号

线性代数与空间解析几何
电子科技大学应用数学系　编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2000 年 8 月第 1 版
印　　张	11.625	印　　次	2001 年 7 月第 2 次印刷
字　　数	290 000	定　　价	12.00 元

前　　言

电子科技大学是国家工科数学课程教学基地建设单位，根据基地建设规划的要求，已出版了多部教材，《线性代数与空间解析几何》是其中的一本.本书是在该教材的基础上，根据21世纪科技人才素质的要求，吸取国内外改革教材的长处修改而成的，具有以下特点：

一、重视代数与几何的结合

本书将线性代数与空间解析几何的内容结合在一起，用代数方法解决几何问题，为代数理论提供几何背景.在讲几何空间向量的运算规则时，有意识地将它们按线性空间的八条公理形式表述，为线性空间的定义奠定几何基础.在介绍 n 维向量的线性相关性定义与性质时，特意介绍三维空间中的几何背景.在特征值与特征向量概念之后介绍相应的几何意义.用正交变换的方法处理二次曲面方程化简的问题.对线性空间的概念及基变换与坐标变换的问题都从几何意义上作出了相应的解释.对代数与几何的有机结合进行了大胆而有益的尝试.

二、将初等变换作为贯穿全书的计算工具

线性代数中解线性方程组、求矩阵的秩与逆、确定向量组的最大无关组与秩、矩阵的特征值与特征向量的计算、行列式的性质(保值初等变换)等等，都与矩阵的初等变换有着密切关系，因此本书将初等变换作为贯穿全书的一个基本计算工具.在第一章就尽早引出矩阵的行初等变换，利用行初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵与行简化阶梯形矩阵，然后研究初等变换的有关性质，使学生在计算过程中尽可能地使用初等变换.使用同一种计算手段解决不同类型的问题，更有利于计算过程与计算格式的程序化.在理论推导中多次使用矩阵的初等变换使推导过程更容易理解，同时使

理论推导与计算方法的介绍更加紧密且自然地结合在一起.

三、精选应用实例,安排数学实验

工科学生在学习数学课程之后应该了解数学的应用,学会用数学思维与方法分析和解决实际问题.本书对重要概念都尽可能地介绍应用背景,重要结果都尽可能地举出应用实例.应用范围涉及到经济、社会、生物、医学等学科领域,许多典型应用与数学建模结合起来.在某些应用性较强的章节后除编写了应用实例外,还安排了数学实验,培养学生建立数学模型,利用数学软件解决实际问题的意识与能力.

四、内容结构合理,可读性强,便于教学

本书既考虑到教学改革的发展与需要,又充分考虑到教学的实际情况与可能,将传统与现代,理论与应用进行了较好的结合.

本书在克拉默法则、矩阵可逆的等价条件、矩阵乘积的行列式等的证明中,采用了简便的处理方法.注意强调重要理论的内在联系,多次使用一系列等价命题的方式给出重要定理.将线性空间作为代数系统$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{P},+,\cdot)$来定义.将几何空间,$n$维向量空间到线性空间的概念从特殊到一般作了较好的铺垫.

本书的编者是:黄廷祝(第一、二、四章),成孝予(第三、五、六、七章).谢云荪教授对全书的内容体系与章节结构提出了十分宝贵的意见,对本书进行了全面的修改,并提供了部分应用实例与数学实验题目.本书由李正良教授、张志让教授、钟守铭教授主审,他们认真地审阅了全书,并提出了重要的修改意见.谨向他们表示衷心的感谢.刘金水副教授仔细地校阅了全书,电子科技大学应用数学系的教师们也对本书提出了许多修改意见,在此一并致谢.

编写具有改革新意的线性代数与空间解析几何教材,缺乏经验,限于水平,疏漏之处,恳请同行专家及读者提出宝贵的意见.

编 者

2000年1月

第一章　矩阵及其初等变换

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关,并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究.甚至有些性质完全不同的,表面上完全没有联系的问题,归结成矩阵问题以后却是相同的.这就使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的工具,因而也就成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象,尤其是随着计算机的广泛应用,矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础.

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵与分块矩阵,以及一些应用实例.

§1.1　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

在物资调运中,某类物资有3个产地、5个销地,它的调运方案可在表1.1中反映.

表　1.1　　　　单位:t

调运数 / 销地 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
Ⅰ	0	3	4	7	5
Ⅱ	8	2	3	0	2
Ⅲ	5	4	0	6	6

如果我们用 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4,5)$表示从第 i 个产地运往第 j 个销地的运量(如 $a_{12}=3,a_{24}=0,a_{35}=6$),这样就能把调运方案表简写成一个 3 行 5 列的数表

$$\begin{pmatrix}0 & 3 & 4 & 7 & 5\\8 & 2 & 3 & 0 & 2\\5 & 4 & 0 & 6 & 6\end{pmatrix}.$$

用这种数表来表达某种状态或数量关系,在自然科学、技术科学以及实际生活中也是常见的.这种数表我们称为**矩阵**.

定义 1　由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵,其中 a_{ij}表示第 i 行第 j 列处的元,i 称为 a_{ij}的行指标,j 称为 a_{ij}的列指标.

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$,或者$(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$表示矩阵.若需指明矩阵的行数和列数,常写为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

为一个 2×3 矩阵.

n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

的系数可以组成一个 m 行 n 列矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组的**系数矩阵**;而系数及常数项可以组成一个 m 行$n+1$ 列矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组的**增广矩阵**.我们将利用矩阵这一工具来研究线性方程组.

元全为零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或$\boldsymbol{O}$.如

$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $m=n$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为n **阶矩阵**(或 n **阶方阵**).

只有 1 行($1\times n$)或 1 列($m\times 1$)的矩阵

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

分别称为**行矩阵**和**列矩阵**.

若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的元$a_{ij}=0(i\neq j)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**,$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为 $\boldsymbol{A}$ 的**对角元**,记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,$

a_{nn}).如

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(-1,5)$$

为二阶对角矩阵.

对角元全为数 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**,n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}_n$,在不致混淆时也记为 $\boldsymbol{I}$,即

$$\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

形如

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵分别称为**上三角形矩阵**和**下三角形矩阵**.

二、矩阵的线性运算

矩阵是线性代数的基本运算对象之一,为了讨论矩阵的运算,我们首先给出矩阵相等的概念.

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,如果它们为同型矩阵,且对应元相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如

$$A=\begin{pmatrix}0 & x & -1\\ 3 & 4 & y\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}z & 3 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

如果 $A=B$,则立即得

$$x=3,\quad y=2,\quad z=0.$$

现在我们介绍矩阵的加法运算及矩阵与数的乘积.

设有两种物资(单位:t),要从三个产地运往四个销地,其调运方案分别为矩阵 A 和 B:

$$A=\begin{pmatrix}30 & 25 & 17 & 0\\ 20 & 0 & 14 & 23\\ 0 & 20 & 20 & 30\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 15 & 13 & 30\\ 0 & 40 & 16 & 17\\ 50 & 10 & 0 & 10\end{pmatrix},$$

那么,从各产地运往各销地两种物资的总运量是 A 与 B 的和,即

$$A+B=\begin{pmatrix}40 & 40 & 30 & 30\\ 20 & 40 & 30 & 40\\ 50 & 30 & 20 & 40\end{pmatrix}.$$

定义 2(矩阵的加法) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \quad 与 \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

是两个 $m\times n$ 矩阵,将它们的对应元相加,得到一个新的 $m\times n$ 矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

则称矩阵 C 是矩阵 A 与 B 的和,记为 $C=A+B$.

值得注意的是,只有同型矩阵才能相加,且同型矩阵之和仍为同型矩阵.如

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

A 与 B 不能相加.

设矩阵 $A=(a_{ij})$,若把它的每一元换为其相反数,得到一个矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**负矩阵**,记为 $-A$.显然有

$$A+(-A)=O.$$

利用矩阵的加法与负矩阵的概念,我们可以定义两个 $m\times n$ 矩阵 A 与 B 的**差**,即矩阵的**减法**:

$$A-B=A+(-B),$$

就是把 A 与 B 的对应元相减.

显然,$A-B=O$ 与 $A=B$ 等价.

下面介绍矩阵与数的乘积.

设从某四个地区到另三个地区的距离(单位:km)为

$$
\begin{array}{cc}
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 90 & 60 & 105 \\ 175 & 130 & 190 \\ 120 & 70 & 135 \\ 80 & 55 & 100 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \\ \text{Ⅳ} \end{array} . \\
\begin{array}{ccc} \quad\quad\text{甲} & \quad\text{乙} & \quad\text{丙} \end{array} &
\end{array}
$$

已知货物每吨公里的运费为 2.40 元,那么,各地区之间每吨货物的运费只要将 $\boldsymbol{A}$ 中每一元都乘上 2.40. 即得

$$
\begin{pmatrix} 216 & 144 & 252 \\ 420 & 312 & 456 \\ 288 & 168 & 324 \\ 192 & 132 & 240 \end{pmatrix}.
$$

矩阵与数的乘积的一般定义如下.

定义 3(矩阵的数乘)　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, k 是一个数,则称矩阵

$$
\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}
$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 k 的乘积(简称矩阵的数乘),记为 $k\boldsymbol{A}$.

也就是说,用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 中的每一元都乘以 k.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的**线性运算**.

容易证明,设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为同型矩阵, k, l 为数,那么矩阵的线性运算满足下列八条性质:

1°　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;

2°　$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

3° $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

4° $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

5° $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

6° $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

7° $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

8° $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\1&5&7&9\\5&4&-3&6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&5&-4&4\\5&1&9&7\\3&-2&1&8\end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7-3&5-(-1)&-4-2&4-0\\5-1&1-5&9-7&7-9\\3-5&-2-4&1-(-3)&8-6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&3&-3&2\\2&-2&1&-1\\-1&-3&2&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

三、矩阵的乘法

设甲、乙两家公司生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的计算机,月产量(单位:台)为

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}\text{Ⅰ}&\text{Ⅱ}&\text{Ⅲ}\end{array}&\\\begin{pmatrix}25&20&18\\24&16&27\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\text{甲}\\\text{乙}\end{array}\end{array}.$$

如果生产这三种型号的计算机每台的利润(单位:万元/台)为

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array},$$

则这两家公司的月利润(单位:万元)应为

$$\begin{pmatrix} 25\times0.5+20\times0.2+18\times0.7 \\ 24\times0.5+16\times0.2+27\times0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.1 \\ 34.1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array}.$$

可见,甲公司每月的利润为 29.1 万元,乙公司的利润为 34.1 万元.

矩阵的乘法的一般定义如下:

定义 4 设 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$, $p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$,则由元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义可知:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的列数必须等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘;

(2) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数;

(3) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 中第 i 行第 j 列元 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元对应乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\\2&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix},$$

求 AB, AD.

解

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}1\times1+2\times3+3\times2 & 1\times3+2\times1+3\times2\\3\times1+2\times3+1\times2 & 3\times3+2\times1+1\times2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}13&11\\11&13\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

AD 无意义.

例 3 对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{1.1}$$

若令矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

则

$$AX=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=b.$$

即方程组(1.1)可表为如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}.$$

矩阵乘法满足下列运算规律:

1° 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

2° 数乘结合律 $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$,$k$ 为数;

3° 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}.$$

这里只证明结合律,其他两条请读者自证.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times p$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $p\times s$ 矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 是 $m\times p$ 矩阵,$\boldsymbol{BC}$ 是 $n\times s$ 矩阵,故 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 都是 $m\times s$ 矩阵,因而是同型矩阵.

现在比较它们的对应元.

矩阵 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元为

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 i 行第 j 列元为

$$\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}\right)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{il}b_{lk}c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

由于双重求和符号可以交换次序,所以 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的对应元相等,故有

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}).$$

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

显然

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

在例 4 中,我们已经看出矩阵乘法一般不满足交换律,即一般

$$AB\neq BA.$$

当 $AB\neq BA$ 时,称 A 与 B **不可交换**,当 $AB=BA$ 时,称 A 与 B **可交换**.

从例 4 还可见,A,B 都是非零矩阵,但 $AB=O$.由此可知,矩阵的乘法不满足消去律,即 $A\neq O$ 时,由 $AB=AC$ 不能推出 $B=C$.事实上,由

$$AB-AC=A(B-C)=O,$$

不能推出

$$B-C=O.$$

矩阵乘法一般不满足交换律,但是,容易得到如下常用结果:

$$I_mA_{m\times n}=A_{m\times n},$$
$$A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}.$$

可见,单位矩阵在矩阵乘法中的作用与数 1 在数的乘法中的作用类似.

我们称

$$kI=\mathrm{diag}(k,k,\cdots,k)=\begin{pmatrix}k&&&\\&k&&\\&&\ddots&\\&&&k\end{pmatrix}\quad(k\neq0)$$

为**数量矩阵**.

n 阶数量矩阵 kI 与任意 n 阶矩阵 A 也是可交换的.这是因为

$$(kI)A=k(IA)=kA,$$

$$A(kI)=k(AI)=kA.$$

我们还可定义方阵的幂和方阵的多项式.

定义 5 设 A 是 n 阶方阵, k 为正整数,定义

$$\begin{cases} A^1=A, \\ A^{k+1}=A^kA, \quad k=1,2,\cdots. \end{cases}$$

由定义可以证明:当 m,k 为正整数时

$$A^mA^k=A^{m+k},$$
$$(A^m)^k=A^{mk}.$$

但需注意,一般

$$(AB)^k \neq A^kB^k.$$

定义 6 设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式, A 是 n 阶方阵,则

$$f(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I$$

称为方阵 A 的 k 次多项式.

由定义容易证明:若 $f(x),g(x)$ 为多项式, A,B 均为 n 阶方阵,则

$$f(A)g(A)=g(A)f(A).$$

但是一般情况下

$$f(A)g(B) \neq g(B)f(A).$$

例如

$$\begin{aligned}(A+3I)(2A-I)&=(2A-I)(A+3I)\\&=2A^2+5A-3I.\end{aligned}$$

这里要注意,一般来说