目　　录

第 1 章　微积分的研究对象与理论基础 ……1

第 1 节　函数 ……1

第 2 节　数列的极限……15

第 3 节　函数的极限……20

第 4 节　极限的性质与运算……28

第 5 节　无穷小的比较……41

第 6 节　函数的连续性……44

第 7 节　函数插值……53

第 2 章　一元函数微分学的理论与方法……60

第 1 节　导数的概念……60

第 2 节　求导法则……69

第 3 节　高阶导数……78

第 4 节　微分及其运算……81

第 5 节　隐函数及用参数方程表示的函数的微分法……84

第 6 节　导数与微分的简单应用……87

第 7 节　微分学的基本定理……94

第 3 章　一元函数微分学的应用 ……100

第 1 节　求不定式的极限 ……100

第 2 节　泰勒公式 ……106

第 3 节　函数的性态 ……110

第 4 节　最大值最小值问题 ……122

第 5 节　曲线的曲率 ……125

第 4 章　一元函数积分学的理论与方法 ……133

第 1 节　定积分的概念与性质 ……133

第 2 节　不定积分的概念与性质 ……142

第3节　微积分基本定理 ……150
第4节　换元积分法 ……155
第5节　分部积分法 ……173
第6节　数值积分 ……182
第7节　广义积分 ……195
第5章　一元函数积分学的应用 ……201
第1节　建立定积分模型的条件与方法 ……201
第2节　定积分的几何应用 ……202
第3节　定积分的物理应用 ……212
第4节　定积分的其他应用 ……217
第6章　向量代数及其简单应用 ……222
第1节　向量代数 ……222
*第2节　向量分析 ……241
第3节　空间的平面和直线 ……255
第7章　线性代数 ……268
第1节　n阶行列式 ……268
第2节　矩阵及其运算 ……285
第3节　矩阵的秩与初等变换 ……310
第4节　向量的线性相关性 ……318
第5节　线性方程组 ……330
第6节　相似矩阵及二次型 ……338
*第7节　线性空间与线性变换 ……367
第8章　线性方程组数值解与线性规划初步 ……383
第1节　线性数学模型 ……383
*第2节　线性方程组的数值解 ……388
*第3节　样条插值 ……393
*第4节　线性规划 ……398
第9章　常微分方程 ……413
第1节　常微分方程的基本概念 ……413
第2节　一阶微分方程 ……419

第3节 二阶线性微分方程 …………………………… 424
第4节 可降阶的微分方程 ……………………………450
第5节 常微分方程的数值解 ……………………………456
第6节 常微分方程数学模型 ……………………………471
第10章 无穷级数……………………………………485
第1节 常数项级数 ……………………………………485
第2节 正项级数 ………………………………………489
第3节 任意项级数 ……………………………………495
第4节 幂级数 …………………………………………499
第5节 函数的幂级数展开 ……………………………504
第6节 傅立叶级数 ……………………………………512
第11章 多元函数微分法及其应用…………………526
第1节 多元函数的概念 ………………………………526
第2节 二元函数的极限与连续 ………………………546
第3节 偏导数 …………………………………………552
第4节 全微分及其应用 ………………………………561
第5节 多元复合函数的求导法则 ……………………567
第6节 隐函数求导法则 ………………………………576
第7节 偏导数在几何上的应用 ………………………581
第8节 方向导数与梯度 ………………………………590
第9节 多元函数的极值及其求法 ……………………596
第10节 最小二乘法……………………………………611
第12章 多元函数积分法及其应用…………………615
第1节 二重积分的概念 ………………………………615
第2节 二重积分的计算 ………………………………620
第3节 三重积分的定义及计算 ………………………631
第4节 重积分的应用 …………………………………642
第5节 第Ⅰ型曲线积分 ………………………………652
第6节 第Ⅱ型曲线积分 ………………………………657
第7节 格林公式 ………………………………………667

第 8 节　曲线积分与路线无关的条件 ……………………………674
第 9 节　两种类型曲面积分及其计算 ……………………………679
第 10 节　高斯定理　斯托克斯定理……………………………688

第1章　微积分的研究对象与理论基础

学习现代工程数学，应从学习微积分开始，因为微积分是现代工程数学的基础。

微积分的研究对象是函数，主要是连续函数；微积分的理论基础是极限理论。

本章将在复习函数的基础上，着重讨论函数的极限与连续。

第1节　函　　数

函数的某些知识，在中学已学过。对于这些已学过的内容，这里仅略作复习，着重介绍未学过的内容。

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义1　设有两个变量x、y，如果对于x的每一个所能取到的数值，y都有确定数值与它对应，则称y是x的函数。

这是函数的传统定义。下面的定义2、定义3是目前一般教科书中所用的定义。

定义2　设变量x的取值范围为一数集X。当x在X中任取某一数值时，变量y按照确定的法则f总有确定的数值与它对应，则称y是x的函数。记作

$$y=f(x),\ x\in X.$$

x称为自变量，y称为因变量，X称为函数的定义域，x所对应的y称为x的函数值，函数值y构成的数集Y称为函数的值域。

自变量这个提法本身是有缺点的，因为一提到"变"，自然要牵涉到时间，变量必定依赖时间，是时间的函数，不可能脱离时间而

"自变"。定义 3 采用了"集合对应"后，初步摆脱了这个困境，定义函数无需再依赖时间了。

定义 3 设 X 与 Y 是两集合，若对于 X 中的每个元素 x，按照某一法则 f，在 Y 中有确定的元素 y 与它对应，则称 f 为 X 上的一个函数，或称 f 为 X 到 Y 的一个映射。记作

$$f: X \to Y，或 X \xrightarrow{f} Y.$$

定义 3 建立在现代数学的基本概念——集合的基础上，所以称为函数的现代定义。在这个定义中，对应法则 f 是一个函数，揭示了函数概念的本质。因为函数的本质是两个集合之间的某种确定的相关性。离开了这一点，单独一个变量，就没有什么函数可言。

在定义 2 中，$y=f(x)$ 是函数；在定义 3 中，f 是函数，$f(x)$ 是函数值。因为通常是通过函数值来研究函数的，所以也称 $f(x)$ 是 x 的函数；而在定义 2 中，与 x 的值对应的 y 的值就是函数值，且 y 是 x 的函数，所以 $y=f(x)$，也是 x 的函数。由此可见，两种定义是可以统一的。

不论怎样定义函数、确定函数的基本要素只有两个：

(1) 对应法则 f：代表从变量 x 到变量 y 的对应关系。

这种对应关系，可能是各种各样的。正如在中学数学中已知道的，常见的是由解析式、列表式、图示式等三种形式来表示。用解析式表示，便于理论分析和推导；用列表式表示，能直接查出函数值，使用方便；用图示式表示，能直观地了解函数的变化情况，形象生动。在实际使用时，可根据问题的具体要求，选用或综合使用这三种表示法。在数学中，讨论函数时，往往要作出函数的图形，利用几何直观来帮助理解有关概念、理论和方法。所谓函数 $y=f(x)$ 的图形是指：在平面直角坐标系中取 x 为横坐标，y 为纵坐标后满足 $y=f(x)$ 的点的全体：$\{(x, y) \mid y=f(x), x \in X\}$。

微积分主要研究用解析式表示的函数。所谓由解析式表示的函数，就是通过按一定次序对变量施行解析运算——如下列初等

运算：加、减、乘、除、乘方、开方、取对数、取三角函数及反三角函数，以及后面将看到的取极限运算等所确定的函数。像大家已熟悉的简单函数：幂函数、多项式、指数函数与对数函数、三角函数与反三角函数等，都是用解析式表示的函数。

由解析式表示的函数，从历史到现实，从理论到实践，对函数的研究和应用都起了很大作用，因此，人们都致力研究函数的解析表示。但是，仍有大量不能用解析式表示的函数，有些函数只知其存在，有些函数只能用语言表达，所以，切不可认为函数都能用解析式表示，也不能认为函数的记号 $y=f(x)$ 就是解析式。

下面是一个用语言文字表示的函数。

例 1 设 x 是实数，y 是 x 的最大整数部分。

这句话的意思是说，对任何一个实数 x，y 是小于或等于 x 的最大整数。例如 $x=3.5$ 则 $y=3$；$x=-2.45$，则 $y=-3\cdots$。在这里，对于任一实数 x，总有唯一的一个值 y 与 x 对应，所以，"y 是 x 的最大整数部分"这句话确定了一个函数，称为取整函数。记作

$$y=[x]。$$

如：$[3.5]=3$，$[-2.45]=-3$，…

注意 $[x]$ 只是一个记号，而不是解析式。

从某种意义上说，对应法则 f 如同一个固定的操作程序，不论输入 X 中的什么 x，都对它进行同样程序的操作。

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(1-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$。

解 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的对应法则可表示为

$$f(\quad)=\frac{1-(\quad)}{1+(\quad)},$$

所以

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(1-x)=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{1+\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{1+\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right)}=-x.$$

在以上函数的定义中，对应法则用 f 表示，其实也可用别的字母表示。如 y 是 x 的函数也可记作

$$y=\varphi(x),\ y=\psi(x),\ y=y(x),\ \cdots$$
$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ \cdots$$

但应注意，在同一场合，为避免混淆，不同的函数应该用不同的记号表示。

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的特定值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。如果 $f(x_0)$ 存在，就称函数在 x_0 有定义。

(2) 定义域 X：自变量 x 的取值范围。X 是实数集，也是实数轴上的点集。

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的。

在数学中，有时不考虑问题的实际意义，只是抽象地研究函数。如果这些函数是由解析式表示，则其定义域就是自变量所能取得的使解析式有意义的实数集合。例如，函数

(1) $y=\lg x^2$, (2) $y=2\lg|x|$, (3) $y=2\lg x$.

其中函数(1)和(2)的定义域都是除0以外的一切实数：$|x|>0$；而函数(3)的定义域只是正实数，$x>0$。

确定一个函数，主要是确定其对应法则和定义域，至于用什么形式来表示函数，那不是主要的。两个函数，如果它们的对应法则相同(给出的形式可能不同，但对于自变量的每一个值，求出的相应的两个函数值都相等)，并且定义域相同，则称两个函数相等，或者说它们是同一函数。例如上面列举的函数(1)与(2)是相同的函数，因为它们的对应法则和定义域都相同；而函数(3)则与(1)、(2)都不同，因为(3)的定义域与(1)、(2)的不同。同理 $y=\sin x$ 与 $u=\sin v$ 表示同一函数，$y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{x\sin x}{x}$ 则是不同的函数。

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是唯一的一个，则这种函数称为*单值函数*，否则称为*多值函数*。在以后各章中主要讨论单值函数，对多值函数往往进行单值化。正如大家在中学时已知道的，三角函数的反函数是多值函数，但如果作适当限制，它们便是单值函数(单值化)。如

$$y=\arcsin x,\ x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y=\arccos x,\ x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi];$$

$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ y\in(0,\pi).$$

以后各章节中，如果没有特别说明，函数都是指单值函数。

*顺便介绍函数的另一现代定义：

定义4 设 X 和 Y 是两集合，且 $x\in X$ 与 $y\in Y$。函数 f 是一个序对 (x, y) 的集合，其中任何两个不同的序对都没有相同的第一个元素，记作

$$f=\{(x, y)\,|\,y=f(x)\}，\text{或 } f:(x, f(x)).$$

定义4的特点是无需在函数概念中引入意义不明确的“对应”

概念。在定义4中只牵涉集合的概念(序对也是集合)，而且，出现在序对(x, y)中的元素x和y不一定是数。

2. 显函数与隐函数

定义5 如果y能通过x直接表示为$y=f(x)$的形式，则称y为x的*显函数*。

定义6 如果y通过方程$F(x, y)=0$确定为x的函数，则称方程$F(x, y)=0$定义了y为x的*隐函数*。

显函数与隐函数有时并没有严格的界限。例如，圆的方程

$$x^2+y^2=1$$

定义了y为x的隐函数，但由此可解出的

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1, 1]$$

和

$$y=-\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1, 1]$$

却是显函数。当然，解方程并不容易，因此，将隐函数化为显函数往往很困难，甚至不可能。如由方程$x^5+xy+y^5=0$确定的隐函数就不能用代数方法化为显函数。不过，将显函数化为隐函数倒是很容易的。如

$$y=x^2+1$$

确定y是x的显函数。由此所得方程

$$y-x^2-1=0$$

却确定y是x的隐函数。

3. 反函数

定义7 设函数$y=f(x)$是一个由集合X到集合Y的函数。如果对于任一个数值$y\in Y$，X上至少可以确定一个满足关系式$y=f(x)$的x值与y对应，这样，便产生了一个由集合Y到集合X的函数，称为函数$y=f(x)$的*反函数*，记作

$$x=f^{-1}(y)，\text{或} \quad y\xrightarrow{f^{-1}}x。$$

从映射的观点看，反函数f^{-1}是一个与f相反的映射。

$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$在同一坐标系中是同一个图形。由于

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为

$$y=f^{-1}(x),$$

仍称为 $y=f(x)$ 的反函数。

正如大家在中学时已知道的：互为反函数的 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的。

定义 8 如果对于任意两个 x_1、$x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**；相反，则称**单调减少**。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

从正弦函数及其反函数的关系中不难看出：单值函数 $y=f(x)$ 的反函数不一定是单值函数。那么，在什么条件下单值函数的反函数一定存在而且是单值函数呢？可以证明：如果 $y=f(x)$ 是单调单值函数，则其反函数存在而且也是单调单值函数。

4．复合函数

定义 9 设函数 $y=\varphi(u)$ 是由集合 U 到集合 Y 的函数，$u=f(x)$ 是由集合 X 到集合 U^* 的函数，且 $U^*\subseteq U$。则对于每一个数值 $x\in X$，通过变量 u，相应地得到确定的 $y\in Y$ 与 x 对应，于是 y 经过 u 成为 x 的函数，记作

$$y=\varphi[f(x)],\quad x\in X.$$

这种函数称为 X 上的**复合函数**，u 称为**中间变量**。

例 3 设质量为 m 的物体，以初速度 v_0 向上抛，求其动能 E 与时间 t 的函数关系。

解 由物理学知道，在略去空气阻力的情况下，物体的速度

$$v=v_0-gt,$$

其中 g 为重力加速度。于是物体的动能为

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2,\quad t\in\left[0,\ \frac{2v_0}{g}\right].$$

在这里，动能通 E 过中间变量 v 成为 t 的复合函数。

例 4 设 $f(x)=2x^2+1$，$g(x)=\cos x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$。

解 设 $f(u)=2u^2+1$, $u=g(x)=\cos x$, 将 $u=g(x)$ 代入 $f(u)$ 便得

$$f[g(x)]=2[g(x)]^2+1=2\cos^2 x+1.$$

类似可设 $g(u)=\cos u$, $u=2x^2+1$, 则可得

$$g[f(x)]=\cos[f(x)]=\cos(2x^2+1).$$

同理可得

$$f[f(x)]=2[f(x)]^2+1=2(2x^2+1)^2+1=8x^4+8x^2+3.$$

利用复合运算可以将复杂函数分解成比较简单的函数，由此也可看出复杂函数是怎样由简单函数复合成的. 懂得这一点，对掌握第 2 章将讲到的复杂函数的微分运算非常重要.

例 5 将函数

$$y=\sqrt{1+\lg(3+\cos a^{x^2})}$$

分解为几个简单函数.

解 由此函数的复合结构可知，这个函数可分解成如下 5 个简单函数：

$$y=u^{\frac{1}{2}},\ u=1+\lg v,$$
$$v=3+\cos w,\ w=a^z,$$
$$z=x^2.$$

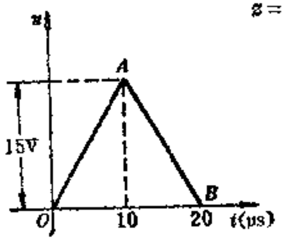

图 1-1

5. 分段函数

例 6 图 1-1 是在电子技术中经常会出现的一种三角波. 在图中，横坐标表示时间 t, 纵坐标表示电压 u. 易知在区间 $0\leqslant t\leqslant 20$ 上，u 与 t 的关系式可表示为

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10;\\ 30-\dfrac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20.\end{cases}$$

因为波形呈周期性，所以这里只要给出一个周期内的表示就够了.

在这个例子以及其他一些类似的例子中，变量之间的函数关系是用两个或两个以上解析式表示的。这种在定义域内不同的区间上用不同的解析式表示的函数，称为分段函数。

例 7 符号函数(Kronecker函数)(图 1-2)也是分段函数：

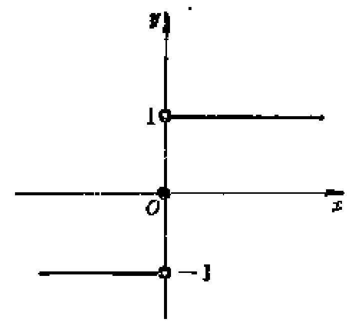

图 1-2

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

在求分段函数的函数值时，必须注意自变量是在定义域的哪一部分取值的，因为在定义域的不同部分，函数的对应法则是不一样的。例如在例 6 中，

$$u(2)=\left[\frac{3}{2}t\right]_{t=2}=\frac{3}{2}\times 2=3,$$

$$u(16)=\left[30-\frac{3}{2}t\right]_{t=16}=30-\frac{3}{2}\times 16=6,$$

特别值得注意的是

$$u(10)=\left[\frac{3}{2}t\right]_{t=10}=\frac{3}{2}\times 10=15.$$

奇函数、偶函数、周期函数等，在中学数学课程里已学过，在此不再赘述。

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列的 6 种函数称为基本初等函数：

(1) 常数函数 $y=c$(c 为常数)；

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)；

(3) 指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$；

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$；

(5) 三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, $y=\operatorname{arc\,sec} x$, $y=\operatorname{arc\,csc} x$.

因为在中学数学课程里已详细讨论过以上基本初等函数的特性和图形，在此不再重复。

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成，并能用一个解析式表示的函数，称为*初等函数*。例如

$$y=\log_a x^2+\frac{e^{\sin\sqrt{x}}+1}{x^2-1},\quad y=\sqrt{1+\lg(3+\cos a^x)}$$

等都是初等函数。注意，分段函数不是初等函数。在学习积分和级数之后，还会看到一些很有用的非初等函数。

3. 双曲函数与反双曲函数

(1) 双曲函数：

双曲正弦函数

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad(-\infty<x<+\infty);$$

双曲余弦函数

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(-\infty<x<+\infty);$$

双曲正切函数

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\quad(-\infty<x<+\infty);$$

双曲余切函数

$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\quad(x\neq 0);$$

双曲正割函数

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\operatorname{ch} x}\quad(-\infty<x<+\infty);$$

双曲余割函数

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \quad (x \neq 0).$$

利用函数 $y=\frac{1}{2}e^{x}$ 和 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ 的图形，将其纵坐标相减便得 $y=\operatorname{sh} x$ 的图形；纵坐标相加便得 $y=\operatorname{ch} x$ 的图形(图 1-3)。

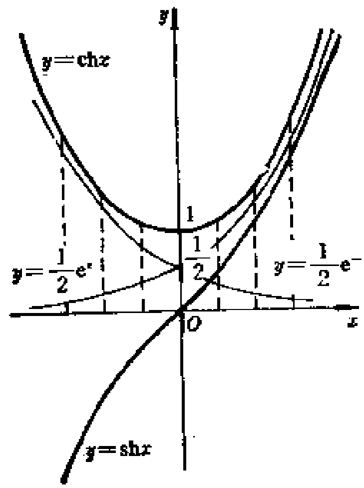

图 1-3

根据双曲函数的定义，不难推出类似于三角函数的一些恒等式，如

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

......

(2) 反双曲函数：

反双曲正弦函数

$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

反双曲余弦函数

$$\operatorname{ar\,ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (1 \leqslant x < +\infty);$$

反双曲正切函数

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1);$$

反双曲余切函数

$$\operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1);$$

反双曲正割函数

$$\operatorname{ar\,sech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) \quad (0 < x \leqslant 1);$$

反双曲余割函数

$$\operatorname{ar\,csch} x=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \quad (x\neq 0).$$

关于反双曲函数的定义，以 $y=\operatorname{ar\,sh} x$ 为例说明如下.

设 $x=\operatorname{sh} y$，则称 y 为 x 的反双曲正弦函数，记为 $y=\operatorname{arsh} x$。

由 $x=\operatorname{sh} y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ 得

$$e^y-e^{-y}=2x,$$

即

$$(e^y)^2-2xe^y-1=0.$$

注意到 $e^y>0$，解得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

故

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

即

$$\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

类似可得到其他反双曲函数.

三、函数关系模型的建立

应用数学解决实际问题时，首先要做的往往是要找出实际问题中变量之间的函数关系，建立反映实际问题的函数关系模型.

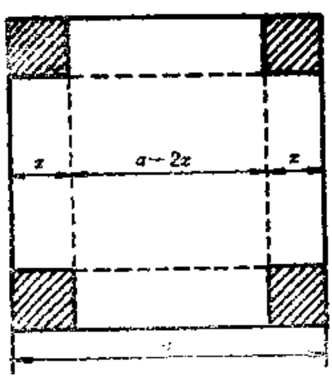

图 1-4

例 8 设有一边长为 a 的正方形薄板，在其四个边角各剪去同一边长的小正方形（图 1-4），沿虚线折起，做成一个无盖盒子. 问小正方形边长为何值时，盒子的容积最大?

要解决此问题，必须首先找出盒子容积与小正方形边长之间的函数关系.

设小正方形的边长为 x. 因为是薄板，所以盒子的容积可以

认为是与盒子相当的长方体的体积．此长方体的高为 x，底是边长为 $a-2x$ 的正方形，故其体积为

$$V=x(a-2x)^2 \quad \left(0<x<\frac{a}{2}\right).$$

这就是首先要建立的函数关系模型．在第 3 章第 3 节将看到此实际问题的最终解决．

例 9 将一个底半径为 2 cm，高为 10 cm 的圆锥形杯做成量杯．要在上面刻上表示容积的刻度，求出溶液高度与其对应容积之间的函数关系．

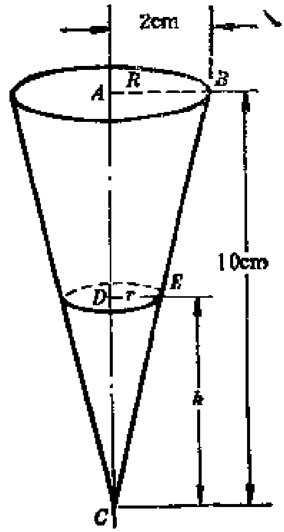

图 1-5

解 设溶液高度为 h，其对应的容积为 V，r 是平行于底面的截面的半径(图 1-5)．则

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h. \qquad (1)$$

因为 r 也是变量，而需要找的是 V 与 h 之间的函数关系，所以应设法消去 r．注意到

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEC,$$

故

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB},$$

即

$$\frac{h}{10}=\frac{r}{2}, \qquad r=\frac{1}{5}h.$$

代入(1)式得

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{5}h\right)^2 h,$$

即

$$V=\frac{1}{75}\pi h^3 \quad (0\leqslant h\leqslant 10).$$

这就是所要求出的函数关系模型．