

中等专业学校教学参考书

三角与代数

人民教育出版社

51.24/110

中等专业学校教学参考书

三角与代数

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社出版

北京印刷一厂印装

新华书店北京发行所发行

1966年第一版 1978年9月第三次印刷

书号: 13012·0160 定价 0.44 元

目 录

三 角

第一章	直角三角形的解法	1
第二章	角的概念的推广、角的量法	14
第三章	任意角的三角函数	23
第四章	三角函数的图象和性质、正弦型曲线	50
第五章	斜三角形的解法	67
第六章	两角和、两角差、倍角的正弦与余弦	84
第七章	反三角函数和三角方程	98

代 数

第一章	二次函数、指数函数、对数函数	117
第二章	数列	143
第三章	计算尺	154

51.27
110
0.3

三角

第一章 直角三角形的解法

在初中几何中,我们学习过直角三角形的解法,并且应用它解决了一些有关测量和生产等方面的计算问题.解直角三角形的知识,在生产劳动和学习其他课程时经常用到,所以还需要作进一步的研究.

§ 1-1 三角函数表

在解直角三角形时需要知道任意锐角的三角函数值,它们可以在“四位数学用表”里的正弦、余弦、正切、余切表中查得(含有四个有效数字).反过来,由已知三角函数值也可以在表中查得所对应的锐角(准确到 $1'$).下面我们来说明这些表的用法.

1. 正弦表、余弦表(表 VII)

表的左边的直行的度数和上面横行的分数是查正弦用的;右边第四直行的度数和下面横行的分数是查余弦用的.一个角的度数所在的横行和分数所在的直行相交处的数,就是这个角的正弦或余弦的值.

例 1 查表求(1) $\sin 38^\circ 24'$ (2) $\cos 75^\circ 12'$ 的值.

解 (1) $\sin 38^\circ 24' \approx 0.6213^*$

(2) $\cos 75^\circ 12' = 0.2554$.

* 在本书里,凡查表所得的结果,都用“=”表示.

正弦表、余弦表的右边三直行是用来查修正值的。上面横行和下面横行中的 $1', 2', 3'$ 是角的修正值，中间的数字是函数值的修正值。观察表中数字的排列，可以看出正弦的值随着角的增加而增加，而余弦的值随着角的增加而减少。因此在查正弦时，已知角比表中的角大，就要把相应的函数值加上修正值，比表中的角小，就要减去修正值；而在查余弦时，角大，反而要减去修正值，角小，反而要加上修正值。

例 2 查表求 $\sin 25^\circ 20'$ 的值。

解

A	0'...	18'	...	60'		1'	2'	3'
25°	→	0.4274					↓ 5 (万分位)	

如表中箭头所示，得

$$\sin 25^\circ 18' = 0.4274$$

$$\begin{array}{r} + \quad 2' + 5 \\ \hline \sin 25^\circ 20' = 0.4279 \end{array}$$

例 3 查表求 $\cos 24^\circ 26'$ 的值。

解

		0.9107	←	24°		(万分位)	
		↑				2	
60'	...	24'	...	A	1'	2'	3'

如表中箭头所示，得

$$\cos 24^{\circ} 24' = 0.9107$$

$$\begin{array}{r} + \quad 2' \quad - \quad 2 \\ \hline \cos 24^{\circ} 26' = 0.9105 \end{array}$$

例 4 查表求锐角 α 的值: (1) $\sin \alpha = 0.9037$;

(2) $\cos \alpha = 0.4507$.

解 (1) $\because 0.9033 = \sin 64^{\circ} 36'$

$$\begin{array}{r} + \quad 4 \quad + \quad 3' \\ \hline 0.9037 = \sin 64^{\circ} 39' \end{array}$$

$$\therefore \alpha = 64^{\circ} 39';$$

(2) $\because 0.4509 = \cos 63^{\circ} 12'$

$$\begin{array}{r} - \quad 3 \quad + \quad 1' \\ \hline \therefore 0.4506 = \cos 63^{\circ} 13' \end{array}$$

从表中只能查得与 0.4507 最接近的数是 0.4506,

$$\therefore \alpha = 63^{\circ} 13'.$$

2. 正切表、余切表(表 IX、X)

正切表、余切表的查法和上面所说的大体相同. 查正切时, 已知角比表中的角大, 就要加上相应的修正值, 比表中的角小, 就要减去修正值; 查余切时, 角大, 反而要减去修正值, 角小, 反而要加上修正值.

例 5 查表求 (1) $\tan 75^{\circ} 34'$, (2) $\cot 9^{\circ} 57'$ 的值.

解 (1) $\tan 75^{\circ} 34' = 3.885$;

(2) $\cot 9^{\circ} 57' = 5.700$.

例 6 在民兵防空阵地上空 300 米处发现敌机一架, 机身长 20 米, 如果射击提前

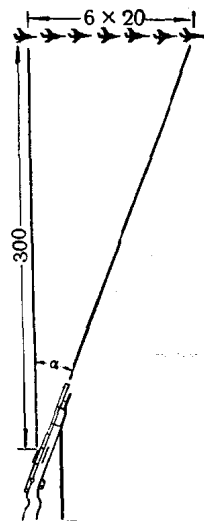


图 1-1

33591

量为 6×20 (米) (图 1-1), 步枪提前角多大时才能命中敌机?

解 从图上看,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \times 20}{300} = 0.4.$$

$$\therefore \alpha = 21^{\circ} 48'.$$

答: 步枪提前角 α 等于 $21^{\circ} 48'$ 时才能命中敌机.

习题 1-1

1. 查表求下列各三角函数值:

(1) $\sin 20^{\circ} 18'$, $\sin 17^{\circ} 44'$, $\sin 79^{\circ} 5'$, $\sin 4^{\circ} 34'$;

(2) $\cos 8^{\circ} 24'$, $\cos 50^{\circ} 27'$, $\cos 75^{\circ} 43'$, $\cos 86^{\circ} 28'$;

(3) $\operatorname{tg} 13^{\circ} 37'$, $\operatorname{tg} 28^{\circ} 57'$, $\operatorname{tg} 75^{\circ} 52'$, $\operatorname{tg} 89^{\circ} 43'$;

(4) $\operatorname{ctg} 72^{\circ} 17'$, $\operatorname{ctg} 29^{\circ} 27'$, $\operatorname{ctg} 16^{\circ} 35'$, $\operatorname{ctg} 3^{\circ} 59'$;

2. 查表求下列各三角函数值所对应的锐角:

(1) $\sin \alpha = 0.7071$, $\sin \beta = 0.7157$,

$\sin x = 0.3526$, $\sin y = 0.0568$;

(2) $\cos \alpha = 0.8290$, $\cos \beta = 0.8251$,

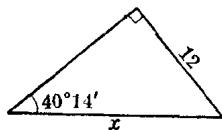
$\cos x = 0.2996$, $\cos y = 0.01$;

(3) $\operatorname{tg} \alpha = 2.220$, $\operatorname{tg} \beta = 31.82$,

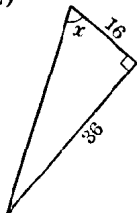
$\operatorname{ctg} x = 2.835$, $\operatorname{ctg} y = 180.9$.

3. 求图中的未知数 x .

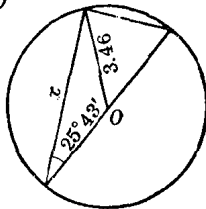
(1)



(2)



(3)

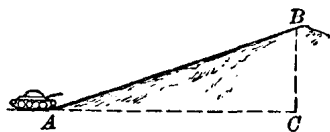


(第 3 题)

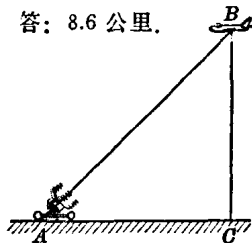
4. 一辆坦克准备通过一座小山。已知山脚和山顶的水平距离 AC 是 1550 米，山高 BC 是 565 米。如果这辆坦克能够爬 25° 的斜坡，它能不能通过这座小山？

5. 雷达探照灯的高低角 A 是 44.5° ，在距离显示器上看出敌机的斜距离 AB 是 12 公里，求敌机到探照灯的水平距离 AC 。

答：8.6 公里。



(第 4 题)



(第 5 题)

§ 1-2 直角三角形的解法

根据锐角三角函数定义、勾股定理以及直角三角形的两个锐角互为余角可以知道，直角三角形 ABC (图 1-2) 的边和角之间存在着下面的数量关系：

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a};$$

$$a^2 + b^2 = c^2; A + B = 90^\circ.$$

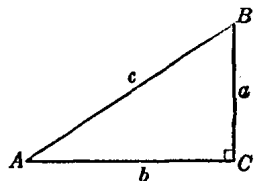


图 1-2

掌握了这些数量关系，就可以应用它们来解直角三角形和有关的实际问题。下面我们来看几个例子。

1. 比较简单的例子

例 1 在直角三角形 ABC 中，已知 $c = 27.5$, $a = 22.6$ ，求 b 、 A 和 B 。

$$\begin{aligned}\text{解 } b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{27.5^2 - 22.6^2} \\ &= \sqrt{245.5} \approx 15.7;\end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{22.6}{27.5} \approx 0.8218,$$

$$A \approx 55^\circ 16',$$

$$B = 90^\circ - A \approx 90^\circ - 55^\circ 16' = 34^\circ 44'.$$

例 2 在直角三角形 ABC 中, 已知 $c = 187.3$, $A = 62^\circ 30'$, 应用对数计算 B , a 和 b .

$$\text{解 } B = 90^\circ - A = 90^\circ - 62^\circ 30' = 27^\circ 30';$$

$$a = c \sin A = 187.3 \sin 62^\circ 30' = 187.3 \times 0.8870,$$

$$\lg a = \lg (187.3 \times 0.8870) = \lg 187.3 + \lg 0.8870,$$

$$\lg 187.3 = 2.2725$$

$$+) \lg 0.8870 = \bar{1}.9479$$

$$\lg a = 2.2204$$

$$\therefore a = 166.2.$$

$$b = c \cos A = 187.3 \cos 62^\circ 30' = 187.3 \times 0.4617.$$

应用对数进行计算, 得

$$b = 86.48.$$

例 3 已知锥体的大端直径 $D = 30$ 毫米, 锥度 $K = 1:5$, 锥体的长度 $L = 25$ 毫米, 求锥体的斜角 α 和小端直径 d (图 1-3).

解 (1) 求斜角 α .

在直角三角形 ABC 中,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}(D-d)}{L}$$

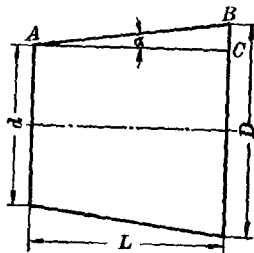


图 1-3

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{D-d}{L}.$$

根据锥度公式 $K = \frac{D-d}{L}$, 得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0.1,$$

$$\therefore \alpha = 5^{\circ} 43'.$$

(2) 求小端直径 d .

把 K, D, L 的值代入 $K = \frac{D-d}{L}$, 得

$$\frac{1}{5} = \frac{30-d}{25},$$

解方程, 得

$$d = 25(\text{毫米}).$$

答: 锥体的斜角 α 为 $5^{\circ} 43'$, 小端直径为 25 毫米.

例 4 有一个燕尾块(图 1-4), 其中燕尾角 $\alpha = 55^{\circ}$, 下端宽度 $l = 60$ 毫米. 加工时 l 的尺寸不易直接量得, 常用钢柱测量法进行检验, 就是用两个直径相同的钢柱放在燕尾角里, 用卡尺测量两钢柱的外围尺寸 y . 如果钢柱直径 $D = 10$ 毫米, y 等于多少时, 才能使 l 的尺寸符合要求?

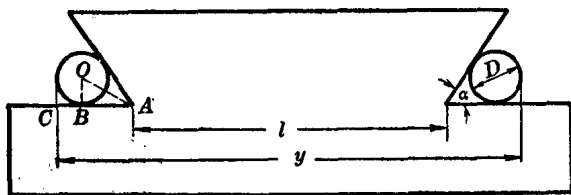


图 1-4

解 从图中看出要求 y 的长, 可以先求 AB 的长. 在直角三角形 ABO 中,

$$\angle OAB = \frac{\alpha}{2}, \quad OB = \frac{D}{2}, \quad AB = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= l + 2(AB + BC) = l + 2\left(\frac{D}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \frac{D}{2}\right) \\ &= l + D\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1\right), \end{aligned}$$

把 l, D, α 的值代入上式, 得

$$\begin{aligned} y &= 60 + 10(\operatorname{ctg} 27^\circ 30' + 1) = 60 + 10(1.921 + 1) \\ &= 89.21(\text{毫米}). \end{aligned}$$

答: 钢柱外围尺寸 y 等于 89.21 毫米时, 才能使 l 的尺寸符合要求.

习题 1-2

1. 解下列各直角三角形(C 角是直角):

(1) 已知 $c=300, A=36^\circ 52'$;

(2) 已知 $a=144, b=165$;

(3) 已知 $b=474, A=16^\circ 40'$ (用对数计算);

(4) 已知 $c=11.8, a=8.24$ (用对数计算).

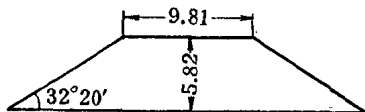
2. 已知等腰三角形的腰长为 17.2 厘米, 底角为 $45^\circ 20'$, 求它的顶角和底边.

答: 24.2 厘米.

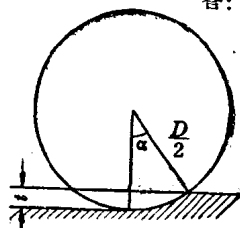
3. 一铁路路基的高为 5.82 米, 斜面与地平面的倾斜角为 $32^\circ 20'$, 路基上底宽为 9.81 米, 求路基下底宽.

答: 28.2 米.

4. 已知铣刀的直径 $D=200$ 毫米, 切削深度 $t=34$ 毫米, 求切削角度 α .



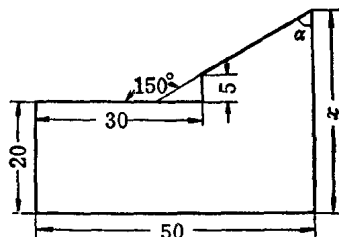
(第 3 题)



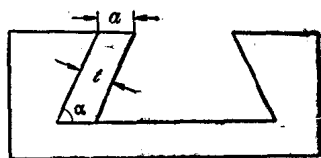
(第 4 题)

5. 一个工件尺寸如图(单位为毫米), 求角 α 和 x (准确到 1 毫米).

答: 37 毫米.



(第 5 题)

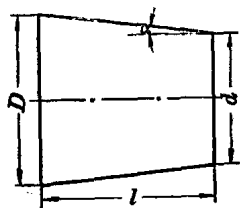


(第 6 题)

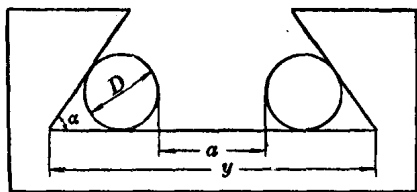
6. 已知燕尾槽的角 $\alpha = 65^\circ$, 镶条的垂直厚度 $t = 10$ 毫米, 求它的斜向厚度 a .

7. 已知锥体的小端直径 $d = 90$ 毫米, 长 $l = 120$ 毫米, 锥体的斜度 $M = 0.15$, 求锥体的斜角 α 和大端直径 D (斜度公式 $M = \frac{D-d}{2l}$).

答: $8^\circ 32'$, 126 毫米.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 已知燕尾槽的角 $\alpha = 55^\circ 29'$. 现在用两个相同直径 $D = 20$ 毫米的钢柱放在燕尾角里, 用卡尺测得钢柱的内围尺寸 $a = 41.58$ 毫米, 求宽度 y .

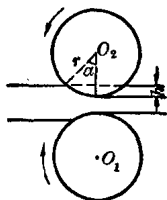
答: 99.60 毫米.

9. 轧钢时用两根转动的轧辊把钢压薄, 如果两轧辊的半径 $r = 150$ 毫米, 轧辊的压下量的一半 $h = 3$ 毫米, 求咬入角 α .

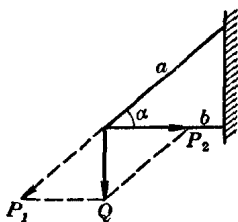
10. 重物 $Q = 900$ 公斤, 挂在支架上. 支柱 a 和 b 之间的夹角 $\alpha = 40^\circ$, 并且支柱 b 的位置是水平的, 求支柱 a 上的拉力 P_1 和支柱 b

上的压力 P_2 (准确到 100 公斤)。

答: 1400 公斤, 1100 公斤。

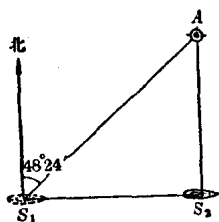


(第 9 题)

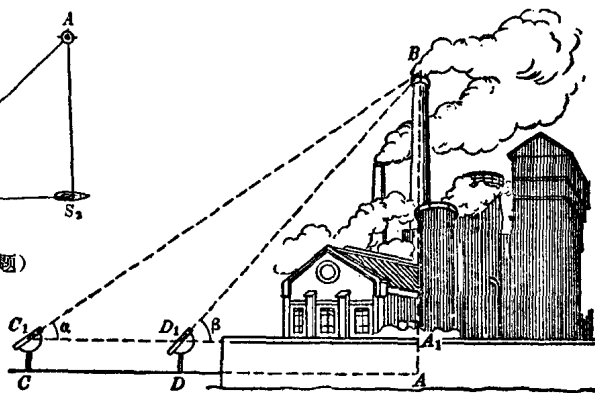


(第 10 题)

11. 一艘轮船向东航行, 速度是 12.6 浬/小时。上午 9 点钟在 S_1 点观察灯塔 A , 灯塔在轮船的正北偏东 $48^\circ 24'$ 的方向; 上午 11 点钟当轮船航行到 S_2 的地方再看灯塔, 灯塔正好在它的正北方向。求轮船和灯塔之间的距离 S_2A 。
答: 22.4 浬。



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 要测烟囱的高 AB , 从与烟囱在同一垂直平面内的地面上两点 C 、 D , 用测角器 C_1C 和 D_1D , 分别测得烟囱顶的仰角是 $\alpha = 35^\circ 12'$ 和 $\beta = 49^\circ 28'$, 设 CD 的长是 10.95 米, 测角器的高是 1.35 米, 求烟囱的高。

答: 20.8 米。

13. 在民兵防空阵地上空 300 米处发现敌机一架, 如果机身长 11.6

米,飞行速度约为 266 米/秒。我民兵用某种步枪向它射击,已知子弹飞行速度约为 800 米/秒,约提前几个机身射击才能命中敌机?

答: 9 个。

2. 比较复杂的例子

例 5 一个平均直径* $D=35$ 毫米的螺丝, 它的螺旋角 $\alpha=5^\circ$, 求导程 L (图 1-5)。

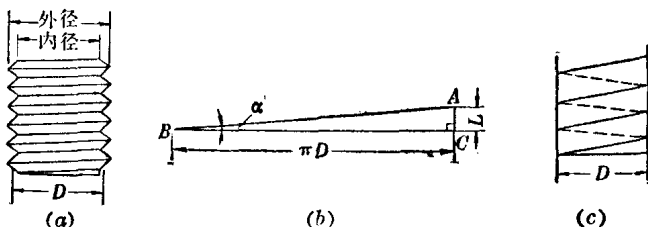


图 1-5

解 在直角三角形 ABC 中,

$$BC = \pi D, \quad \tan \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{L}{\pi D},$$

$$\begin{aligned} \therefore L &= \pi D \tan \alpha = 3.14 \times 35 \times \tan 5^\circ \\ &= 3.14 \times 35 \times 0.0875 \approx 9.62 (\text{毫米}). \end{aligned}$$

答: 导程 L 为 9.62 毫米。

例 6 已知工件的形状和尺寸如图 1-6(a)所示 (单位为毫米), 求角 α 。

解 如图 1-6(b), A 和 B 是两弧中心, A' 和 B' 是切点。作 $AD \parallel A'B'$, $AC \perp BC$, 连接 AB 。那么, 在直角三角形 ABC

* 把直角三角形绕在圆柱面上, 它的斜边就绕成螺纹 (图 1-5c)。因此把螺纹的一周展开就得到直角三角形 ABC (图 1-5b)。螺纹的平均直径 (即中径) $D = \frac{1}{2}$ (外径 + 内径) (图 1-5a)。螺旋角 α 是螺纹上升的角度。导程 L 是螺纹旋转一周后, 在轴线方向前进或后退的距离。

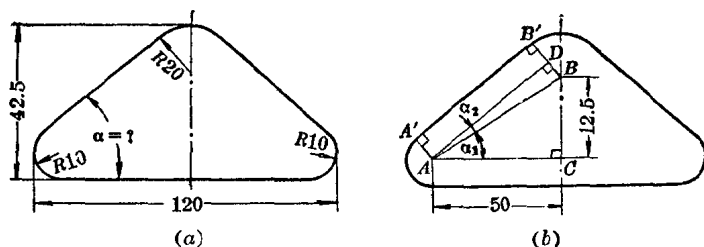


图 1-6

中, $AC = 60 - 10 = 50$,
 $BC = 42.5 - 10 - 20 = 12.5$,
 $\tan \alpha_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{12.5}{50} = 0.25$,
 $\therefore \alpha_1 = 14^\circ 2'$.

在直角三角形 ABC 中,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{50^2 + 12.5^2} = 51.54,$$

$$BD = 20 - 10 = 10,$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{BD}{AB} = \frac{10}{51.54} = 0.1940,$$

$$\therefore \alpha_2 = 11^\circ 11'.$$

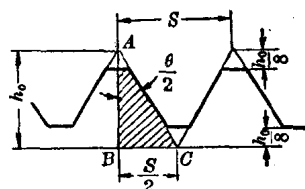
$$\therefore \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 14^\circ 2' + 11^\circ 11' = 25^\circ 13'.$$

答: 角 α 为 $25^\circ 13'$.

习题 1-3

1. 一个公制螺纹的平均直径 $D = 22.05$ 毫米, 导程 $L = 3$ 毫米, 求它的螺旋角 α .
 答: $2^\circ 29'$.

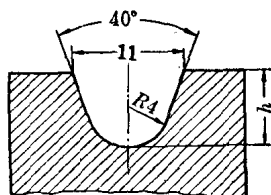
2. 一个公制螺纹的螺纹角 $\theta = 60^\circ$, 牙底和牙顶是平的. 已知螺距 $S = 2.5$ 毫米, 求螺纹深度 h .
 答: 1.6 毫米.



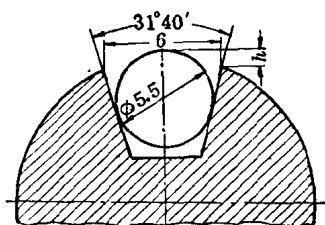
(第 2 题)

3. 求图示工件凹槽的深度 h (毫米)。

答: 7.4 毫米。



(第3题)



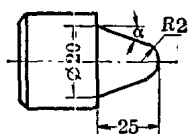
(第4题)

4. 加工光杠上的键槽时, 用一直径为 5.5 毫米的钢珠放入槽内测量深度 h , h 应为多少毫米时才能使槽口宽度达到 6 毫米 (准确到 0.01 毫米)?

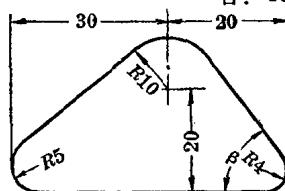
答: 2.25 毫米。

5. 已知某工件的形状和尺寸如图(单位为毫米), 计算角 α 。

答: $18^\circ 56'$ 。



(第5题)



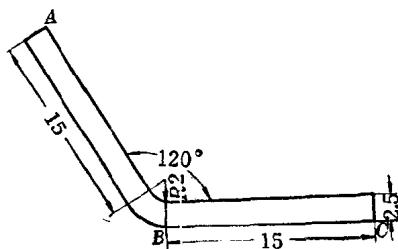
(第6题)

6. 已知某工件的形状和尺寸如图(单位为毫米), 计算角 β 。

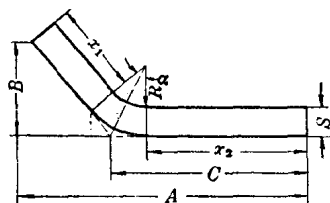
答: $60^\circ 22'$ 。

7. 已知工件的形状和尺寸如图(单位为毫米), 计算 A 点到 BC 的距离。

答: 16.5 毫米。



(第7题)

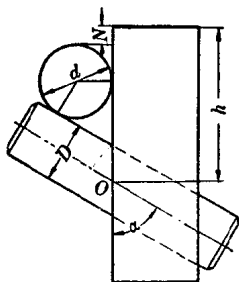


(第8题)

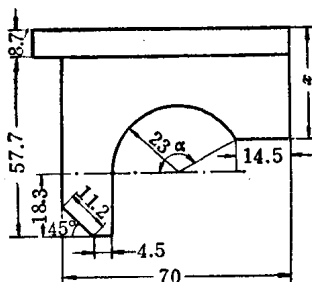
8. 已知工件的形状如图. 试以 A, B, C, α, R 和 S 表示 x_1 和 x_2 .

9. 一工件上的斜孔直径 $D=10.04$ 毫米, 轴线和平面夹角 $\alpha=60^\circ$, 用直径 $d=8$ 毫米的钢柱如图示方法测得距离 $N=3.32$ 毫米, 求孔中心 O 到工件边缘距离 h .

答: 20.05 毫米.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 已知工件的形状和尺寸如图(单位为毫米), 求距离 x 和角 α .

答: 37 毫米.

第二章 角的概念的推广、角的量法

§ 2-1 角的概念的推广

我们知道, 角可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的. 我们已经学过 0° 到 360° 的角. 在研究某些自然现象和工程技术问题时, 还需要大于 360° 的角的概念. 例如, 图 2-1 中蒸汽机的曲柄绕着轴旋转了一周后继续旋转的情况, 就需要有大于 360° 的角的概念.

我们还可以看到, 角的形成带有方向的现象. 例如, 图 2-2 是相互衔接的两个齿轮, 其中一个旋转一个角, 另一个也旋转一个角, 但是它们旋转的方向是相反的. 为了研究或解