高等学校数学学习辅导教材

高等数学学习指导与解题训练

（线性代数分册）

刘学生　谭欣欣　王丽燕　主编

10

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学
学习指导与解题训练

（线性代数分册）

主　　编　刘学生　谭欣欣　王丽燕
主　　审　姜乃斌
分册主编　刘学生

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与解题训练 线性代数分册/刘学生等主编. 一大连:大连理工大学出版社,2000.1 (2000.9 重印)
ISBN 7-5611-1674-8

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 62066 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码 116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4708898
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连业发印刷有限公司印刷

开本:787×1092 毫米 1/32 字数:183 千字 印张:8.5
印数:12001—18000 册
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 9 月第 3 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:习 文
封面设计:孙宝福

定价:27.00 元(本册 9.00 元)

前　言

在党的科教兴国战略指引下，教育与科技战线呈现出前所未有的繁荣景象，对人才的需求更加广泛，规格也越来越高。为了适应这一需要，培养具有创造性思维的跨世纪复合型人才，我们特编写了此套书。

我们编写这套教材的宗旨是使理工科在校的大学生能用较少的学时掌握好所学知识，扩大课堂的信息量，更好地通过高等数学本科考试。而对于想深入学习参加考研的同学又是一本全面系统精炼的复习资料，为此，书中收集了 1995 年～1999 年研究生考试的全部试题，并给以详细的解答。对于科技工作者，这套教材又是一本工具书，便于查找所需的理论知识和方法。

这套教材共分三分册《线性代数》、《复变函数》、《概率与数理统计》，分别由刘学生、谭欣欣、王丽燕编写。编者总结多年的教学经验，每章均设计了四个板块，即知识点、考点；典型题、考题精选；教材同步习题解答；模拟试题自测。

教材同步习题解答是针对高校普遍使用的国家级优秀教

材：线性代数（同济大学编，四版），复变函数（西安交大编，四版），概率与数理统计（浙江大学编，二版）等书中的习题，以便于教师与同学们对照使用。

模拟题自测力求有深度、有广度，并强调知识的覆盖面，无论从在题型、题量和难易程度方面都能反映目前高等数学本科考试和研究生考试的要求，与真题协调统一，使学生起到自测达标、考前热身的作用。

本书在编写过程中得到大连大学徐晓鹏等同志的热情帮助和大连大学数学系的鼓励，编者在此一并给以衷心的感谢。

编 者

1999年11月

目　　录

第一章　n 阶行列式

一、知识点、考点

行列式最早是由解线性方程而引进的。时至今日，行列式已不止如此，在许多方面都有广泛的应用，本章着重叙述了 n 阶行列式的定义，n 阶行列式的计算及其应用。

(一) n 阶行列式的定义

$$n\text{ 阶行列式}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，而其符号为 $(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}$，$\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

(二) 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等。

(2) 互换行列式的两行(两列)行列式变号。由此即得若行列式某两行(或两列)完全相同，此行列式等于零。

(3) 把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一数 k，等于以数 k 乘这个行列式。

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5)把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)上，行列式不变。

(三)行列式计算

(1)定义法。

(2)化成三角形行列式法，这是行列式计算中最基本的方法。

(3)递推法：根据已给行列式 D_n 的特点，找出 D_n 的递推关系式。

(4)降阶法：可利用按行(列)展开定理、拉普拉斯定理*、分块行列式的降阶定理*等进行计算。

(5)升阶法：此法多采用的形式为加边法。

(6)分解之和法。

(7)分解之积法。

---

* 表示可在参考书中查到。

(8)换元法。

(9)数学归纳法。

(10)线性因子法。

(11)辅助行列式法。

(12)应用范得蒙行列式进行计算。

(13)n 阶循环行列式算法。

(四)行列式的应用

克莱姆法则：

若一个含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

其系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组(1)　　仅有一个解

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,\cdots,b_n$，而得到的行列式。

二、典型题、考题精选

(一)几种特殊行列式的结果

(1)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (\text{上三角行列式})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (\text{下三角行列式})$$

(2)对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)对称与反对称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij} = a_{ji}$ $\quad \begin{matrix} (i = 1,2,\cdots,n) \\ (j = 1,2,\cdots,n) \end{matrix}$

D 称为对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{满足 } a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

D 称为反对称行列式。若阶数 n 为奇数时，则 $D=0$

(4)范得蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

(二)行列式的计算

【例 1】 (用定义计算)计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　由行列式定义知 $D=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，因 $a_{11}a_{14}a_{15}=0$，所以 D 的非零项 j_1 只能取 2 或 3，同理由 $a_{41}=a_{44}=a_{45}=a_{51}=a_{55}=0$，因而 j_4j_5 只能取 2 或 3，又因 $j_1\cdots j_5$ 要

求各不相同，故 $a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{5j_5}$ 项中至少有一个必须取零，所以 $D=0$。

【例 2】 计算(化为三角形法)

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 各行加到第一行中去

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

【例 3】 计算(用递推法)

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解　按第一行展开得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \tag{1}$$

按递推关系　　$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-D_1)$

$$D_1=\alpha+\beta \qquad D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \tag{2}$$

由(1)式又可推导出

$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$,按递推关系得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{3}$$

由(2)(3)解得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

【例 4】 计算(降阶法)

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $n\geqslant 2$,、$\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0$

解

$$D_n = \left| \begin{bmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_n \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right|$$

$$D_n = \frac{\begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\Bigg|$$

$$=(-2)^n\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}1-\dfrac{n}{2} & -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{-1}\\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j & 1-\dfrac{n}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i\Big[(n-2)^2-\sum_{j\cdot k=1}^{n}a_ja_k^{-1}\Big]$$

【例 5】 计算(升阶法)行列式$|I_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|$,其中 I_n 是单位阵,$\boldsymbol{u}=(u_1\cdots u_n)'$为 n 维实列向量,且 $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}=1$。

解 将行列式$|I_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|$升为$(n+1)$阶行列式

$$|I_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|=\begin{vmatrix}1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n\\ 0 & 1-2u_1^2 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n\\ 0 & -2u_2u_1 & 1-2u_2^2 & \cdots & -2u_2u_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & -2u_nu_1 & -2u_nu_2 & \cdots & 1-2u_n^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ u_1 & 1 & & & \\ u_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_n & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=1}^{n} 2u_i^2 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - 2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = -1 \text{（由} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1\text{）}$$

【例 6】 计算（分解之和法）

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$