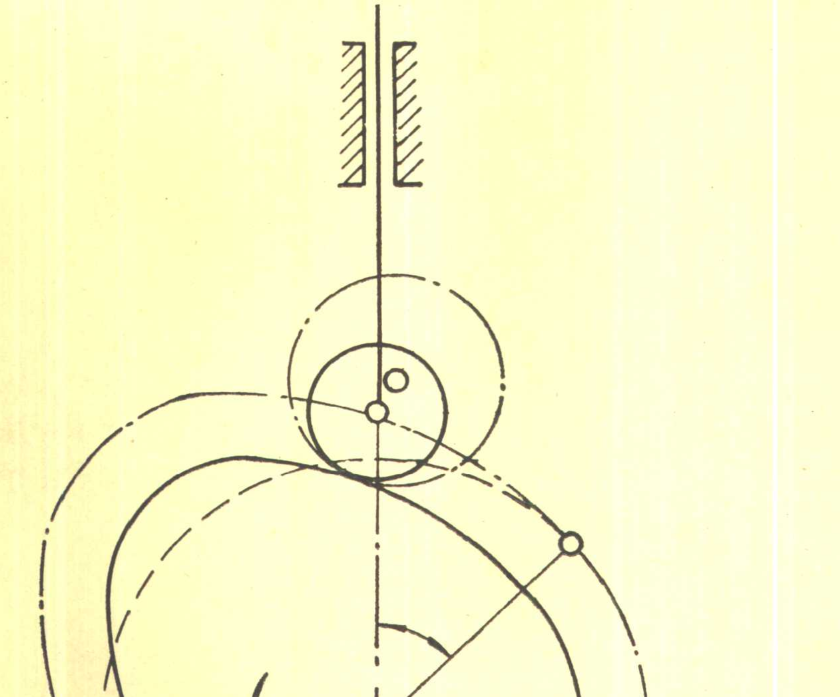
机构的概率法计算及电算程序

罗延科　苏启棠　陈伦军 编著



重庆大学出版社

机构的概率法计算及电算程序

罗延科　苏启棠　陈伦军编著

重 庆 大 学 出 版 社

机构的概率法计算及电算程序

罗延科　苏启棠　陈伦军 编著

责任编辑　　蒋怒安　梁　涛

●

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆大学出版社印刷厂印刷

●

开本：787×1092　1/16　印张：9.25　字数：231　千

1988年　7　月第　1　版　　1988年　7　月第　1　次印刷

印数：1—2800

标准书号：ISBN 7-5624-0122-5 / TH·10　　定价：1.60元

内 容 提 要

本书扼要地叙述了机构概率法计算必要的基础知识，利用概率法及数理统计与机构误差理论，对常用机构进行概率法计算及机构精度综合。书中所举的电算例题，用BASIC语言汇编的程序均在IBM-PC微机上调试通过。

本书可供高等工业院校机械类专业本科生、研究生、教师及机械工程技术人员参考。

前　　言

机构的运动学设计计算往往都停留于绝对精确地实现运动规律的理想机构来研究。实际上，这样的机构是不存在的。

由于机构构件的制造误差及构件之间的配合间隙都会产生机构输出误差。这些构件长度公差和运动副间隙的随机变化所造成的机械误差的数值是不可忽视的，有时甚至会超过结构的允许误差。再者，机构随机变化误差亦将使机构实际误差增大。尽管采用优化设计等现代方法可提高机构的输出精度，但也不能忽视机械误差的影响。基于这种出发点，利用概率法进行机构的精确综合及误差计算，应成为机构综合设计的一个重要组成部分。

本书包括了：概率法机构设计数学基础、平面连杆机构、凸轮机构、槽轮机构、齿轮机构以及带传动机构等概率法计算。书中所举例题都用BASIC语言编制程序，均在IBM-PC机上调试通过。

本书第一、四章正文由陈伦军编写，第二、六章正文及电算程序由罗延科编写、第三、五章正文由苏启棠编写，第三、四、五章电算程序的编写以及全书电算程序的调试均由陈伦军完成。初稿由罗延科、陈伦军校阅，最后由罗延科统一定稿。

本书承贵州工学院郭奇亮副教授仔细审阅，提出了很多宝贵意见，以及在计算程序的调试过程中，得到了贵州工学院采矿系微机教研室董晓娅、李黔、何跃进工程师的帮助，编著者在此表示衷心的感谢。

由于编著者水平所限，错误及欠妥之处在所难免，竭诚欢迎读者批评指正。

编著者

1987・10月于贵州工学院

目　录

第一章 基础知识

本章简要地介绍与机构概率法设计有关的一些数学基础知识。

§1-1 概率的基本概念

一、必然与随机现象

人们在自然界的生产实践及科学试验中，所观察到的现象大体可以归结为两种类型。

一类是可事前预言的；另一类是事前不可预言的，这一类现象称为偶然现象或随机现象。

对随机现象或偶然现象而言，其规律对一次试验来说，可能出现也可能不出现。如果在相同条件下，进行大量的试验观察，随机现象都呈某种规律性，把这种规律性称之为随机现象的统计规律。

二、事件

事件间各有不同的特性，但彼此之间又有一定的联系。分析事件之间的关系，可以更深刻地认识一些较为复杂的随机事件。

在一定条件组下必然发生的事件称为必然事件，用Ω表示。在一定条件组下必然不发生的事件称为不可能事件，用Φ表示。

相依事件：如事件A发生，必然导致事件B发生，则称A事件含于事件B，或称事件B包含事件A，而A与B为相依事件。记作：$A \subset B$。

等价：如果$A \subset B$，且$B \subset A$，称A与B相等。记作：$A = B$。

和：如用C表示"事件A与B中至少有一个发生"这一事件，则称它为A与B的和。记作：$C = A \cup B$，或$C = A + B$。

积：如用D表示"事件A与事件B同时发生"这一事件，则称它为A与B的积。记作：$D = A \cap B$，或$D = AB$。

差：如用E表示"事件A发生而事件B不发生"这一事件，则称E为A与B之差。记作：$E = A - B$。

互斥：如果事件A与B不可能同时发生，且至少出现其一，则称A与B互不相容，或A和B是互斥事件。

对立：如果事件A与B互斥，又在每一次试验中，不是出现A就是出现B。即：$A \cap B = \Phi$，且$A \cup B = \Omega$，这两个关系式同时成立，那么，则称A、B互为对立事件。记作：$B = \overline{A}$，或$A = \overline{B}$。

三、概率

（一） 定义

设一个随机试验只有有限个不同的基本事件ω_1，ω_2，…，ω_n。每个基本事件都是等可能的（往往当一种事件没有任何理由比另一事件更容易发生时，就认为这两个事件等可能的）。

基本事件的全体记作Ω，称为基本事件空间。如果事件A由K（$K\leqslant n$）个不同的基本事件组成，那么，规定A的概率$P(A)$为

$$P(A) = \frac{K}{n}$$

不可能事件Φ的概率规定为

$$P(\Phi) = 0$$

其性质为：

(1) $P(\Omega) = 1$；

(2) $P(\Phi) = 0$；

(3) 对每一事件A有：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

1. 加法定律

若事件A与B互斥，则A与B至少有一事件出现的概率等于两事件A与B各自出现的概率之和。即

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1-1}$$

2. 乘法定理

由于事件之间的关系有相依和独立之分，故乘法定理亦有所不同。

1) 相依事件的乘法公式

若事件A与事件B是相依事件（$A\subset B$），即在"事件B已发生"的条件下，则"事件A发生"的条件概率为$P(A|B)$。即

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1-2}$$

由式（1-2），当$P(B)>0$，且$P(A)>0$时，可推得乘法公式为

$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(B)P(A|B) \\ P(A\cap B) &= P(A)P(B|A) \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

2) 独立事件的乘法公式

如果事件B是独立的，B发生不影响事件A的概率。即

$$P(A|B) = P(A) \tag{1-4}$$

则称事件A对事件B是独立的。

而A与B相互独立的充分必要条件是

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \tag{1-5}$$

3. 全概率定律

对于一个试验，某一结果的发生可能有多种原因，每一原因对这个结果作出一定"贡献"。当然，这种结果发生的可能性与各种原因的"贡献"大小有关。直观地说，利用概率的加法和乘法定律，就可以得到全概率的计算公式。

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \tag{1-6}$$

§1-2 随机变量

一、随机变量分布

给定随机变量X，它的取值不超过实数x的事件的概率$P(X\leqslant x)$是x的函数，称为X的概率分布函数，简称为分布函数。记作$F(x)$，即

$$F(x)=P(X\leqslant x) \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1-7}$$

对于任意实数x_1，$x_2(x_1<x_2)$，有

$$P\{x_1\leqslant x\leqslant x_2\}=P\{x\leqslant x_2\}-P\{x\leqslant x_1\}=F(x_2)-F(x_1) \tag{1-8}$$

分布函数是一个普通的函数，正是通过它，将能用数学分析方法来研究随机变量。

分布函数的基本性质为：

(1) $F(x)$是一个不减函数。由式（1-8）有

$$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<x\leqslant x_2\}\geqslant 0 \quad (x_2>x_1)；$$

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$

且 $$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

二、连续变量的分布

随机变量的分布有离散型和连续型两类。在概率设计方法中，由于设计公式的有关变量一般都是连续的随机变量。因此，只介绍连续型随机变量问题。

为了计算概率$P\{x\leqslant X<x+\Delta x\}$，根据式（1-8）可写出

$$P\{x\leqslant X<x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x) \tag{1-9}$$

则表示分布函数的导数为

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P\{x<X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}=f(x)\end{aligned} \tag{1-10}$$

式（1-10）中的$f(x)$称为概率密度函数。为了计算该值，而$P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}$可写成

$$\begin{aligned}P\{x_1<X\leqslant x_2\}&=F(x_2)-F(x_1)\\&=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1-11}$$

概率密度函数的主要性质有：

(1) $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，介于曲线$y=f(x)$与$ox$轴之间的面积等于1。

§1-3 数学期望与方差

一、数学期望

随机变量的数学期望与实际进行的试验中所得到的随机变量的观测值的算术平均值有密切联系。如果对许多测试的值求和，以该和除以测试数n，可得到一个特殊的均值。假定

N_1，N_2，…，N_n为一组测试值，可得

$$E(N)=\overline{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i}{n} \tag{1-12}$$

式中 E——期望值。

对于离散型变量x_i（$i=1$，2，…，n），由于分布函数$F(x)$确定与每一个x_i相对应的概率P_i的均值为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \tag{1-13}$$

对于连续型随机变量其分布密度为$f(x)$，分布函数为$F(x)$，则（当积分绝对收敛时）

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)\end{aligned} \tag{1-14}$$

二、方差

为了表现随机变量的分布特征，单凭一个数字（随机变量的数学期望）是不够的。为了显示随机变量的一切可能值在其数学期望周围的分散程度，即可描述随机变量的偏差。故引进随机变量分布的另一重要特征——方差，并用$D(X)$表示。

由方差的定义，对于离散型随机变量

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2p_i \tag{1-15}$$

式中 $p_i=P\{X=x_i\}$， $i=1$，2，…

对于连续型随机变量

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x \tag{1-16}$$

标准离差（又称为均方差）用σ表示。即

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)} \tag{1-17}$$

对于方差还可以表示为

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2E(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned} \tag{1-18}$$

则标准离差可表示为

$$\sigma_x=\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2} \tag{1-19}$$

由式（1-18）可直接推出一个非常有用的结果。即

$$\left.\begin{aligned}E(X^2)&=D(X)+[E(X)]^2\\E(X^2)&=\sigma_x^2+\mu_x^2\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

式中　$E(X^2)$——随机变量X的平方期望值。

三、数学期望与方差的主要性质

（一）　常数的数学期望与方差

若　$X=C$（常数）

则

$$\left.\begin{aligned}E(X)&=C\\D(X)&=0\end{aligned}\right\}\tag{1-21}$$

（二）　常数与随机变量乘积的数学期望与方差

$$\left.\begin{aligned}E(CX)&=CE(X)\\D(CX)&=C^2D(X)\end{aligned}\right\}\tag{1-22}$$

（三）　常数与随机变量和的数学期望与方差

$$\left.\begin{aligned}E(X+C)&=E(X)+C\\D(X+C)&=D(X)\end{aligned}\right\}\tag{1-23}$$

（四）　线性函数的数学期望与方差

设随机变量X有数学期望$E(X)$，则$Y=aX+b$（a，b均为常数）的数学期望是

$$\begin{aligned}E(Y)&=E[a(X)+b]=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)\mathrm{d}F(x)\\&=a\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)+b\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}F(x)\\&=aE(X)+b\end{aligned}\tag{1-24}$$

特别当　$a=0$时，有$E(b)=b$，而方差为

$$D(Y)=D[a(X)+b]=a^2D(X)\tag{1-25}$$

如果把（1-25）和（1-24）两式推广，设a_i及b均为常数，并且$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b$，则

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)+b\\D(Y)&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)+2\sum_{i<j}a_ia_jK_{ij}\end{aligned}\tag{1-26}$$

式中　K_{ij}——随机变量X_i与X_j的相关矩。

根据概率论有关定义

$$K_{ij}=\iint_{-\infty}^{\infty}[x_i-E(X_i)][x_j-E(X_j)]f(x_i,\ x_j)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

当各自变量都是两两相互独立时，$K_{ij}=0$，则

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) \tag{1-27}$$

（五） 随机变量之和的数学期望与方差

设 $Z = X \pm Y$

则

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x \pm y) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= E(X) \pm E(Y)$$

$$D(Z) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}$$

式中 K_{xy}——X与Y与Z的相关矩，如果令

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{1-28}$$

ρ_{xy}——随机变量X和Y的相关系数，则

$$D(Z) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho_{xy}\sqrt{D(X)D(Y)}$$

特别当X与Y相互独立时，$\rho_{xy} = 0$，那么

$$D(Z) = D(X) + D(Y)$$

即

$$\mu_{x \pm y} = \mu_x \pm \mu_y \tag{1-29}$$

$$\sigma_{x \pm y}^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 \pm 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \tag{1-30}$$

$$\sigma_{x \pm y}^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 \tag{1-31}$$

（六） 随机变量积的数学期望与方差

设 $Z = XY$

则

$$E(Z) = E(X)E(Y) + K_{xy}$$

$$= E(X)E(Y) + \rho_{xy}\sqrt{D(X)D(Y)}$$

$$D(Z) = [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X) + D(X)D(Y)$$

$$+ 2\rho_{xy} E(X)E(Y)\sqrt{D(X)D(Y)} + \rho_{xy}^2 D(x)D(y)$$

当X，Y相互独立时，$\rho_{xy} = 0$，那么

$$E(Z) = [E(X)^2 + D(X)]$$

$$D(Z)=4[E(X)]^2D(X)+2[D(X)]^2$$

即

$$\mu_{xy}=\mu_x\mu_y+\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \tag{1-32}$$

$$\sigma_{xy}^2=\mu_x^2\ \sigma_y^2+\mu_y^2\ \sigma_x^2+\sigma_x^2\ \sigma_y^2+2\rho_{xy}\mu_x\mu_y\sigma_x\sigma_y+\ \rho_{xy}^2\ \sigma_x^2\ \sigma_y^2 \tag{1-33}$$

$$\mu_{xy}=\mu_x\mu_y \tag{1-34}$$

$$\sigma_{xy}^2=\mu_x^2\ \sigma_y^2+\mu_y^2\ \sigma_x^2+\sigma_x^2\ \sigma_y^2 \tag{1-35}$$

$$\mu_{x^2}=\mu_x^2+\sigma_x^2 \tag{1-36}$$

$$\sigma_{x^2}=\sqrt{4\mu_x^2\ \sigma_x^2+\ 2\ \ \sigma_x^4} \tag{1-37}$$

（七） 随机变量商的数学期望和方差

设 $Z=X/Y$

则

$$E(Z)=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{y}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\approx\frac{E(X)}{E(Y)}$$

$$D(Z)=\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x}{y}-\frac{E(X)}{E(Y)}\right]^2\ f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\approx\frac{[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)}{[E(Y)]^4}$$

即

$$\mu_{\frac{x}{y}}=\frac{\mu_x}{\mu_y} \tag{1-38}$$

$$\sigma_{\frac{x}{y}}^2=\frac{\mu_x^2\ \sigma_y^2+\mu_y^2\ \sigma_x^2}{\mu_y^2} \tag{1-39}$$

（八） 多元非线性函数的数学期望与方差

设$Z=f(X_1,\ X_2,\cdots,X_n)$，而$X_1$，$X_2$，…，$X_n$为相互独立的随机变量。用泰勒级数展开，得

$$E(Z)=f[E(X_1),\ E(X_2),\ \cdots,\ E(X_n)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}$$

$$\times E[X_i-E(X_i)]^2$$

$$=f[E(X_1),\ E(X_2),\ \cdots,\ E(X_n)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}D(X_i) \tag{1-40}$$

将上式平方，可得

$$[E(Z)]^2=f[E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)]^2$$

$$+f[E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}D(X_i)$$

$$+\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}D(X_i)\right]^2 \tag{1-41}$$

$$E(Z^2)=\{f[E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)]\}^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2 D(X_i)+\{f[E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)]\}$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}D(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X_i^2}\right)E[X_i-E(X_i)]^2 \tag{1-42}$$

由式（1-18），并略去第二项和高阶项则可得到

$$D(Z)=E(X)^2-[E(X)]^2$$

$$\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2 D(X_i) \tag{1-43}$$

对式（1-40）而言，如果忽略等式右边第二项，则可近似为

$$E(Z)\approx f[E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)] \tag{1-44}$$

且标准离差可表示为

$$\sigma_Z=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right)^2\sigma^2(X_i)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-45}$$

四、正态分布的数学期望与方差

正态分布是在概率设计中应用最广泛的一种分布。实践中经常遇到大量的随机变量大都是服从正态分布的，这是因为许多不同因素对随机变量的影响大致相同，且更为重要的是它还是其它许多分布的近似或特殊情况。因而，作较为详细地讨论。

至于其它分布：如均匀分布、γ分布、β分布、指数分布、瑞利分布、韦布尔分布、对数正态分布等，在机构的概率设计中虽有应用，但用得不多，故不予介绍，具体可参考表1-1。

若随机变量X的密度函数由下式给出

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

（$\sigma>0$，a为常数） （1-46）

表 1－1　　　　常用分布密度函数

分布密度函数名称	参数	密度函数 $f(x)$	数学期望	方差
正态分布	$-\infty<\mu<\infty$ $\sigma>0$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $(-\infty<x<\infty)$	μ	σ^2
均匀分布	$b>a$	$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad(a<x<b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
γ 分布	$\lambda>0$ $a>0$	$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x} & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$
β 分布	$a>0$ $b>0$	$f(x)=\frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\quad(0<x<1)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
指数分布	$\lambda>0$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
瑞利分布	$\sigma>0$	$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$	$0.429\sigma^2$
韦布尔分布	$b>0$ $\theta>0$	$f(x)=\begin{cases}\frac{b}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b\right] & (x\geqslant0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	$\theta\Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right)$	$\theta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{b}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right)\right]^2\right\}$
对数正态分布	$-\infty<\mu_l<\infty$ $\sigma_l>0$ $x_l=\lg x$	$f(x_l)=\frac{1}{\sigma_l\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_l-\mu_l}{\sigma_l}\right)^2\right]$ $(-\infty<x_l<\infty)$	$e^{\mu_l+\frac{1}{2}\sigma_l^2}$	$e^{2\mu_l+\sigma_l^2}(e^{\sigma_l^2}-1)$

则称X服从正态（或高斯）分布。记作$X \sim N$①（μ，σ）。

特别当$\mu=0$，$\sigma=1$时，则得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x\in R_1)② \tag{1-47}$$

则称X服从标准正态分布。记作$X \sim N$（0，1）。

由式（1-46）可求得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x$$

令$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，则上式可表示为

$$E(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\mu\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma\cdot 0+\mu\sqrt{2\pi})$$

$$=\mu \tag{1-48}$$

那么，X的方差为

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x$$

令$t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right]$$

注：①“$\sim$”：读作服从于；

②$x\in R_1$，即$-\infty<x<+\infty$。

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$$

$$= \sigma^2 \tag{1-49}$$

（一） 两正态分布之和、之差、之积的数学期望和方差

设X，Y分别属于两个正态母体的随机变量，其密度函数可分别表示为

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \\ f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-50}$$

为了得到所需要的结果，还需作如下工作。

1． 概率的矩母函数

若X是随机变量，则随机变量函数e^{tx}的均值为

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tx}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1-51}$$

2． 当为一元正态矩母函数时

式（1-46）正态分布的随机变量X的矩母函数可表示为

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tx}) \\ &= e^{t\mu}E(e^{t(x-\mu_x)}) \end{aligned}$$

$$m(t) = \exp\left(t\mu_x + \frac{\sigma_x^2\ t^2}{2}\right) \tag{1-52}$$

设 $$A = t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

则 $$m(t) = e^A$$

将式（1-52）对时间t 1次求导和2次求导，分别得

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = (\mu_x + \sigma_x{}^2 t)e^A$$

$$\frac{\partial^2 m(t)}{\partial t^2} = \sigma_x{}^2 e^A + (\mu_x + \sigma_x{}^2 t)e^A$$

则

$$\mu_{x^2} = \frac{\partial^2 m(t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sigma_x{}^2 + \mu_x{}^2 \tag{1-53}$$

由式（1-18）知

$$\begin{aligned} D(Z) &= E[X^2 - E(X)^2]^2 \\ &= E(X^4) - 2X^2E(X)^2 + E[E(X)^2]^2 \end{aligned}$$

则