面向21世纪课程教材

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

微积分及其在生命科学、经济管理中应用

谢季坚　李启文　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

大学数学

微积分及其在
生命科学、经济管理中的应用

谢季坚　李启文　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书主要内容有：微商、微分法、微商的应用、积分及其应用、多元函数微分法、二重积分、微分方程与差分方程、无穷级数等，以及它们在生命科学、经济管理、社会科学中的应用．附录包括：积分表、习题答案、名词术语索引．

本书内容阐述简明扼要，注重直观描述与实际背景，逻辑推理适度；知识结构较新，知识面较宽；注重增强学生用数学的意识，培养学生用数学的能力，让学生初步涉及数学建模．

本书可作为农业大学、林业大学、医科大学的教材，也可作为经济管理、社会科学等专业的教材，还可作为具有高中以上文化程度读者的自学用书．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/谢季坚等编著．—北京：高等教育出版社，1999.9（2001重印）

ISBN 7-04-007658-6

Ⅰ．大…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第30610号

大学数学

谢季坚　李启文　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	北京民族印刷厂		
开　本	787×960　1/16	版　次	1999年9月第1版
印　张	25.75	印　次	2001年7月第2次印刷
字　数	470 000	定　价	21.70元

前　言

1995年国家教委适时推出了《高等农林教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》.从1995年开始,我们经历了申报、立项、制订改革方案和试验等过程.在教委高教司的指导下,华中农业大学于1997年和1998年按照新的改革方案进行了两轮试验.在谢季坚主编《高等数学》教材的基础上,又编写了旨在培养学生用数学能力的《大学数学》补充讲义(微积分及其在生命科学、经济管理中的应用),在试用两轮之后,又征求多方面意见,反复修改、仔细推敲而成为现在呈现在读者面前的这本"面向21世纪课程教材".之所以起名为《大学数学》是考虑到这是一门所有上大学的学生(不分文、理科)都必学的课程,副题则表明了它的主体部分以及强调应用的特点.

作为基础课的数学,在学生心目中它是比较难学的,又觉得没有什么用,认为只是一堆枯燥无味的公式.能不能把数学变得容易学一些呢?国际数学家联盟主席David Mumford说过:"如果你的邻居偶尔问你在教什么,而你教的恰好是微积分,你如何隔着篱笆向他解释微商呢?"因此,在编写时,我们注重概念与定理的直观描述与实际背景,逻辑推理做到适可而止,没有追求天衣无缝的严格证明.

作为非数学专业的大学生,学习数学,掌握数学知识,除了提高自身素质、为终身学习打下一定的基础外,一个重要的目的就是为了用数学.为了用好数学,一方面,注意拓宽知识面,这不仅涉及数学本身(如概率密度函数、最小二乘法、线性规划等),而且还涉及生命科学、经济管理、社会科学等领域;另一方面,在这些领域特别注重增强学生用数学的意识,培养学生用数学的能力,使学生知道数学有用以及如何去用,让学生对数学模型有一个初步的了解.为了便于读者进行阶段复习,每章后面都编有本章重要概念与公式及总练习题.

本书由谢季坚主编.谢季坚教授负责编写1、2、3、4、8章;李启文副教授负责编写5、6、7章;刘承平副教授负责计算机绘图.

本书由武汉大学数学科学学院齐民友教授审稿.

在本书出版的时候，我们要感谢教育部，是教育部富有远见地推出了《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》，为我们提供了一个参与的机遇.还要感谢教育部高教司、《面向21世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划》工作协调指导小组、04－6项目组、华中农业大学及教务处、基础部、数学教研室所给予的支持与帮助.

武汉大学原校长、湖北省及武汉市数学会理事长、博士生导师齐民友教授在百忙之中为本书审稿，并提出许多前瞻性与指导性意见，为本书增色不少.邓泽清副教授、刘承平副教授、汪晓银老师、李淑华老师认真校阅，提出了许多中肯的意见与建议，使本书避免了不少错误.谢朝晖先生提供了许多翻译资料，丰富了本书的素材.对于他们的支持与帮助，我们表示衷心的感谢.

最后，对高等教育出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持，我们表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，对书中的不妥之处，恳请读者和使用本书的教师不吝赐教.

编 者

1999年2月于华中农业大学

目　　录

1 微商 …… 1

1.1 大学数学研究什么? …… 1

1.1.1 大学数学与中学数学研究对象的比较 …… 1

1.1.2 大学数学的主要内容 …… 1

1.2 预备知识 …… 3

1.2.1 逻辑符号 …… 3

1.2.2 邻域 …… 3

1.2.3 不等式 …… 3

1.2.4 单调数列 …… 4

1.3 函数 …… 6

1.3.1 函数概念 …… 6

1.3.2 函数的运算 …… 8

1.3.3 函数的改变量 …… 9

1.3.4 复合运算·复合函数 …… 10

1.3.5 函数模型 …… 11

习题 1－3 …… 15

1.4 函数的极限 …… 17

1.4.1 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 …… 17

1.4.2 函数极限的运算与性质 …… 21

1.4.3 第一个重要极限 …… 24

习题 1－4 …… 25

1.5 函数的连续性 …… 27

1.5.1 连续与间断的直观描述 …… 27

1.5.2 连续与间断的定义 …… 28

1.5.3 初等函数的连续性 …… 32

1.5.4 闭区间上连续函数的性质 …… 34

习题 1－5 …… 35

1.6 函数在无穷远处的极限 …… 37

1.6.1 $x \to \infty$ 时函数的极限及水平渐近线 …… 37

1.6.2 第二个重要极限 …… 40
习题 1－6 …… 43
1.7 无穷小量及其比较 …… 44
1.7.1 无穷小量 …… 44
1.7.2 无穷小量的比较 …… 46
1.7.3 记号 o 与 O …… 48
习题 1－7 …… 49
1.8 微商 …… 50
1.8.1 微积分的典型问题之一——切线问题 …… 50
1.8.2 微商概念 …… 52
1.8.3 可微性与连续性 …… 59
1.8.4 数学怪物——科赫(Koch V)雪花曲线·分形几何学简介 …… 60
习题 1－8 …… 61
第 1 章的重要概念与公式 …… 63
总练习题 1 …… 64
2 微分法 …… 67
2.1 微商的运算法则 …… 67
2.1.1 基本微商公式 …… 67
2.1.2 函数的和、差、积、商的微商法则 …… 68
2.1.3 反函数微商法则 …… 71
2.1.4 复合函数微商法则 …… 72
2.1.5 隐函数微分法 …… 74
习题 2－1 …… 76
2.2 高阶微商 …… 78
2.2.1 高阶微商 …… 78
2.2.2 关于函数乘积微商的莱布尼茨公式 …… 81
习题 2－2 …… 82
2.3 微分及其应用 …… 83
2.3.1 微分及其运算 …… 83
2.3.2 微分的应用 …… 87
习题 2－3 …… 93
第 2 章的重要概念与公式 …… 94
总练习题 2 …… 95
3 微商的应用 …… 98
3.1 微分中值定理 …… 98
3.1.1 微分中值定理 …… 98

3.1.2　微分中值定理的证明 …… 102
习题 3－1 …… 103
3.2　用微商研究函数 …… 104
3.2.1　函数的增减性 …… 104
3.2.2　极值 …… 106
3.2.3　曲线的凹凸性与拐点 …… 110
3.2.4　函数作图 …… 112
习题 3－2 …… 114
3.3　最优化问题 …… 116
3.3.1　最大值、最小值 …… 116
3.3.2　最优化问题 …… 117
习题 3－3 …… 121
3.4　弹性与相关变化率 …… 122
3.4.1　需求弹性 …… 122
3.4.2　相关变化率 …… 125
习题 3－4 …… 127
3.5　洛必达(L'Hospital)法则 …… 128
3.5.1　洛必达法则 …… 128
3.5.2　洛必达法则的证明 …… 131
3.5.3　其他类型不定式的极限 …… 132
习题 3－5 …… 134
第 3 章的重要概念与公式 …… 135
总练习题 3 …… 136
4　积分及其应用 …… 139
4.1　定积分 …… 139
4.1.1　微积分的典型问题之二——面积问题 …… 139
4.1.2　定积分概念 …… 141
4.1.3　可积的充分条件 …… 142
习题 4－1 …… 142
4.2　定积分与原函数的关系 …… 143
4.2.1　直观背景 …… 143
4.2.2　原函数与不定积分 …… 144
4.2.3　微积分基本定理 …… 148
习题 4－2 …… 151
4.3　定积分的性质 …… 152
习题 4－3 …… 155
4.4　积分法 …… 156

4.4.1 直接积分法…… 156
4.4.2 换元积分法…… 158
4.4.3 分部积分法…… 171
4.4.4 积分表的使用…… 176
4.4.5 数值积分法…… 176
习题 4－4 …… 180
4.5 定积分的应用…… 183
4.5.1 广义积分…… 183
4.5.2 面积、体积、弧长的计算…… 187
4.5.3 定积分与概率密度…… 195
4.5.4 定积分在经济管理与社会科学中的应用…… 198
习题 4－5 …… 200
第 4 章的重要概念与公式 …… 202
总练习题 4 …… 203
5 微分方程与差分方程 …… 208
5.1 微分方程基础…… 208
5.1.1 实际背景…… 208
5.1.2 基本概念…… 211
习题 5－1 …… 213
5.2 一阶微分方程…… 213
5.2.1 可分离变量的微分方程…… 213
5.2.2 齐次(微分)方程…… 215
5.2.3 一阶线性微分方程…… 217
5.2.4 微分方程的应用(连续模型)…… 222
习题 5－2 …… 225
5.3 二阶微分方程…… 227
5.3.1 可降阶的二阶方程…… 227
5.3.2 二阶常系数线性微分方程…… 228
5.3.3 微分方程组…… 234
习题 5－3 …… 238
5.4 差分方程…… 238
5.4.1 差分方程基础…… 239
5.4.2 一阶常系数线性差分方程…… 241
5.4.3 二阶常系数线性差分方程…… 243
5.4.4 差分方程的应用(离散模型)…… 245
习题 5－4 …… 252
第 5 章的重要概念与公式 …… 253

总练习题 5 …… 254

6 多元函数微分学 …… 257
6.1 空间曲面与曲线 …… 257
6.1.1 空间直角坐标系 …… 257
6.1.2 曲面 …… 259
6.1.3 空间曲线 …… 262
习题 6－1 …… 264
6.2 多元函数 …… 264
6.2.1 多元函数概念 …… 264
6.2.2 等高线·等产量线 …… 266
6.2.3 二元函数的极限与连续 …… 266
习题 6－2 …… 267
6.3 偏微商 …… 268
6.3.1 偏微商与全微分 …… 268
6.3.2 偏微商的应用 …… 271
6.3.3 高阶偏微商 …… 273
习题 6－3 …… 275
6.4 复合函数微分法 …… 276
6.4.1 复合函数微分法 …… 276
6.4.2 隐函数微分法 …… 279
习题 6－4 …… 281
6.5 最优化问题 …… 282
6.5.1 二元函数的极值 …… 282
6.5.2 无约束最优化问题 …… 284
6.5.3 约束最优化问题 …… 286
6.5.4 最小二乘法与数学建模 …… 290
6.5.5 线性规划 …… 296
习题 6－5 …… 298
第 6 章的重要概念与公式 …… 300
总练习题 6 …… 301

7 二重积分 …… 303
7.1 二重积分概念 …… 303
7.1.1 实际背景 …… 303
7.1.2 二重积分定义 …… 304
7.1.3 二重积分的性质 …… 305
习题 7－1 …… 307

7.2　二重积分的计算 …… 307
7.2.1　在直角坐标下计算二重积分 …… 307
7.2.2　在极坐标下计算二重积分 …… 312
习题 7－2 …… 314
7.3　二重积分的应用 …… 315
7.3.1　用二重积分计算概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ …… 315
7.3.2　用二重积分计算体积与面积 …… 316
7.3.3　二重积分在社会科学中的应用 …… 319
习题 7－3 …… 320
第 7 章的重要概念与公式 …… 321
总练习题 7 …… 321

8　无穷级数 …… 323
8.1　数项级数 …… 323
8.1.1　基本概念 …… 323
8.1.2　基本性质·收敛级数的必要条件 …… 328
8.1.3　正项级数的收敛检验法 …… 329
8.1.4　交错级数·莱布尼茨判别法 …… 334
8.1.5　绝对收敛·条件收敛 …… 336
习题 8－1 …… 337
8.2　幂级数 …… 339
8.2.1　幂级数概念与性质 …… 339
8.2.2　幂级数的收敛半径 …… 340
8.2.3　幂级数的运算 …… 342
习题 8－2 …… 344
8.3　泰勒 (Taylor) 级数 …… 345
8.3.1　问题的提出 …… 345
8.3.2　泰勒公式 …… 348
8.3.3　函数的泰勒展开式 …… 349
8.3.4　泰勒级数的应用 …… 352
习题 8－3 …… 356
第 8 章的重要概念与公式 …… 357
总练习题 8 …… 358
附录 1　积分表 …… 361
附录 2　习题答案 …… 369
附录 3　名词术语索引 …… 392
参考文献 …… 398

1 微　商

《大学数学》的主体部分是微积分，以函数为研究对象．微商概念是微积分的重要概念之一，它是学习微分学、积分学与多元微积分学的基础．微商是用极限来定义的，因此，极限方法是研究函数变化的基本方法．本章主要内容是：函数与函数模型、极限与连续、切线与微商等．

1.1　大学数学研究什么？

大学数学是进入大学的学生必修的课程，它是其他数学课程的基础与先导，它的主体部分是微积分及其应用．

1.1.1　大学数学与中学数学研究对象的比较

中学数学的研究对象基本上是不变的量，而大学数学则以变量为研究对象．举例如表 1.1．

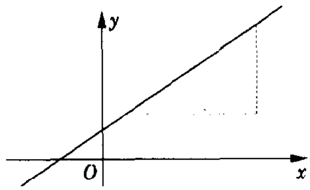
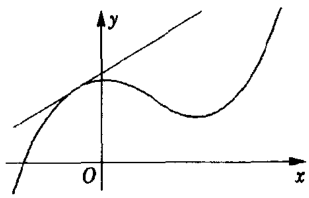
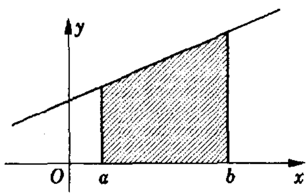
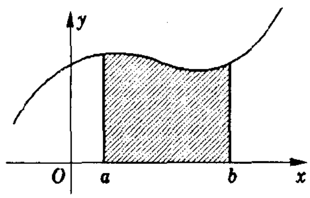
1.1.2　大学数学的主要内容

大学数学的主体部分是微积分及其应用，它的主要内容包括两个方面：

微分学	积分学
函数的变化率，微商，	原函数与不定积分，定积分，
极大与极小，最大与最小，	面积，体积，弧长，
经济学中的边际概念，生物种群的增长率等	消费者剩余与生产者剩余等

微分学主要是处理函数的变化率问题，即讨论微商的计算法则和应用问题．积分学是处理微分学的逆问题，即如何从变化率去寻求原函数的问题．

表 1.1

中学数学	大学数学
直线的斜率	曲线在一点处切线的斜率
	
梯形的面积	曲边梯形的面积
	
平均变化率 平均速度 平均加速度 有限个数的平均值	瞬时变化率 瞬时速度 瞬时加速度 区间上函数的平均值

微积分研究的两类典型问题是切线问题与面积问题，下面是这两类典型问题的几何表示.

切线问题

求曲线上一点切线的斜率.

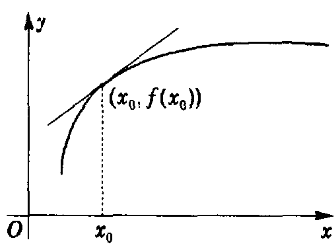


图 1－1

面积问题

求曲边梯形的面积.

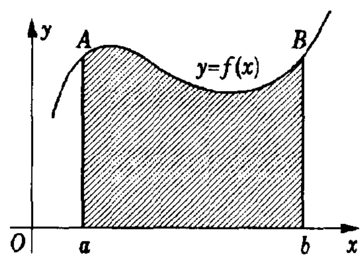


图 1－2

从古希腊开始，微积分的发展经历了两千多年的探索道路. 直到 17 世纪 70 年代前后，由英国数学家、物理学家牛顿(Newton I, 1642—1727) 和德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz G W, 1646—1716) 分别在不同的国度独立地解决了这两类典型问题. 这就是人们通常说的，牛顿、莱布尼茨创建了微积分，莱布尼茨创造的微分和积分符号一直沿用至今. 他们为微积分的创建作出了奠基性

贡献.

1.2 预备知识

1.2.1 逻辑符号

在数学的逻辑推理中,为了书写方便,我们采用下列逻辑符号.

符号 $\forall$ 表示"任给"或"每一个".

符号 $\exists$ 表示"存在"或"找到".

符号 $A \Leftrightarrow B$ 表示命题(或条件)A 与 B 等价,或命题(或条件)A 与 B 互为充要条件.

1.2.2 邻域

设 x_0,δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,则称开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$为点 x_0 的 δ - 邻域,记为 $U(x_0)$.点 x_0 叫做此邻域的中心,δ 叫做此邻域的半径.把不包含 x_0 的邻域称为空心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0)$.

1.2.3 不等式

1.2.3.1 设 $a > 0, b > 0$,则有 $ab^n \leqslant \left(\dfrac{a + nb}{n + 1}\right)^{n+1}$, (1)

其中等号只有 $a = b$ 时才成立.

证 根据不等式$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,

$a_i > 0, (i = 1,2,\cdots,n)$,

$$\sqrt[n+1]{a\,b^n} = \sqrt[n+1]{a\,b\,b\cdots b} \leqslant \frac{a + b + b + \cdots + b}{n + 1} = \frac{a + nb}{n + 1}.$$

两边同乘$(n + 1)$次方,得

$$ab^n \leqslant \left(\frac{a + nb}{n + 1}\right)^{n+1}.$$

1.2.3.2 $\forall x$,有 $|\sin x| \leqslant |x|$, (2)

当 $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $|x| \leqslant |\tan x|$. (3)

证 作单位圆如图 1 - 3.设圆心角 $\angle BOA$ 为一锐角,其弧度记为 x,显然 $OA = 1, BD = \sin x, CA = \tan x$.

由于 $\triangle BOA$ 的面积 $<$ 扇形 BOA 的面积 $<$ $\triangle COA$ 的面积,

因此，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{1}{2}OA \cdot BD < \frac{1}{2}OA \cdot \overset{\frown}{AB} < \frac{1}{2}OA \cdot CA,$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

$$\sin x < x < \tan x.$$

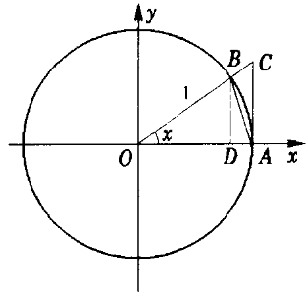


图 1－3

又当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，即 $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ 时，由上式得到 $\sin(-x) < (-x) < \tan(-x)$，或 $-\sin x < -x < -\tan x$.

这就证明了当 $|x| < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$ 时，$|\sin x| < |x| < |\tan x|$.

当 $x = 0$ 时，$\sin 0 = 0 = \tan 0$.

当 $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$.

于是，就完全证明了上述结论.

1.2.4 单调数列

在中学数学里已经学习过数列的极限与运算法则. 这里我们再介绍一类特殊的数列——单调数列

例如，数列 $1,2,\cdots,n,\cdots,x_n = n$，它的前项总不超过后项：$x_n \leqslant x_{n+1}$，这类数列称为递增数列；又如，数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots,x_n = \frac{1}{n}$，与刚才情况正好相反，$x_n \geqslant x_{n+1}$，这类数列称为递减数列.

定义　对于数列 $\{x_n\}$，若 $\forall n$，有 $x_n \leqslant x_{n+1}$，则称 $\{x_n\}$ 是递增数列，记为 $\{x_n\}\uparrow$；若 $\forall n$，有 $x_n \geqslant x_{n+1}$，则称 $\{x_n\}$ 是递减数列，记为 $\{x_n\}\downarrow$.

递增数列与递减数列统称为**单调数列**.

例 1　试证 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是递增数列.

证　即要证 $x_n \leqslant x_{n+1}$.

利用 1.2.3 的不等式(1)，可得

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

故　$\{x_n\}\uparrow$.

类题　试证 $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 是递增数列.

例 2　试证 $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是递减数列.

证　即要证 $z_n\geqslant z_{n+1}$.

$$z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{y_{n+1}},$$

同理可证　$$z_{n+1}=\frac{1}{y_{n+2}}.$$

由类题知 $\{y_n\}\uparrow$,即 $y_{n+1}\leqslant y_{n+2}$,因而 $\frac{1}{y_{n+1}}\geqslant\frac{1}{y_{n+2}}$.

所以　$$z_n\geqslant z_{n+1},$$

即　$$\{z_n\}\downarrow.$$

下面介绍单调数列的性质.

定理　(单调有界定理)　单调有界数列必有极限.

此定理不予证明,仅给出几何解释.

因为从数轴上看,对应于单调数列的点 x_n 必向一个方向移动且只有两种可能情形:或者点 x_n 沿数轴向无穷远($x_n\to+\infty$ 或 $x_n\to-\infty$);或者点 x_n 无限接近某个定点 a,此时,a 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限. 但现在又假设数列是有界的,即有界数列的点 x_n 全部落在数轴上某个区间 $[-M,M]$ 内,那末第一种情况就不可能出现了. 这就表示数列 $\{x_n\}$ 趋向一个极限,且这个极限的绝对值不会超过 M.

作为单调有界定理的应用,我们讨论一个重要极限.

例 3　证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证　考察数列 $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

由例 1 知,$\{x_n\}\uparrow$,$x_n>x_1=2$. 根据单调有界定理,只要证 $\{x_n\}$ 是有界的便可.

由于　$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=z_n,$$

由例 2 知,$\{z_n\}\downarrow$,所以,$z_n<z_1=4$,

因而得　　$2 \leqslant x_n < 4$,

故　　$\{x_n\}$ 有界.

根据单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在,其值记为 e,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

1.3　函　　数

1.3.1　函数概念

函数关系在现实世界是无处不在的,它不仅描述科学技术中的一些变量关系,而且也能反映生活中的一些变量关系.

定义 1　设有两个非空集合 D, R. 称映射

$$f:\quad D \to R$$
$$x \mapsto f(x) = y \in R$$

为函数,通常记为 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, f 称为对应法则. D 称为函数 f 的定义域,集合 $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域,且 $f(D) \subseteq R$.

由上述定义可知,确定一个函数有两个要素,即定义域 D 与对应法则 f.

在初等数学中,我们已经学过一些函数:

$y = x^\alpha$, α 为实数(幂函数);

$y = a^x, \mathrm{e}^x$. 其中 $a > 0, a \neq 1$(指数函数);

$y = \log_a x, \ln x$. 其中 $a > 0, a \neq 1$(对数函数);

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$(三角函数);

$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$(反三角函数).

这五类函数统称为**基本初等函数**.

下面再举几个在初等数学中没有见过的函数.

例 1　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

通常称为**符号函数**,它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,而值域由三个数 $-1, 0, 1$ 组成(图 1 - 4).