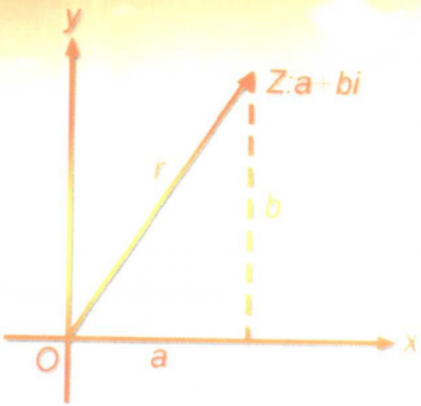
高中数学

龙门专题

复数

傅荣强 主编



龍門書局

龙门专题

复数

主编 傅荣强
本册主编 张 博
编 郭艳君
王学春

龍門書局

复　数

傅荣强　主编

责任编辑　王　敏　张启男

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2001年2月第　一　版　　开本：880×1230　A5

2001年6月第三次印刷　　印张：8 3/4

印数：40 001—50 000　　字数：330 000

ISBN 7-80160-134-3/G·170

定　价：9.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

参考书几乎是每一位学生学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学三个学科共计44种，其中初中数学11种，高中数学12种，初中物理4种，高中物理6种，初中化学3种，高中化学8种。

本套书在栏目设置上，主要体现循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“**知识点精析与应用**”着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“**视野拓展**”则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为“拓展”，但仍然立足于教材本身。主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容)。“视野拓展”即针对这部分知识进行讲解，还包括了另外一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势的变化，综合题与应用题越来越多，试行“3+X”高考模式以后，这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. 以“专”为先　本套书共计44种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备　由于本书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，易于理解和记忆。

3. 省时增效　由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以满足在较短时间里完成对某一整块知识学透、练透的需求。

4. 局限性小　与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本书的另一特点是充分体现中央关于“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率而言，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001 年 1 月 1 日

编委会（高中数学）

总策划　龙门书局

主编　傅荣强

编委　王家志　傅荣福　常青　朱岩　刘贞彦　王文彦

执行编委　王敏

目　录

第一篇　基础篇 ………………………………………… (1)
第一讲　数的概念的发展和复数的概念 ………………… (2)
1.1　数的概念的发展和复数的概念 ………………… (2)
1.2　复平面和共轭复数 ………………………………… (16)
1.3　复数的向量表示和复数的模 ……………………… (27)
高考热点题型评析与探索 ……………………………… (46)
本讲测试题 ……………………………………………… (50)
第二讲　复数的运算与复数集内的方程 ………………… (59)
2.1　复数的四则运算及性质 …………………………… (59)
2.2　复数集内的方程 …………………………………… (76)
高考热点题型评析与探索 ……………………………… (93)
本讲测试题 ……………………………………………… (96)
第三讲　复数的三角形式 ……………………………… (107)
3.1　复数的三角形式 ………………………………… (107)
3.2　复数的三角形式的运算 ………………………… (127)
高考热点题型评析与探索 …………………………… (147)
本讲测试题 …………………………………………… (152)
第四讲　复数的几何意义 ……………………………… (163)
4.1　复数的加法、减法的几何意义 ………………… (163)
4.2　复数的乘法、除法、乘方、开方的几何意义 ……… (182)
高考热点题型评析与探索 …………………………… (196)
本讲测试题 …………………………………………… (200)
第五讲　平面向量 ……………………………………… (205)
5.1　向量,向量的加减法,实数与向量的积 ………… (206)

5.2　平面向量的坐标运算与线段的定比分点 ……… (215)
5.3　平面向量的数量积,运算律及量积的坐标表示,
平移 …………………………………………… (224)
本讲测试题 ………………………………………… (231)
第二篇　综合应用篇 …………………………………… (239)
6.1　复数的模的应用 ……………………………… (239)
6.2　复数的辐角主值的应用 ……………………… (248)
本讲测试题 ………………………………………… (262)

第一篇　基础篇

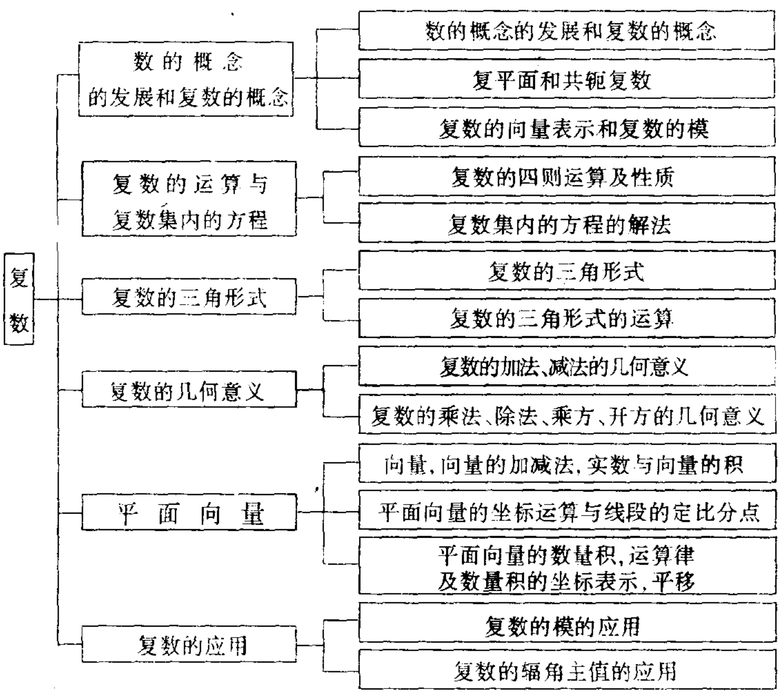
数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”和“形”的学科. 复数是代数的一个节点.

复变量 $z=a+bi$ 区别于实变量的显著标志是它由两个实变量 a 与 b 有序构成.

复数的本质是以 $a+bi$ 为整体，研究整体形式下的变量的运算规律，其表现形式是代数运算、三角运算、几何运算.

复数 $z=a+bi$ 当 $b=0$ 时即为实数，此时复数论与实数论完全等同. 所以 $b=0$ 与 $b\neq0$ 是复数集 **C** 与实数集 **R** 的分界线，后继理论都在 $b\neq0$ 上.

本书知识框图

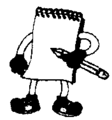


第一讲　数的概念的发展和复数的概念

本讲知识框图

- 数的概念的发展和复数的概念
  - 数的概念的发展和复数的概念
    - 数的概念的发展过程
    - 复数的有关概念
    - 复数相等的充要条件
  - 复平面和共轭复数
    - 复平面的概念
    - 共轭复数的概念与性质
  - 复数的向量表示和复数的模
    - 复数的向量表示法
    - 向量相等和零向量
    - 复数的模(或绝对值)

1.1　数的概念的发展和复数的概念



重点难点归纳

重点　①了解数的概念的发展过程,理解数集扩充到复数集的必然性.②掌握复数的有关概念,并能熟练地运用复数的这些概念解题.③熟记复数相等的充要条件,并能熟练地运用这些条件解决有关问题.

难点　①准确区分复数集与实数集,复数集与虚数集,虚数集与纯虚数集之间的包含关系.②复数有关概念的应用.

本节需掌握的知识点　①复数的有关概念.②复数相等的充要条件.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 数的概念的发展过程

数的概念是从实践中产生和发展起来的．早在原始社会末期,由于计数的需要,建立起自然数的概念．自然数的全体构成自然数集 **N**.

随着生产和科学的发展,数的概念也得到发展．

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求，人们引进了零及负数，把自然数看作正整数，把正整数、零、负整数合并在一起，构成整数集 **Z**.

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题，人们又引进了有理数，有理数集实际上就是分数集.

为了解决有些量与量之间的比值(例如用正方形的边长去度量它的对角线所得结果)不能用有理数表示的矛盾，人们又引进了无理数．有理数集与无理数集合并在一起，构成实数集 **R**.

但是，数的范围扩充到实数集 **R** 以后，像 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解，因为没有一个实数的平方等于 -1. 在十六世纪，**由于解方程的需要，人们开始引进一个新数 i，叫做虚数单位，并规定：**

(1)**它的平方等于 -1，即 $i^2=-1$.**

(2)**实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立．**

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再同实数 a 相加，由于满足乘法交换律及加法交换律，从而可以把结果写成 $a+bi$. 这样，数的范围又扩充了，出现了形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数，**人们把它们叫做复数**. **全体复数构成的集合，一般用字母 C 来表示**.

2．复数的有关概念

(1)复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当 $b=0$ 时，就是实数.

(2)复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当 $b\neq0$ 时，叫做虚数.

(3)复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，叫做纯虚数.

(4)实数 a、b 分别叫做复数 $a+bi$ 的实部和虚部.

(5)复数的分类：

$$\text{复数}\ a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\boxed{\text{实数}\ b=0}\begin{cases}\text{有理数(分数)}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\text{循环小数(整数、有限小数、无限循环小数)}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{无限不循环小数}\end{cases}\text{小数}\\\boxed{\text{虚数}\ b\neq0}\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

(6)两个复数，如果不全是实数，就不能比较大小

3．复数相等的充要条件

对于复数 $a+bi$ 和 $c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，它们相等的充分必要条件是：

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d;$$

$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$.

复数相等的充要条件,开辟了把复数问题转化为实数问题的新途径.

[解题方法指导]

1. 复数相等的充要条件

[例1] 已知$(2x+1)+i=y+(3-y)i$,其中$x,y\in \mathbf{R}$. 求x与y.

分析 由复数相等的充要条件,等式中左右两边的复数相等**当且仅当实部相等且虚部相等**,可得关于x与y的二元一次方程组,求解后可得x与y.

复数相等的依据,重要

解 根据复数相等的定义,得方程组$\begin{cases}2x+1=y,\\1=3-y.\end{cases}$

$\therefore \quad x=\dfrac{1}{2}, y=2$.

复数是二元形式的,通过实部、虚部分别相等,得两个等式,可求x和y的值.

[例2] 若$(3+10i)y+(-2+i)x=1-9i$,求实数x,y的值.

分析 等式左边整理成$a+bi$后,与右边复数相等,可利用复数相等的充要条件得到关于x、y的方程组.

解 原式整理为$\begin{cases}-2x+3y=1,\\x-10y=-9.\end{cases}$解这个方程组得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

[例3] 已知关于x,y的方程组$\begin{cases}(2x-1)+i=y-(3-y)i, & ①\\(2x+ay)-(4x-y+b)i=9-8i. & ②\end{cases}$

有实数解,求实数a,b的值.

解 $\because x,y$是实数,根据复数相等的条件,由方程①得

$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y).\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=4.\end{cases}$ 关键在求出x、y

代入方程②,得$(5+4a)-(6+b)i=9-8i$.

$\because a,b\in \mathbf{R}$, $\therefore \begin{cases}5+4a=9,\\6+b=8.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

求a与b的值,需要先求x、y,这通过①即可完成,再代入②中求a、b,按先后顺序,以免事倍功半.

[例4] 若方程$(1+i)x^2+(1+5i)x-(2-6i)=0$有实根,求这个实数根.

分析 方程有实根x_0便可代入方程,由复数相等的充要条件得方程组,求解即可.

解 方程整理为:$x^2+x-2+i(x^2+5x+6)=0$.

设方程的根为x_0, 可把复数问题转化为实数问题解决,关键!

$$\therefore \quad \begin{cases} x_0^2+x_0-2=0, & ① \\ x_0^2+5x_0+6=0. & ② \end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases} x_0=1 \text{ 或 } -2, \\ x_0=-3 \text{ 或 } -2. \end{cases}$

同时满足①、②的值为 $x_0=-2$. 保证重要条件的成立

∴ 所求的根为 $x_0=-2$.

点评 在复数集内解复系数一元二次方程，判别式 Δ 不能够判断方程有无实根，但可用求根公式求解，详见本书 2.2 节.

[例 5] 若方程 $(1+i)x^2-2(a+i)x+5-3i=0(a\in\mathbf{R})$ 有实数解，则 $a=$ ____.

分析 方程的实数解必然适合方程，设 $x=x_0$ 为方程的实数解，代入整理后得 $c+di=0$ 的形式 $(c,d\in\mathbf{R})$. 由复数相等的充要条件，可得关于 x_0 与 a 的方程组，解方程组便可得所求的 x_0 与 a.

解 原方程整理为：$(x^2-2ax+5)+(x^2-2x-3)i=0$.

设方程的实根为 x_0，代入方程得 $(x_0^2-2ax_0+5)+(x_0^2-2x_0-3)i=0$.

由复数相等的充要条件得

$$\begin{cases} x_0^2-2ax_0+5=0, & ① \\ x_0^2-2x_0-3=0. & ② \end{cases}$$

由②得 $x_0=3$ 或 $x_0=-1$，代入①得 $a=\dfrac{7}{3}$ 或 $a=-3$.

$\therefore\ a=\dfrac{7}{3}$；或 $a=-3$.

点评 一般根据复数相等的充要条件，可以由一个复数相等的形式，得到两个实数等式所组成的方程组，从而可以用来确定两个独立参数（参数必须为实数或纯虚数）.

2. 复数的有关概念问题

[例 6] m 为何实数值时，$z=(2m^2-5m+2)+(3m^2-4m-4)i$ 是(1)实数；(2)纯虚数；(3)对应点在第四象限.

分析 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$：z 为实数 $\Leftrightarrow b=0$；z 为纯虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ b\neq 0. \end{cases}$

z 对应点在第四象限 $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ b<0. \end{cases}$

解 (1)由 $3m^2-4m-4=0$，得 $m=-\dfrac{2}{3}$ 或 $m=2$，故当 $m=-\dfrac{2}{3}$ 或 $m=2$ 时，z 为实数.

(2)复数为纯虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-5m+2=0, \\ 3m^2-4m-4\neq 0. \end{cases}$ 重要,必须虚部不为零

解得 $m=\frac{1}{2}$,故当 $m=\frac{1}{2}$时,复数 z 为纯虚数.

(3)由$\begin{cases} 2m^2-5m+2>0, \\ 3m^2-4m-4<0. \end{cases}$得 $-\frac{2}{3}<m<\frac{1}{2}$,故当 $-\frac{2}{3}<m<\frac{1}{2}$时,复数 z 对应点在第四象限.

要完整理解复数为纯虚数的等价条件,切不可忘记复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$为纯虚数的一个必要条件是 $b\neq 0$.

[例7] m 取何实数时,复数 $z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$ 是实数?是虚数?是纯虚数?

分析 本题是判断复数在何情况下为实数,虚数,纯虚数.只要我们紧扣“设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,若 $b=0$,则 $z\in\mathbf{R}$;若 $b\neq 0$,则 z 是虚数;若 $a=0,b\neq 0$,则 z 是纯虚数”,就极易解决此题.

解 (1)当$\begin{cases} m^2-2m-15=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$时, 分母不为0不能忽视

即$\begin{cases} m=5 \text{ 或 } m=-3 \\ m\neq -3 \end{cases}$时,亦即 $m=5$ 时,$z\in\mathbf{R}$.

(2)当$\begin{cases} m^2-2m-15\neq 0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$时,即 $m\neq -3$ 且 $m\neq 5$ 时,z 是虚数.

(3)当$\begin{cases} m^2-2m-15\neq 0 \\ m^2-m-6=0 \\ m+3\neq 0 \end{cases}$时,即$\begin{cases} m\neq -3 \text{ 且 } m\neq 5 \\ m=3 \text{ 或 } m=-2 \\ m\neq -3 \end{cases}$时,

亦即 $m=3$ 或 $m=-2$ 时,z 是纯虚数.

[例8] 实数 m 分别取什么数值时,复数 $z=(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)i$ 是:(1)实数;(2)虚数;(3)纯虚数;(4)对应点在 x 轴上方;(5)对应点在直线 $x+y+5=0$ 上.

分析 利用 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$是实数,虚数,纯虚数的条件和 $z=a+bi$ 与点(a,b)的对应关系进行求解.

解 (1)由 $m^2-2m-15=0$,得知:$m=5$ 或 $m=-3$ 时,z 为实数;

(2)由 $m^2-2m-15\neq 0$,得知:$m\neq 5$ 且 $m\neq -3$ 时,z 为虚数;

(3)由$\begin{cases} m^2-2m-15\neq 0 \\ m^2+5m+6=0 \end{cases}$得知:$m=-2$ 时,z 为纯虚数;

(4)由 $m^2-2m-15>0$，得知 $m<-3$ 或 $m>5$ 时，z 的对应点在 x 轴上方；

按实部、虚部的符号区分

(5)由 $(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)+5=0$，得知：$m=\frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ 或 $m=\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$ 时，z 的对应点在直线 $x+y+5=0$ 上．

点的坐标适合于直线方程

点评 此类问题的解题方法是利用复数的相关概念转化为关于 m 的方程或不等式来解．

[例 9] 已知复数 $z=m^2(1+i)-(m+i)(m\in\mathbf{R})$，当 m 为何值时，复数 z：

(1)是实数；(2)是虚数；(3)是纯虚数．

分析 由于所给复数 z 为非标准形式，需将 z 整理为标准形式后，再按题目要求，对实部和虚部分别进行处理．

解 $z=(m^2-m)+(m^2-1)i$．

(1) $m^2-1=0$，$\therefore$ $m=\pm1$；(2) $m^2-1\neq0$，$\therefore$ $m\neq\pm1$；

(3) $\begin{cases} m^2-1\neq0 \\ m^2-m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq\pm1, \\ m=0 \text{ 或 } 1. \end{cases}$ $\therefore$ $m=0$.

[例 10] 求 θ，使复数 $z=(2\sin^2\theta-\sin\theta)+(3\tan^2\theta-1)i$ 是：(1)实数；(2)纯虚数；(3)零．

分析 复数 z 的实部、虚部是用三角函数的形式给出的，按照题目要求得到三角等式(方程)或三角不等式即可．

解 (1)由 $3\tan^2\theta-1=0$，$\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，z 是实数．

θ 应为满足条件的所有实数

(2)由 $\begin{cases} 2\sin^2\theta-\sin\theta=0, \\ 3\tan^2\theta-1\neq0. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \tan\theta\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin\theta(2\sin\theta-1)=0. \end{cases}$

$\therefore$ $\theta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，z 是纯虚数．

(3)由 $\begin{cases} 2\sin^2\theta-\sin\theta=0, \\ 3\tan^2\theta-1=0. \end{cases}$ 得 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，这时 $z=0$.

[例 11] 若复数 $(-3+k^2)-(k^2-2)i$ 所对应的点在第三象限内，求 k 的取值范围．

分析 由复数 $z=a+bi$ 和点 $Z(a,b)$ 的对应关系，实部小于 0，虚部小于 0，得

不等式组，求解即得．

解 由已知表示复数的点在第二象限，

$$\therefore \begin{cases} -3+k^2<0, \\ -(k^2-2)<0. \end{cases}$$

解这个不等式组，得 $2<k^2<3$．$\therefore k\in(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$．

即 k 的取值范围是 $(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})$．

【基础训练题】

一、选择题

1．“复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数”是“$a=0$”的(　　)条件．

A．充分但不必要　　B．必要但不充分

C．充要　　D．既不充分又不必要

2．$m\in\mathbf{R}$，复数 $(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$ 表示纯虚数的条件是　(　　)

A．$m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=2$　　B．$m=2$

C．$m=-\frac{1}{2}$　　D．$m=2$ 或 $m=1$

3．设 $C=\{$复数$\}$，$A=\{$实数$\}$，$B=\{$纯虚数$\}$，若全集 $I=C$，则下列结论中正确的是　(　　)

A．$A\cup B=C$　　B．$\overline{A}=B$　　C．$A\cap\overline{B}=\varnothing$　　D．$B\cup\overline{B}=C$

4．若 $z_1=\sin2\theta+i\cos\theta$，$z_2=\cos\theta+i\sqrt{3}\sin\theta$，当 $\theta=$(　　)时，$z_1=z_2$

A．$k\pi$　　B．$2k\pi+\frac{\pi}{3}$　　C．$2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$　　D．$2k\pi+\frac{\pi}{6}$

二、填空题

5．方程 $(2+i)x^2-(5+i)x+(2-2i)=0$ 的实数解 $x=$____．

6．使复数 $z=x^2-2x-3+(\log_{\frac{1}{2}}^2x-\log_{\frac{1}{2}}x-2)i$ 是虚部为正数的非纯虚数，则实数 x 的范围是____．

7．已知 $M=\{1,2,(a^2-3a-1)+(a^2-5a-6)i\}$，$N=\{-1,3\}$，$M\cap N=\{3\}$，实数 a ____．

8．复数 $z=(a^2-2a+3)-\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)i$，$(a\in\mathbf{R})$在复平面内对应点位于____象限．

三、解答题

9．要使复数 $z=a^2-a-6+\frac{a^2+2a-15}{a^2-4}i$ 为纯虚数，其中的实数 a 是否存在？若存在，求出 a 的值，若不存在说明理由．

10．关于 x 的方程 $a(1+i)x^2+(1+a^2i)x+a^2+i=0(a\in\mathbf{R})$ 有实根，求 a

及方程的根．

【答案与提示】

1.A(若 $a+bi$ 为纯虚数,则 $a=0$ 且 $b\neq0$;而 $a=0$ 时,bi 可能是纯虚数,也可能是 0.)　2.C($a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 表示纯虚数的条件是 $\begin{cases}a=0,\\b\neq0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\m^2-3m+2\neq0.\end{cases}$ 解方程得 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=2$,代入知 $m=2$ 时,$m^2-3m+2=0$,使原复数为 0,舍去.)　3.D(根据复数集分类直接判断选 D)

4.D($\because z_1=z_2$,$\therefore \begin{cases}\sin2\theta=\cos\theta & ①,\\\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta & ②.\end{cases}$ 由①②可知 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.)

5. 设实数解为 x_1,则 $(2x_1^2-5x_1+2)+(x_1^2-x_1-2)i=0$,$\because x_1\in\mathbf{R}$,

$\therefore \begin{cases}2x_1^2-5x_1+2=0,\\x_1^2-x_1-2=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\text{ 或 }x_1=2,\\x_1=-1\text{ 或 }x_1=2.\end{cases}$ $\therefore x_1=2$,故原方程的实数解为 $x=2$.　6. 由题意,有 $\begin{cases}x^2-2x-3\neq0,\\\log^2_{\frac{1}{2}}x-\log_{\frac{1}{2}}x-2>0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\neq-1,x\neq3,\\x>2\text{ 或 }0<x<\frac{1}{4}.\end{cases}$

$\therefore x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.　$\therefore x$ 的范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

7. 按题意:$(a^2-3a-1)+(a^2-5a-6)i=3$ $\therefore \begin{cases}a^2-5a-6=0,\\a^2-3a-1=3.\end{cases}$ 得 $a=-1$.

8.(由实部:$a^2-2a+3=(a-1)^2+2>0$,虚部 $-\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}<0$,由实部大于 0,虚部小于 0,点在第四象限.　9. 假设 z 为纯虚数,则有:$\begin{cases}a^2-a-6=0, & ①\\\frac{a^2+2a-15}{a^2-4}\neq0. & ②\end{cases}$ 由①得 $a=-2$ 或 $a=3$,当 $a=-2$ 时,②式左端无意义.当 $a=3$ 时,②式不成立.故不存在实数 a,使 z 为纯虚数.　10. $\because$ 方程有实根,$\therefore x\in\mathbf{R}$,又 $a\in\mathbf{R}$,$\therefore \begin{cases}a^2x+ax^2+1=0,\\ax^2+x+a^2=0.\end{cases}$ 相减得 $(a^2-1)x=a^2-1$,(1) 当 $a^2-1\neq0$ 时,$x=1$,代回原方程,此时 $a^2+a+1=0$ 无实解;(2) 当 $a^2-1=0$ 时,① $a=1$ 时,$x^2+x+1=0$ 无实根 ② $a=-1$ 时,$x^2-x-1=0$,$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.综上所述,$a=-1$,$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 符合题意．