

高等学校教学参考书

机械设计基础

中 册

甘肃工业大学《机械设计基础》编写组编

人 民 教 育 出 版 社



高等学校教学参考书

机械设计基础

中 册

甘肃工业大学《机械设计基础》编写组编

人民教育出版社

本书共三篇十六章,分上、中、下三册出版。上册(第一篇)讲结构设计,包括机械原理、机械零件和公差的有关基本内容,便于读者尽早进行机械设计实践,以及在学习第二篇和第三篇时有较强的针对性。中册(第二篇)讲校核计算,包括静力学、材料力学以及机械原理和机械零件的有关内容,将力学理论与设计实践联系起来进行阐述。下册(第三篇)讲方案制订,主要是运用运动学和动力学的理论去指导设计新的机械。

本书可供工人、技术人员、有关七·二一工人大学和普通工院校学生参考。

本书由甘肃工业大学《机械设计基础》编写组集体编写,先后有二十多位同志参加,由汪朴澄同志主编,张静君同志校阅。

机械设计基础

中 册

甘肃工业大学《机械设计基础》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1978年2月第1版 1978年9月第1次印刷

书号 15012·065 定价 1.10 元

中册目录

第二篇 机械校核计标

第七章 机械受力分析及其应用1

第一节 引例1

第二节 基本知识2

一、机械中作用着哪些力2

二、力系和受力图3

三、平衡概念与平衡条件4

第三节 汇交力系平衡5

一、三力平衡5

二、汇交多力平衡6

三、平衡条件的坐标分解式9

第四节 力矩平衡13

一、引例13

二、力矩和力偶矩13

三、力矩平衡条件15

四、举例15

第五节 一般平面力系平衡18

一、平衡条件18

二、理论分析18

三、条件的力矩式19

四、举例20

第六节 应用举例31

一、破碎机方案比较31

二、简易吊车横梁支持方案比较31

三、曲柄压机类机械方案分析33

四、手动压力机设计要点34

五、增力夹具设计要点34

六、抛砂机升降机构方案改进35

第七节 摩擦的影响37

一、滑动摩擦37

二、转动关节中的滑动摩擦40

第八章 零件强度校核的基本知识47

第一节 受拉、压零件的强度校核47

一、内力和截面法47

二、应力和极限应力47

三、变形规律和应力计标48

四、安全系数与许用应力48

五、强度条件49

六、例49

第二节 交变应力作用下零件的强度校核51

一、引例51

二、交变应力的种类和循环特征 r53

三、对称循环交变应力下零件的强度校核53

四、脉动循环交变应力下零件的强度校核55

五、一般循环交变应力下零件的强度校核56

六、讨论59

第九章 元轴扭转与弯曲的基本理论62

第一节 引例62

第二节 扭转强度校核63

一、扭矩分析63

二、变形规律65

三、应力计标66

四、强度条件67

五、例 破碎机主轴扭转强度校核68

第三节 扭转刚度校核69

一、剪变形 γ69

二、扭角 ϕ70

三、阶梯轴 ϕ 的计标公式70

四、例 破碎机主轴扭转刚度校核71

第四节 弯曲强度校核71

一、支反力、梁的概念73

二、弯矩及弯矩图73

三、变形规律75

四、应力计标76

五、强度条件78

六、例 破碎机主轴弯曲强度校核78

第五节 弯曲刚度校核79

一、偏转角 θ 与挠度 y79

二、求 θ 与 y 的数积法80

三、求 θ 与 y 的作图法84

第六节 弯扭组合强度校核88

一、破坏原因88

二、应力分析89

三、强度条件	90
四、校核公式	91
五、例 破碎机主轴的弯扭组合强度校核	92
六、讨论	94
第七节 根据校核结果多改设计	94
第十章 轴与轴承校核	101
第一节 作用在轴上的力	101
一、胶带传动	101
二、直齿元柱齿轮传动	102
三、斜齿元柱齿轮传动	102
四、蜗杆蜗轮传动	103
五、元锥齿轮传动	104
六、滚动轴承对轴的支反力	105
第二节 空间力系平衡	106
一、基本知识	106
二、空间力系向一点简化	109
三、空间力系平衡条件	110
四、举例	111
第三节 空间问题化为平百问题	113
一、概述	113
二、支反力和内力的计标	113
三、变形的求法	113
四、叠加原理	114
第四节 轴承计标	114
一、滑动轴承	114
二、滚动轴承	117
第五节 举例	124
一、计标外载	124
二、求支反力	126
三、画内力图	127
四、强度校核	128
五、刚度校核	128
六、轴承校核	130
七、根据校核结果多改设计	131
第十一章 多支承轴的校核	137
第一节 静不定问题及其解法	137
第二节 举例	138
一、计标主动力并加以简化	138
二、求第三支反力	140

三、强度校核和刚度校核	142
四、讨论	143
第十二章 弯曲问题的进一步讨论	146
第一节 平百弯曲的基本特征	146
第二节 平百弯曲应力	147
一、应力公式推导	147
二、中性轴必通过截百形心	148
三、 J_w 与 W_w 的计标	148
四、举例	149
第三节 梁截百的经济形状、平行移轴定理	154
一、几种典型截百的比较	154
二、大型钢梁需设计成组合截百	156
三、平行移轴定理	156
第四节 平百弯曲变形	159
一、引例	159
二、公式由来	160
三、应用举例	164
第十三章 校核综论	174
第一节 基本知识	174
一、刚体和弹性体	174
二、静力学公理	174
三、材料力学研究方法	175
四、应力状态理论	175
五、强度理论	180
六、变形能和能另法	182
第二节 举例	184
一、机架螺栓组强度校核	184
二、装配应力计标	186
三、弯曲时梁内的剪应力分析	187
四、薄壁容口	190
五、厚壁筒	193
第三节 几种典型零件的强度公式	196
一、平键(半元键)	196
二、斜键	197
三、花键	198
四、齿轮	198
五、拉、压弹簧强度公式	201
六、拉、压弹簧刚度公式	202

第二篇 机械校核计标

图纸设计只是机械设计的初步,此外,还有许多问题需要研究。最基本的问题是:所设计的机械究竟如何?这主要要从以下两方面来分析:第一,机械中作用着哪些力?能不能把运动简图改进一下,使作用着的力小一些?第二,在确定力的作用下,机械中主要零件的强度够不够?是强度太大、浪费材料,还是强度太小、不够安全?如何进行多改?本篇的任务,就是研究这些问题,叫做机械校核计标。

第七章 机械受力分析及其应用

第一节 引 例

图 7-1 是某厂自制颚式破碎机的运动简图。开始设计时,仿照样机,肘板位置定得较陡(图示虚线),后来改成平坦一些。为什么要做这样的多改呢?

破碎机的颚咀里百,装满了需要破碎的矿石,因此,在动颚的整个工作段上,都将受到矿石的反挤压作用,所有反挤压作用合成起来,形成一个总的工作阻力 P 。因为动颚表面设计成元弧形,任何矿石的反挤压力都将通过这个元弧的中心 O , P 自然也通过 O ;又因颚咀下下担负较多的挤碎矿石的任务, P 必偏于动颚下下,粗略估计 P 的作用点就在动颚工作段偏下的三分之一

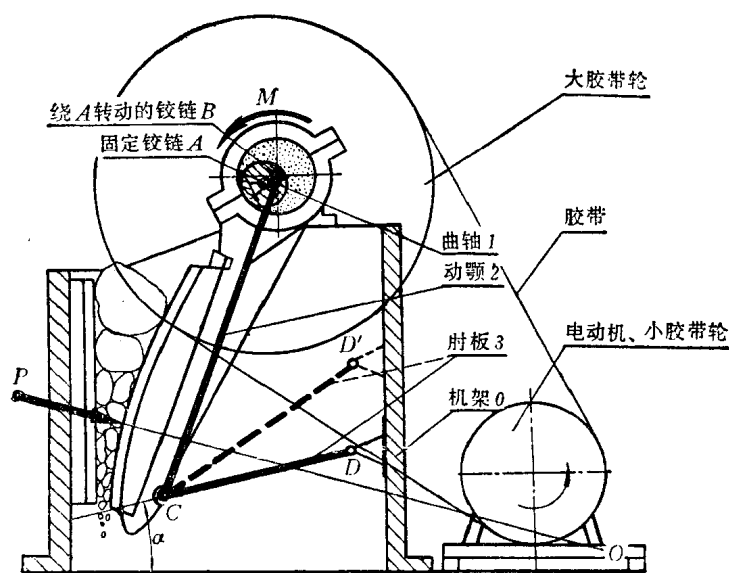


图 7-1 颚式破碎机运动简图

处; P 的大小,估计为43t。

动颚受到这样大的阻力,怎么还能运动?原来动颚是由曲轴带动的,而电动机又通过胶带机构将足够大的力矩传递到曲轴上,产生一个驱使曲轴旋转的力矩 M ,这就能克服 P 而使机口运转起来。 M 叫做原动力矩。

在 P 值确定的前提下, M 小一些好,因为小一些省劲,电动机可小一些,机械尺寸也可小一些。但是, P 这样大, M 可以小么?举一个例子,人力虽然只有几十斤,却可利用撬杠把几千斤重的机口抬起来;这就是工作阻力很大,原动力却很小。当然,撬杠的支点要放置得当,也就是运动简

图要合理,应当像图7-2a那样,如果是图7-2b的样子,就不行了。颚式破碎机有相似的情形:肘板角 α 越小, M/P 将越小,机口内下受力也越小,所以肘板要改得平坦一些。

可见,运动简图对机械受力有较大的影响,许多机械都有这类问题。要善于解决这类问题,必须掌握机械受力分析的基本理论和基本方法。

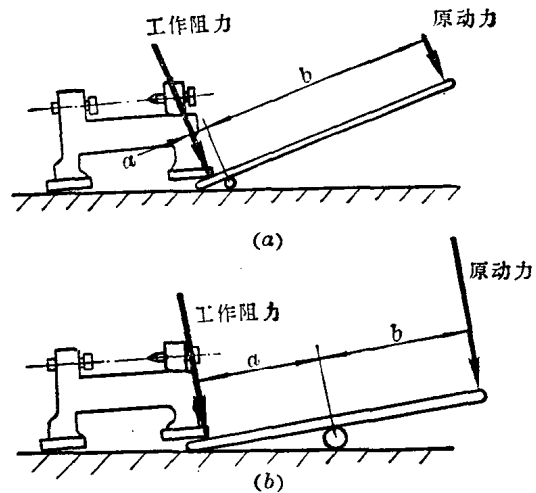


图7-2 用撬杠抬起重物的运动简图

第二节 基本知识

一、机械中作用着哪些力

1. 外力

机械与外界物体间的相互机械作用,叫做外力。如引例中所说工作阻力 P 和原动力矩 M ,就是外力;重力也是外力。因为外力要主动地改变机械的运动状态,所以也叫主动力。

一般说来,总有一下分外力是已知的。对于工作机械,已知的外力应当是工作阻力,如破碎机中就可估计 $P=43t$ 。可是,从设计计算方便出发,常先确定电动机发出的原动力矩 M :

$$M = 97500 \frac{N}{n} (\text{kg} \cdot \text{cm})$$

N (千瓦)为电动机功率, n (转/分)为主轴转速,它们的数值可在实验基础上用分析办法定出。

2. 关节力

机械内各构件通过关节所发生的相互机械作用,叫做关节力。因为关节的作用是使被联系的构件相互约束,故关节力又叫约束力或约束反力(约束物体给予被约束物体的反作用力)。

关节力的大小一般是未知(待求)的,但其方向或作用点可以通过分析关节的性质来确定。如常用的铰链关节(图7-3),它给予被联系构件间的约束,是阻止任何垂直于接触圆柱面的相对移动;至于顺着接触圆柱面的相互转动,若不计摩擦,则无限制。故铰链关节的关节力必与关节的接触圆柱面相垂直;也就是说,铰链关节力的作用线必通过铰链中心。

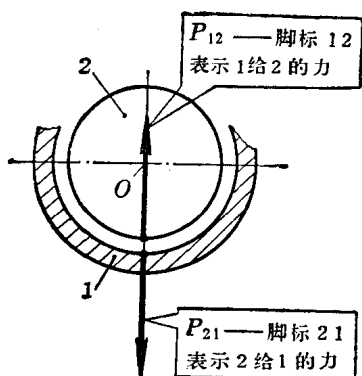
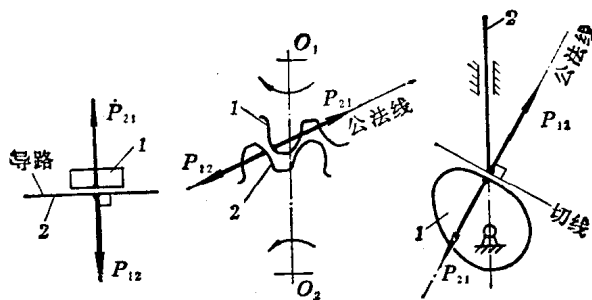


图 7-3 铰链关节力的作用线必通过铰链中心



(a) 移动关节

(b) 滚滑关节

图 7-4 移动关节力与滚滑关节力的作用线

机械中还常采用移动关节与滚滑关节。仿照上面的讨论可知（图 7-4）：移动关节力的作用线必垂直于移动关节的导路；滚滑关节力的作用线则沿着关节接触点处的公法线。

二、力系和受力图

受力分析的基本问题，是研究作用在同一构件（物体）上的外力的平衡。因此，为叙述方便，把作用在同一构件（物体）上的所有外力叫做力系。受力分析的基本问题，就可说是力系的平衡了。

按照力系中各力作用线的相互位置，力系可分为平面力系和空间力系两大类：各力作用线位于同一平面内的，叫平面力系；不在同一平面内的，叫空间力系。平面力系又可进一步细分为汇交力系、平行力系和一般平面力系三种。各力作用线汇交于一点的叫平面汇交力系，各力作用线相互平行的叫平面平行力系，各力作用线既不汇交又不平行的叫一般平面力系。空间力系同样可分为汇交力系、平行力系和一般力系三种。本章着重研究平面力系的平衡。

为研究方便，有时要单独画出（或显示出）所研究的构件，加上作用在此构件上的外力（主动力），并加上关节力以代替关节，这叫做构件的受力图（隔离体图）。例如图 8-5 所示破碎机的肘板 3，若略去影响较小的肘板自重，其上就只作用着两个力：一个是机架 0 通过铰链 D 给予的关节力 P_{03} ，它通过铰链中心 D；一个是动颚 2 通过铰链 C 给予的关节力 P_{23} ，它通过铰链中心点 C。单独画出肘板，把两个关节力也画上去，就是肘板的受力图。这种仅受两力的构件，在机械中经常会遇到，如简易吊车拉杆、柴油机连杆、砸铁机和剪板机的连杆等，为叙述方便，给起了个统一的名称，叫做两力构件。所有两力构件的受力图都是一样的。

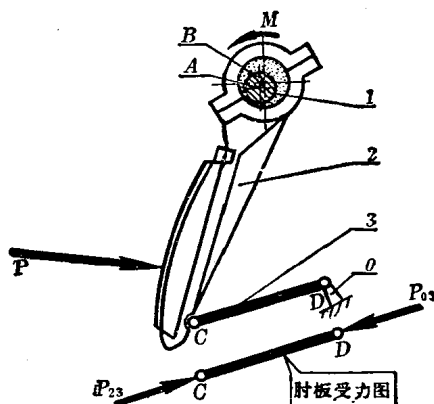


图 7-5 两力构件受力图

三力或多力构件受力图可同样画出，如图 7-6a 所示悬挂电灯的绳子结点 A 的受力图；b 图所示天车大梁的受力图；c 图所示运料小车的受力图等。

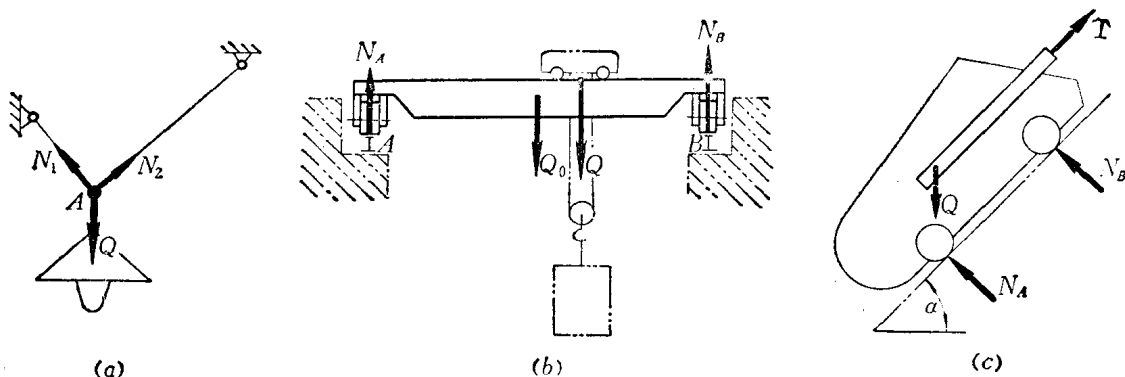


图 7-6 三力和多力构件受力图

三、平衡概念与平衡条件

1. 画两力构件受力图提出的问题

在两力构件的受力图中,两力为什么必须画在同一条直线上,而且是连接两力作用点的直线?

看图 7-5 中的肘板, 如果不把两力画在同一条直线上, 将不符合实际情况。实际情况有两条: (i) 肘板上只作用着两个力—— P_{03} 与 P_{23} , 这两个力相当大; (ii) 肘板相对机架(即地百)只是微微摆动, 不用费太大的劲去推它。根据这两条实际情况, P_{03} 与 P_{23} 的作用效果只能是相互抵消了。实践经验告诉我们, 作用在同一个物体上的两个力, 其效果是可以相互抵消的, 但必须大小相等、方向相反, 并且沿着同一条作用线。这就是为什么 P_{03} 与 P_{23} 必须画在同一直线上的道理。那末, 为什么非要是两个铰链中心 C 、 D 的连线呢? 因为 P_{03} 要通过 D 点, P_{23} 要通过 C 点, 它们又要在一条直线上, 当然就只能沿着 C 、 D 的连线了。

2. 平衡概念与平衡条件

上节所作的分析, 其实只是: 肘板运动状态不变, 故力系的作用效果必相互抵消。这句话虽然简单, 却包含着物体的平衡概念与平衡条件。

所谓运动状态不变, 即通常所说的物体平衡。有两种情形: 一种是物体静止不动, 速度为零, 如房屋固定在地百上, 机坐联接在地基上; 另一种是物体作等速直线移动或绕对称轴作匀速转动, 如车辆的等速直线运动, 机械主轴的匀速转动等等。

力系中各力的作用相互抵消, 就是力系合成效果——合力为零。这叫做力系平衡。作用于物体的力系的合力为零, 力系取得平衡, 物体才能平衡。这就是物体的平衡条件(也常说成是力系的平衡条件)。应用这个概念, 画两力构件受力图时迁到的问题, 就可归纳为两力构件的平衡条件: 两力构件如果平衡, 必须两力平衡, 即大小相等、方向相反、且在两力作用点的连线上。

3. 平衡条件的应用

实际上, 真正的平衡, 真正的运动状态不变, 是不存在的。一切平衡与不变, 都只是暂时的、相对的。

既然如此, 为什么在机械设计中还要研究平衡呢? 一方百, 多数构件近近平衡; 另一方百, 平衡是有条件的, 把近近平衡的构件当作平衡处理, 就可由平衡条件找出作用在它上面的各个力间

的关系,根据已知的力把未知的力求出来,解决机械设计中的实际问题。

例如上百所说肘板,它是变动的,但变动速度缓慢,近似平衡,认为它平衡,才由两力构件平衡条件确定出力的方向来;下百将要讨论的三力构件和多力构件平衡,也是这种情形。

第三节 汇交力系平衡

一、三力平衡

1. 画受力图提出的问题

如图 7-7 所示,破碎机的动颚上作用着三个力: P 、 P_{32} 和 P_{12} 。 P 的大小、方向和作用点都已知,可在图中画出。经过肘板的受力分析,定出 $P_{32}(=-P_{23})$ 的作用线将沿着直线 CD ,也可在图上画出。 P_{12} 则不一样,虽知其作用线必过铰链中心 B ,但方向不清楚,怎么画法? 说起来十分简单: 延长 P 与 P_{32} 的作用线,画出它们的交点 E , P_{12} 必过 E 点; B 、 E 连成一条直线, P_{12} 就画出来了。像这种作用在同一构件上而力线交于一点的许多力,叫做汇交力系,可是,动颚所受三力为什么汇交于一点呢?

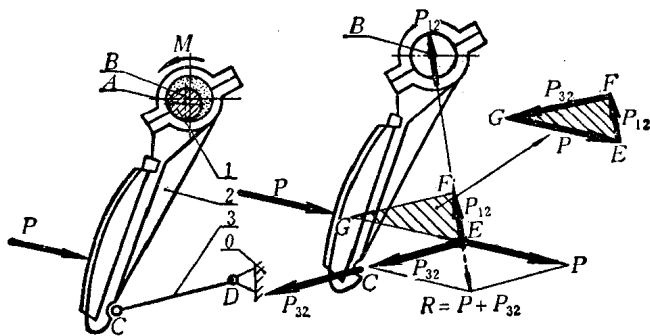


图 7-7 三力平衡规律

2. 三力平衡规律

将 P 与 P_{32} 沿作用线滑移^① 到交点 E 处。尽管 P_{32} 的大小还不知,但根据力合成与分解的平行四边形法则,它总可与 P 合成为一个通过 E 点的合力 R 。于是,原来动颚在三力作用下的平衡问题,就简化为 R 与 P_{12} 的两力平衡问题了。两力平衡条件我们是知道的,从而可知: P_{12} 必与 R 大小相等、方向相反、且作用在同一条直线上。此即是说, P_{12} 必然通过 E 点。由此得三力平衡定理: 作用在同一构件上的不平行的三力如果平衡,它们必位于同一个平面内,并汇交于一点。

仔细看图 7-7,如将 P 、 P_{12} 和 P_{32} 首尾相接地在图上画出来,必构成封闭三角形,就是图中的 $\triangle EFG$ 。于是又得三力构件平衡条件: 作用在同一构件上的汇交三力如果平衡,必依次首尾相接

^① 实践经验告诉我们,如果不是考文物物体变形,而只是研究其机械运动状态,力沿作用线滑移并不会改变它的作用效果。例如小车行在轨边上,不论是拉还是推,只要力的大小、方向与作用线都一样,使小车运动状态发生变化的效果是一样的。

构成一个封闭的力三角形。

3. 受力计标

在图 7-7 所示力三角形 $\triangle EFG$ 中, 已知 $P=43t$, 于是:

$$P_{12} = \frac{EF}{EG} \cdot P = \frac{8.7\text{mm}}{16.7\text{mm}} \times 43t = 22.5t$$

$$P_{32} = \frac{GF}{EG} \cdot P = \frac{15.1\text{mm}}{16.7\text{mm}} \times 43t = 39t$$

也可按力比例尺作图, 其步骤是(图 7-8)

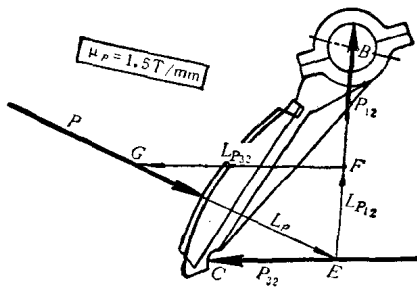


图 7-8 按力比例尺作图

(i) 根据具体情况, 选择力比例尺 $\mu_P = 1.5t/\text{mm}$, 表示每毫米长代表 $1.5t$ 大小的力;

(ii) 求出 P 的图示长度: $L_P = \frac{P}{\mu_P} = \frac{43t}{1.5t/\text{mm}} = 28.7\text{mm}$

(iii) 作图。先画 P , 即图中的 GE ; 然后画出整个力三角形。

(iv) 从图上另得 P_{12} 与 P_{32} 的图示长度: $L_{P12} = 15\text{mm}$, $L_{P32} = 26\text{mm}$ 。

(v) 计标 P_{12} 与 P_{32} :

$$P_{12} = L_{P12} \cdot \mu_P = 15\text{mm} \times 1.5t/\text{mm} = 22.5t$$

$$P_{32} = L_{P32} \cdot \mu_P = 26\text{mm} \times 1.5t/\text{mm} = 39t$$

二、汇交多力平衡

1. 平衡条件

如上所说, 汇交两力可以平衡, 但需大小相等、方向相反、首尾相接构成封闭图形; 汇交三力也可平衡, 平衡条件是三力首尾相接构成封闭三角形。由此推想: 作用在同一构件上的汇交多力是可以平衡的, 但必须各力首尾相接构成封闭多边形, 或者说力多边形自行封闭。这就是一般汇交力系的平衡条件。

2. 证明

(1) 汇交力系的合力 看图 7-9a, 设在某物体上的 o 点作用着一汇交力系 P_1, P_2, P_3, P_4 , 只须按三角形法则把各力依次相加, 使可求得力系合力的大小和方向。如 b 图, 任选取始点 a , 作 $\overline{ab}$ 代表 P_1 , $\overline{bc}$ 代表 P_2 , $\overline{ac}$ 就代表 P_1 与 P_2 的合力 R_1 , 即

$$R_1 = P_1 + P_2 = \overline{ac} \cdot \mu_P$$

再作 $\overline{cd}$ 代表 P_3 , 又得 R_1 与 P_3 的合力:

$$R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3 = \overline{ad} \cdot \mu_P$$

最后作 $\overline{de}$ 代表 P_4 , 得 R_2 与 P_4 的合力, 亦即整个力系的合力为:

$$R = R_2 + P_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \overline{ae} \cdot \mu_P$$

由作图过程可见: i) R_1, R_2 不必画出, 只要画出开口力多边形 $abcde$, 即可完成作图; ii) 变换力的次序(例如 b 图虚线), 将得不同形状的开口力多边形, 但封闭边不变, 即合力不变。

如果是包括 n 个力的汇交力系, 可同样求其合力, 只是力多边形的边数等于 n 。因此: 任取

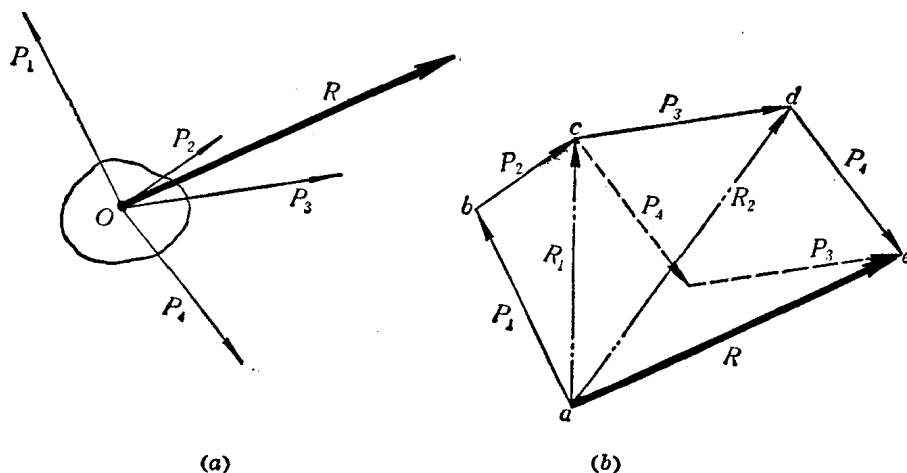


图 7-9 汇交力系的合力

个汇交力的合力，就是这些力首尾相接构成的开口力多边形的封闭边。合力的方向由多边形的始点指向终点；合力的作用点则是力系的汇交点。

(2) 力多边形封闭是合力为零的充要条件 若汇交力系平衡，必有合力为零，代表此合力的封闭边缩为一点，即始点与终点重合——力多边形自行封闭；反之，若力多边形自行封闭，则可保证合力为零。因此，力多边形自行封闭是汇交力系合力为零的充分必要条件，亦即平衡条件。

3. 举例

(1) 图 7-10a 所示接头受 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 作用而平衡，若已知 $P_1=200\text{kg}$ 、 $P_2=100\text{kg}$ 、 $P_3=100\text{kg}$ ，方向如图，试求 P_4 的大小和方向

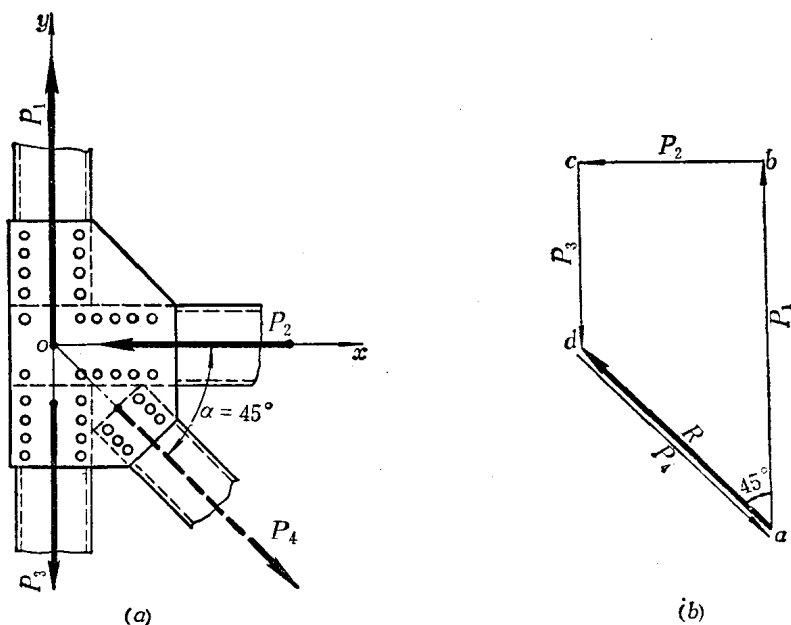


图 7-10 四力平衡

先求 P_1 、 P_2 与 P_3 的合力 R 。如 b 图，取力比例尺 $\mu_P=5\text{kg/mm}$ ，依次作 $ab=40\text{mm}$ 代表

$P_1, bc=20\text{mm}$ 代表 $P_2, cd=20\text{mm}$ 代表 P_3 , 从始点 a 指向终点 d 的矢另 $\overline{ad}$ 就代表 R , 从图上量出 $ad=28.2\text{mm}$, 得 $R=ad \cdot \mu_P=28.2 \times 5=141\text{kg}$ 。然后根据两力平衡条件, P_4 应与 R 大小相等, 方向相反, 故得 $P_4=-R$, 大小为 141kg , 方向由 d 指向 a 。

应用汇交力系平衡条件, 可省去求合力 R 的步骤而直接求出 P_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 四力平衡, 必构成封闭四边形, 由此得 $P_4=da \cdot \mu_P$ 。

(2) 图 7-11a 表示一重另为 Q 的筒体, 支在某自动焊转胎的两个滚轮上, 已知 $R+r=L$, 试求滚轮对筒体的支反力 N_1, N_2

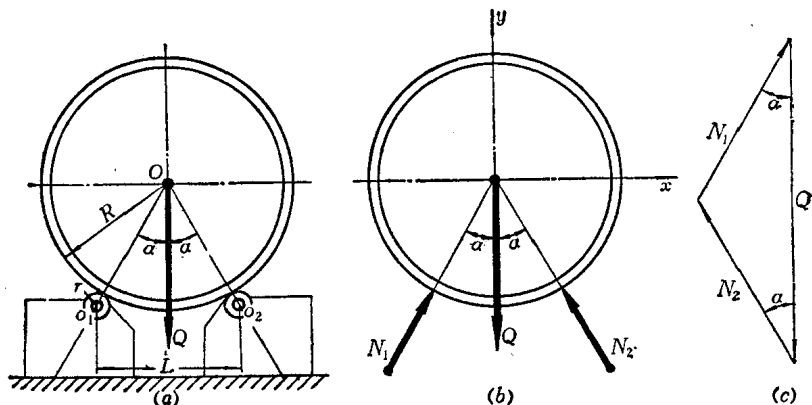


图 7-11 滚轮对筒体的支反力

取筒体为研究对象。略去摩擦, N_1, N_2 的作用线将分别与 OO_1, OO_2 重合, 故筒体所受三力 Q, N_1, N_2 汇交于 O 点, 受力图如 b 图所示。

根据汇交力系平衡条件, Q, N_1, N_2 必首尾相接构成一封闭形 (c 图); 又由给定的几何条件 $R+r=L, \triangle OO_1O_2$ 为一等边三角形, $\alpha=30^\circ$, 因此得:

$$N_1 = N_2 = \frac{0.5Q}{\cos 30^\circ} = 0.577Q$$

N_1, N_2 的方向如图所示。

(3) 在图 7-12a 所示三铰拱中, 已知铅垂力 Q , 试求 A, B 两处的支反力

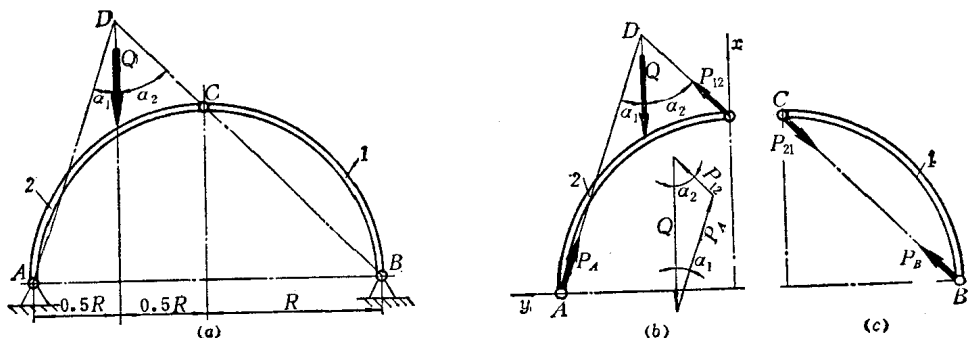


图 7-12 三铰拱的支反力

先取曲杆 1 为研究对象。其上作用着两个力, 一是支坐 B 给予的支反力 P_B , 另一是曲杆 2

通过铰链 C 给予的关节力 P_{21} 。根据两力平衡条件, P_B 与 P_{21} 大小相等、方向相反、且作用线和 BC 重合; 又根据受力情况判断, 曲杆 1 受压。于是可画出其受力图, 如 c 图所示。

再研究曲杆 2。其上作用着三个力: 一是已知的铅垂力 Q ; 二是曲杆 1 给予的铰链关节力 P_{12} , 因 $P_{12} = -P_{21}$, 故 P_{12} 的作用线可以画出, 它同 Q 力交于 D 点; 三是支坐 A 给予的支反力 P_A , 根据三力平衡定理, P_A 也将通过 D 点, 从而画出曲杆 2 的受力图如 b 图所示。又根据三力平衡条件, Q 、 P_A 、 P_{12} 必首尾相接构成一封闭三角形 (b 图), 故得:

$$P_A = \frac{Q \sin \alpha_2}{\sin (180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2)}; \quad P_{12} = \frac{Q \sin \alpha_1}{\sin (180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2)}$$

由给定的几何关系算出 $\alpha_1 = 18^\circ 24'$, $\alpha_2 = 45^\circ$, 代入上式得:

$$P_A = 0.79Q; \quad P_{12} = 0.353Q \text{ (即 } P_B = 0.353Q \text{)}$$

(4) 图 7-13a 按比例画出一个起重滑轮, 其支架夹角 α 取多少合适

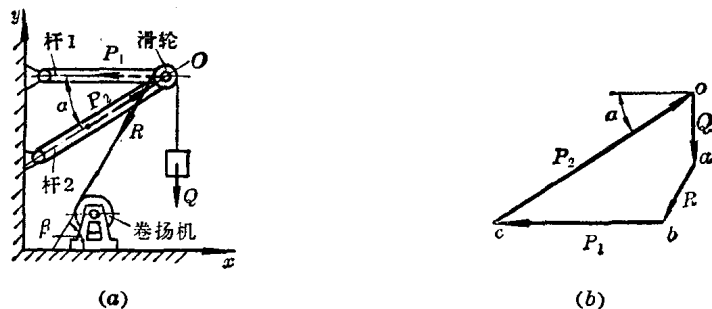


图 7-13 滑轮支架分析

滑轮上作用着四个力: 已知起吊重物的重力 Q ; 钢丝绳的拉力 $R (R=Q)$; 杆 1 给予的作用力 P_1 ; 杆 2 给予的作用力 P_2 。这四个力的作用线如图所示, 它们近似汇交于滑轮中心点 O , 因为不用考虑滑轮的转动情况, 故可当作一个平衡的四力汇交平衡力系。

根据汇交力系平衡条件, Q 、 R 和 P_1 、 P_2 将首尾相接构成一个封闭的力四边形。因此如图 7-13b 所示, 从某一点 o 开始, 按照比例画出已知的 Q 与 R , 得 R 的终点 b ; 分别过 o 与 b , 作杆 2 与 1 的平行线, 交于点 c ; 再按 Q 、 R 的顺序, 把 $oabc$ 联结起来, 就可定出 P_1 、 P_2 :

$$P_1 = \frac{bc}{oa} \cdot Q \text{ —— 是拉力}$$

$$P_2 = \frac{oc}{oa} \cdot Q \text{ —— 是压力}$$

从图形判断: α 小一些, 架子较紧凑, 但 P_1 、 P_2 很大; α 大一些, P_1 、 P_2 较小, 架子又欠紧凑。所以, 宜适中地取 $\alpha = 30^\circ \sim 45^\circ$ 。

三、平衡条件的坐标分解式

上述汇交力系平衡条件, 是以力矢量的图形表示为基础的, 称为平衡条件的几何式; 下节介绍条件的坐标分解式, 它要以矢量在坐标轴上的投影为基础。

1. 矢量在坐标轴上的投影

图 7-14 表示在平面直角坐标系 oxy 中的一个矢量 P , 过 P 的端点 A 、 B 分别作 ox 轴和 oy 轴的垂线, 得垂足 a_1 、 b_1 、 a_2 、 b_2 , 线段 a_1b_1 就是矢量 P 在 ox 轴上的投影, 记为 P_x ; 线段 a_2b_2 则是 P 在 oy 轴上的投影, 记为 P_y 。

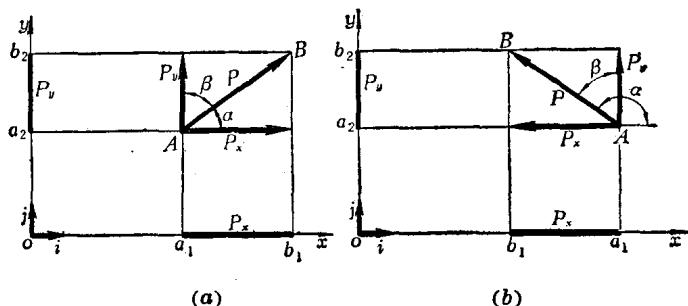


图 7-14 矢量在坐标轴上的投影

矢量在坐标轴上的投影是代数量, 符号规则如下: 线段的指向与坐标轴正向一致, 投影为正, 反之, 投影为负。例如 a 图中的 P_x 、 P_y 是正值, b 图中的 P_y 也是正值, P_x 则是负值。

由三角学可知, 矢量的大小 P 以及表示矢量方向的夹角 α , 及其投影 P_x 、 P_y 之间有下列关系:

$$\begin{cases} P_x = P \cos \alpha \\ P_y = P \sin \alpha = P \cos \beta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \\ \tan \alpha = \frac{P_y}{P_x} \end{cases} \quad (7-1)$$

这个关系不仅在大小上是正确的, 正、负号也同上述的规定相符合 (注意 P 恒为正值)。因此, 矢量在坐标轴上的投影, 等于矢量的大小乘以矢量与投影轴正向交角的余弦。

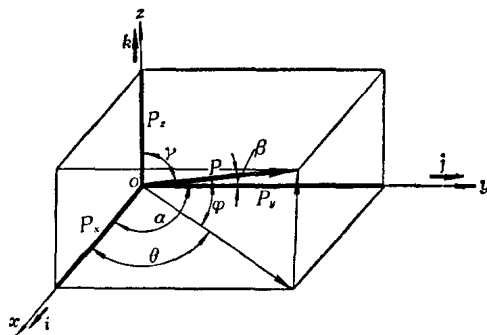


图 7-15 空间矢量在坐标轴上的投影

图 7-15 中的 P_x 、 P_y 、 P_z , 分别表示空间矢量 P 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影, α 、 β 、 γ 、 φ 、 θ 为有关角度。由图可见:

$$\begin{cases} P_x = P \cos \alpha = P \cos \varphi \cos \theta \\ P_y = P \cos \beta = P \cos \varphi \sin \theta \\ P_z = P \cos \gamma = P \sin \varphi \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \\ \cos \varphi = \frac{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}{P} \\ \cos \theta = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \end{cases} \quad (7-2)$$

根据公式 (7-1)、(7-2), 可由矢量的大小、方向求得它的投影; 也可由投影求得矢量的大小和方向。

2. 单位矢量、矢量的坐标分解式

如图 7-16 所示, 若作一矢量 P° , 其方向与已知矢量 P 相合而大小为 1, 则 P° 称为 P 的单位矢量。 P 和 P° 之间有下列关系:

$$P = P \cdot P^\circ \quad (7-3)$$

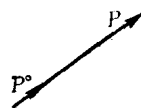


图 7-16 单位矢量

等式右边的符号 P 仅代表矢舅 $\mathbf{P}$ 的大小。这就是说，每一矢舅都可看成它的大小及其单位矢舅的乘积。

沿坐标轴正向的单位矢舅，叫做单位坐标矢舅。图 7-14、7-15 画出了 ox 轴、 oy 轴和 oz 轴的单位坐标矢舅，分别记为 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 。

根据平行四边形法则， $\mathbf{P}$ 可沿坐标轴 x 、 y 分解为分矢舅 $\mathbf{P}_x$ 、 $\mathbf{P}_y$ ：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y \quad (7-4)$$

分矢舅与矢舅投形它们是完全不同的概念，前者有方向，是矢舅；后者仅有正、负号，是代数舅。容易理解，对于直角坐标系，矢舅沿某坐标轴的分矢舅，等于矢舅对此坐标轴的投形同单位坐标矢舅的乘积，即： $\mathbf{P}_x = P_x \cdot \mathbf{i}$ ， $\mathbf{P}_y = P_y \cdot \mathbf{j}$ 。代入式(7-4)得：

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} \quad (7-5)$$

推广到空间矢舅，则

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \quad (7-6)$$

式(7-5)、(7-6)叫做矢舅的坐标分解式。

3. 汇交力系合成的坐标分解法

合力 R 应为力系中各力的矢舅和(图 7-17)：

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \dots$$

写出 $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_2$ 、 $\mathbf{P}_3$ 、 $\dots$ 在直角坐标系中的坐标分解式：

$$\mathbf{P}_1 = P_{1x} \mathbf{i} + P_{1y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{P}_2 = P_{2x} \mathbf{i} + P_{2y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{P}_3 = P_{3x} \mathbf{i} + P_{3y} \mathbf{j}$$

.....

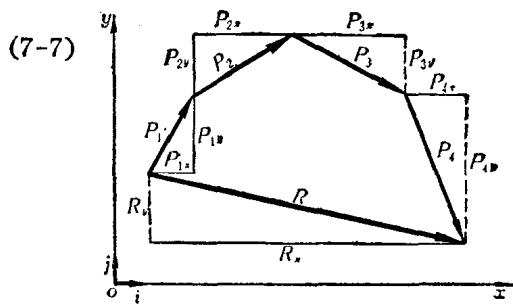


图 7-17 合力投形定理

代入式(7-7)有

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \dots = (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots) \mathbf{i} + (P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots) \mathbf{j}$$

应用连加符号 Σ ，可写作

$$\mathbf{R} = (\Sigma P_{ix}) \mathbf{i} + (\Sigma P_{iy}) \mathbf{j} \quad (7-8)$$

因

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

得

$$\begin{cases} R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots = \Sigma P_{ix} \\ R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots = \Sigma P_{iy} \end{cases} \quad (7-9)$$

推广到空间力系，则

$$\begin{cases} R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots = \Sigma P_{ix} \\ R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots = \Sigma P_{iy} \\ R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots = \Sigma P_{iz} \end{cases} \quad (7-10)$$

合力与分力投形间的这种关系，也可直接从图 7-17 中看出(图中的实线投形表示正值，虚线表示负值)。由此可见：合力在坐标轴上的投形，等于各分力在同一坐标轴上的投形之和。这叫做合力投形定理。

4. 汇交力系平衡条件的坐标分解式

汇交力系平衡, 即其合力 R 为零, 必有投影 $R_x=R_y=R_z=0$; 反之, 若 $R_x=R_y=R_z=0$, 则可保证合力 $R=0$ 而有力系平衡。因此, 汇交力系平衡的充分必要条件是(略去流动角标 i):

$$\begin{cases} R_x = \Sigma P_x = 0 \\ R_y = \Sigma P_y = 0 \\ R_z = \Sigma P_z = 0 \end{cases} \quad (7-11)$$

即力系中各力分别在三个坐标轴上的投影之和为零。这就是汇交力系平衡条件的坐标分解式, 它同条件的几何式是完全等价的。对于平汇力系, 因恒有 $R_z = \Sigma P_z = 0$, 故条件简化为: 力系中各力在力系平面的两个坐标轴上的投影之和为零, 即

$$\begin{cases} R_x = \Sigma P_x = 0 \\ R_y = \Sigma P_y = 0 \end{cases} \quad (7-12)$$

5. 举例

(1) 求图 7-10 所示平衡的平汇交力系中的未知力 P_4 由 $\Sigma P_x=0$, 有

$$-P_2 + P_4 \cos \alpha = 0, \quad P_4 \cos \alpha = P_2 = 100 \text{ kg}$$

由 $\Sigma P_y=0$, 又有

$$P_1 - P_3 - P_4 \sin \alpha = 0, \quad P_4 \sin \alpha = P_1 - P_3 = 200 - 100 = 100 \text{ kg}$$

联立以上两式解出:

$$P_4 = 141 \text{ kg}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

(2) 求图 7-11 中滚轮对筒体的支反力 N_1, N_2 因 N_1, N_2 与 Q 是一平衡汇交力系, 故由汇交力系平衡条件的坐标分解式有:

$$\Sigma P_x = 0, \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \quad N_1 = N_2$$

$$\Sigma P_y = 0, \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - Q = 0, \quad N_1 + N_2 = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

联立以上两式, 并代入 $\alpha = 30^\circ$ 得: $N_1 = N_2 = \frac{0.5Q}{\cos 30^\circ} = 0.577Q$

(3) 求图 7-12a 所示三铰拱的支反力 P_A, P_B 如图 7-12b, 因 P_A, P_{12} 与 Q 是一平衡汇交力系, 故有:

$$\Sigma P_x = 0, \quad P_{12} \cos \alpha_2 + P_A \cos \alpha_1 - Q = 0,$$

$$\Sigma P_y = 0, \quad P_{12} \sin \alpha_2 - P_A \sin \alpha_1 = 0,$$

联立以上两式, 并代入 $\alpha_1 = 18^\circ 24', \alpha_2 = 45^\circ$, 解得 $P_A = 0.79Q; P_{12} = 0.353Q$ (即 $P_B = 0.353Q$)。

(4) 求图 7-13a 所示滑轮支架中杆 1、2 作用于滑轮的力 P_1, P_2 因 Q, R, P_1, P_2 四力平衡, 故有:

$$\Sigma P_x = 0, \quad P_2 \cos \alpha - P_1 - R \cos \beta = 0$$

$$\Sigma P_y = 0, \quad P_2 \sin \alpha - Q - R \sin \beta = 0$$

联立以上两式, 解得: