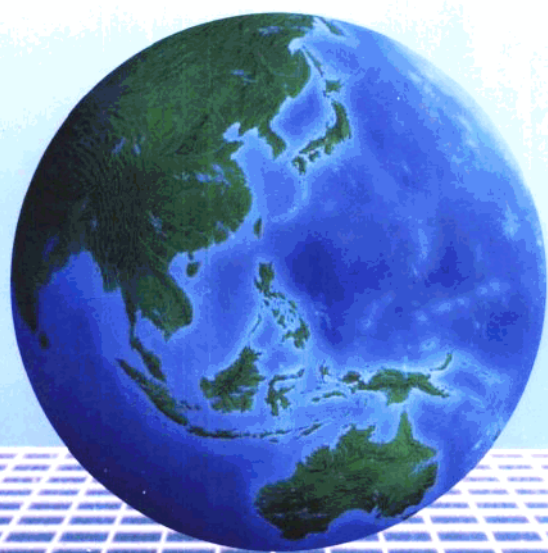


全球大气环流气候图集

I. 气候平均态

李建平 著



气象出版社

前 言

大气是一种复杂的旋转流体,其大规模的时空运动构成了大气环流的全部内容。大气环流是气候系统中主要的子系统,也是长期大气变化和气候研究中最重要的一部分。长期以来,人们一直致力于理解大气环流的基本特征和演变规律,因为没有对大气环流主要特征及其动力学过程的了解,就不可能对其运动规律给出满意的物理解释,也就不可能使长期天气预报和气候预测建立在牢固的基础之上。

现实中的大气环流的结构是如此复杂,以致于我们对大气环流的研究主要限制在对气候平均环流的认识上。尽管大气环流受一组物理定律所制约,但由于数理技术上存在种种无法克服的困难,使得我们对大气环流的大部分认识仍然主要源于气象观测的诊断结果。因此,正如 Lorenz 所言“随着大气观测过程的重大改进,我们对大气环流的认识也会有重大的进展”。这说明对大气环流的认识绝对不会只停留在一个水平上。

近 10 年来,气象观测技术和数据处理技术已比过去有了明显的提高,特别是资料同化技术的引入,使得气象观测的数据无论从质上还是量上都有了长足的进步,NCEP/NCAR 再分析资料就是一个很好的例子。既然观测资料的质量有了提高,那么根据新的资料重新以图的形式来绘制大气环流的基本特征也就成为一件顺理成章的事。这是促使我们出版这套全球大气环流气候图集的最初动机。由于熟知大气环流的基本特征和三维图像应当是每一位从事天气和气候研究工作所必须具备的基本本领,因此就更有必要出版一套能够从各个侧面来详尽地展现大气环流基本特征的图集。本套图集初步分为五册,具体是:第一册,气候平均态;第二册,变率;第三册,基本模态和遥相关型;第四册,能量、动量和各种输送;第五册,持续性和谱特征。这套图集尽可能地涵盖大气环流的一些主要方面,但并不意味着它涵盖了大气环流的方方面面。完成这样一套图集需要大量细致的诊断工作,虽然不是一件容易之事,但也不是什么特别的创新。在这个倡导创新的时代,如果本套图集能为他人创新提供少许基础或能为他人在进行创新性研究时提供了某些参考的话,作者也就心满意足了。

本套图集仅仅是给大气科学研究工作者提供大气环流基本特征的真实素材,尽可能把不加修饰的原貌展现给读者,而并不对结果加以分析。这样做有两个基本的好处,一是能充分体现“仁者见仁,智者见智”;二是不会把作者认识上的片面性强加于读者,从而不会对读者的自身认识有丝毫的影响,不会对读者认识上的原创性有丝毫的抹煞。这样,读者可以通过对自己所关心结果的认识、思考、感悟和提炼,从而形成自己独有的大气环流观。

总之,这套图集如果能够对从事大气科学的科研人员有所裨益、如果能够成为气象工作者常用的手册,那就是作者的最大心愿!

在本套图集的编辑过程中,自始至终得到了曾庆存先生的指导和大力支持,作者深表谢意!本工作还得到了国家自然科学基金重点项目(49735160)、中国科学院资源环境领域知识创新工程重要方向项目(KZCX2-203)、中国科学院大气物理研究所创新基金项目(8-1301)、大气物理研究所大气科学和地球流体力学国家重点实验室、中国科学院全国优秀博士学位论文作者专项基金及国家自然科学基金项目(49905007)的资助,在此一并表示衷心的感谢!

作 者

2000 年 5 月 10 日

4442F / 07

符号、缩写和定义表

(List of Symbols, abbreviations and definitions)

a	地球平均半径 (mean radius of the earth) ($\approx 6.371 \times 10^6$ m)
ANN	年平均 (annual mean)
B	Bowen 比 (Bowen ratio) ($= F_{SH}^{\uparrow} / F_{LH}^{\uparrow}$)
c_p	干空气定压比热容 (specific heat capacity of dry air at constant pressure) ($= 1.00464 \times 10^3$ J kg ⁻¹ K ⁻¹)
C	三维空间中的一条连续曲线 (a continuous curve in three-dimensional space)
C_C	总云量 (total cloud cover)
C_{CH}	高云量 (high-cloud cover)
C_{CL}	低云量 (low-cloud cover)
C_{CM}	中云量 (medium-cloud cover)
C_{je}	经圈环流 (meridional circulation)
D	散度 (divergence)
DJF	12 月至 2 月 (December to February)
f	科氏参数 (Coriolis parameter) ($= 2\Omega \sin \varphi$)
e	水汽压 (water vapor pressure)
e_s	饱和水汽压 (saturation water vapor pressure)
$F_{LH}^{\uparrow}$	地面向上潜热通量 (upward latent heat net flux at surface)
F_{LS}	地面向上潜热通量和感热通量差 (difference between latent and sensible heat net fluxes at surface) ($= F_{LH}^{\uparrow} - F_{SH}^{\uparrow}$)
$F_{LW}^{\downarrow}$	地面向下长波辐射通量 (downward long-wave radiation flux at surface)
$F_{LW}^{\uparrow}$	地面向上长波辐射通量 (upward long-wave radiation flux at surface)
F_{LW}	地面净长波辐射通量 (net long-wave radiation flux at surface)
$F_{LW}^{\uparrow\uparrow}$	大气顶部向上长波辐射通量 (upward long-wave radiation flux at top of atmosphere)
F_{rad}^{sfc}	地面净辐射通量 (net radiation flux at surface)
F_{rad}^{top}	大气顶部净辐射通量 (net radiation flux at top of atmosphere)
$F_{SH}^{\uparrow}$	地面向上感热通量 (sensible heat net flux at surface)
$F_{SW}^{\downarrow}$	地面向下短波辐射通量 (downward short-wave radiation flux at surface)

$F_{\text{sw}}^{\uparrow}$	地面向上短波辐射通量 (upward short-wave radiation flux at surface)
F_{sw}	地面净短波辐射通量 (net short-wave radiation flux at surface)
$F_{\text{sw}}^{\downarrow}$	大气顶部向下短波辐射通量 (downward short-wave radiation flux at top of atmosphere)
$F_{\text{sw}}^{\uparrow\downarrow}$	大气顶部向上短波辐射通量 (net short-wave radiation flux at top of atmosphere)
$F_{\text{sw}}^{\top}$	大气顶部净短波辐射通量 (net radiation flux at top of atmosphere)
g	重力加速度 (acceleration due to gravity) ($=9.806 \text{ m s}^{-2}$)
gpm	位势米 (geopotential meter) ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)
i	纬向单位矢量 (unit vector in the zonal direction)
JJA	6 月至 8 月 (June to August)
j	经向单位矢量 (unit vector in the meridional direction)
k	垂直方向单位矢量 (unit vector in the vertical direction)
L	蒸发潜热 (latent heat of evaporation) ($=2.5006 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$)
MAM	3 月至 5 月 (March to May)
$\mathbf{N}$	斜压矢量 (baroclinity vector)
$\mathbf{N}_h$	水平斜压矢量 (horizontal baroclinity vector)
$ \mathbf{N}_h $	水平斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的模 (modulus of horizontal baroclinity vector $\mathbf{N}$)
N_x	斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的 x -分量 (x -component of baroclinity vector)
N_y	斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的 y -分量 (y -component of baroclinity vector)
N_z	斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的 z -分量 (z -component of baroclinity vector)
p	压强 (pressure)
p_{00}	参考面气压 (reference level pressure)
P	降水率 (precipitation rate)
P_c	对流性降水率 (convective precipitation rate)
P_s	地面气压 (surface pressure)
P_{sl}	海平面气压 (sea level pressure)
q	比湿 (specific humidity)
q_s	饱和比湿 (specific humidity of saturated air)
r	相对湿度 (relative humidity)
R_d	干空气比气体常数 (gas constant for dry air) ($=2.87 \times 10^2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$)
SON	9 月至 11 月 (September to November)
T	温度 (temperature)
u	向东速度分量 (eastward velocity component) ($=dx/dt$)
v	向北速度分量 (northward velocity component)

	$(=dy/dt)$
$\mathbf{V}$	水平风矢量 (horizontal wind vector) $(=u\mathbf{i}+v\mathbf{j})$
$\mathbf{v}_g$	地转风矢量 (geostrophic wind vector)
w	向上速度分量 (upward velocity component) $(=dz/dt)$
W	可降水量 (precipitable water)
z	(1) 几何高度 (geometric height); (2) 位势高度 (geopotential height) (3) 与标准大气位势高度的偏差 (geopotential height departure from the standard atmosphere) $(=z-z_{SA})$
z_{SA}	标准大气位势高度 (取自美国标准大气, 1976) (geopotential height of the standard atmosphere from U.S. Standard Atmosphere, 1976)
α	比容 (specific volume) $(=1/\rho)$
ζ	相对涡度 (relative vorticity)
θ	位温 (potential temperature) $(=T(1000/p)^{\kappa})$
θ_e	相当位温 (equivalent potential temperature) $(=\theta \exp(Lq/c_p T))$
κ	$=R_d/c_p (=0.286)$
λ	经度 (longitude)
ρ	密度 (density)
φ	纬度 (latitude)
Φ	重力位势 (geopotential)
χ	速度位势 (velocity potential)
ψ	流函数 (streamfunction)
Ψ	质量流函数 (mass streamfunction)
ω	(x, y, p, t) 坐标系中的垂直速度 (vertical velocity in (x, y, p, t) system) $(=dp/dt)$
Ω	地球自转角速度 (angular velocity of the earth) $(=7.292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1})$
$\bar{A}$	量 A 的时间平均 (time average of any quantity A) $(=(t_2-t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} A dt)$
A'	对 A 的时间平均的偏差 (departure from zonal average of A) $(=A-\bar{A})$
$[A]$	A 的纬向平均 (zonal average of A)

$$(\equiv (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} A d\lambda)$$

A^* 对 A 的纬向平均之偏差 (departure from zonal average of A)
 $(= A - [\bar{A}])$

$\bar{A}^*$ 定常波或常定涡旋 (stationary wave or stationary eddy)
 $(= \bar{A} - [\bar{A}])$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积 (vector product of vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$)
 $(= (A_y B_z - B_y A_z) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k})$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的内积 (inner product of vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$)
 $(= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$

$\text{curl } \mathbf{A}$ 矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度 (curl of vector $\mathbf{A}$)
 $(= (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) \mathbf{i} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) \mathbf{j} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{A})$

$\text{div } \mathbf{A}$ 矢量 $\mathbf{A}$ 的散度 (divergence of vector $\mathbf{A}$)
 $(= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A})$

$\text{grad } a$ 标量 a 的梯度 (gradient of scalar a)
 $(= \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla a)$

∇ Hamilton 算子 (Hamilton operator)
 $(= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z})$

∇_h (x, y, z, t) 坐标系中的水平梯度 (horizontal gradient in (x, y, z, t) system)
 $(= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y})$

∇_p (x, y, p, t) 坐标系中的水平梯度 (horizontal gradient in (x, y, p, t) system)
 $(= \mathbf{i} (\frac{\partial}{\partial x})_p + \mathbf{j} (\frac{\partial}{\partial y})_p)$

1. 资料和计算

丰富、可靠的气象观测资料是研究和了解大气环流及气候特征的最重要的基础。正是由于它们，才大大加深和扩大了我们对大气和气候运动本身的认识，并为理论研究和数值模拟提供了重要素材和基本保证。没有这些宝贵的资料作为基础，任何关于大气或气候的研究都只能停留在空中楼阁亦或海市蜃楼的阶段。虽然气象观测可以追溯到千年以前，但显然由于条件、认识、技术手段和科学发展水平的限制，在早期只是对发生在某些局部区域的大气中某些特殊天气现象的零星观测，还算不上是对大气环流的从地面到高空、从区域到全球、从单一到综合、从特殊到一般、从里到外、由外及里、从下到上、由上至下、从离散到连续的全方位、全视角的、系统的三维观测。近半个多世纪以来，随着科学技术的迅速发展、监测手段的日益先进、社会需求的不断增加、国际协作的日渐密切，上述状况有了本质的改变。各种新技术如气象雷达、气象卫星、红外及微波遥感、高速电子计算机等在气象观测中的广泛应用，使得气象观测水平有了史无前例的发展，观测的种类和质量有了前所未有的提高。加之，由于人类本身生存和发展的需要，使得气象观测项目和种类大大丰富起来；由于国际间广泛紧密的合作，使得观测资料的协调度和统一性也大大提高了。目前，已经形成了可同时监测全球天气情况的气象观测系统和气象通讯系统。特别是，1991年美国国家环境预报中心(NCEP)和美国国家大气科学研究中心(NCAR)联手实施的全球再分析计划(NCEP/NCAR Global Reanalysis Project)，把全球观测资料的质量提高到一个新的水平。该计划在全球范围内，通过世界各国及各主要科研机构和业务部门，把能搜集到的资料包括地面观测资料、高空探测资料、船舶资料、卫星遥感资料、雷达资料、飞机资料、气球资料、浮标资料以及其它观测资料等统一进行编码、详细的订正预处理和复杂的质量控制，并用一个较完善的同化系统统一进行资料同化，使得观测资料的统一性、协调性、可靠性、完善性、代表性都有了显著的提高，引起了国际大气科学界的极大关注和反响。该计划现已完成1948~1997年的资料再分析工作，并在实施新的计划内容。NCEP/NCAR再分析资料反映了当代国际大气科学资料研究的水平，其代表性是不言而喻的。由于所搜集的资料来自于世界各国，所以处理后的资料理应采取“取之于民，用之于民”的使用原则，事实也是如此。因在资料使用上的高度开放性和高效性，目前该再分析资料已成为当今世界上应用最为普遍的大气环流和气候诊断资料。所以，NCEP/NCAR再分析资料是世界各国集体团结协作的优秀结晶，是世界大气科学界的共同财富，可以预料，其巨大的价值必会随着时间的推移越加显现出来。本套全球大气环流气候图集就是利用NCEP/NCAR的1958~1997年40年再分析资料进行统计处理的。

本套图集初步分为五册，具体是：第一册，气候平均态；第二册，变率；第三册，基本模态和遥相关型；第四册，能量、动量和各种输送；第五册，持续性和谱特征。本书是其中的第一册，旨在用尽可能多的气象要素、从更多的角度来全面展示大气环流气候平均状态的三维结构和特征，包括环流的纬向对称性和随经度变化的纬向不均匀性（即纬向对称场的偏差场）。

1 原始资料

本书所用资料是 NCEP/NCAR 再分析数据集中月平均资料子集数据的最优月平均资料（月统计是按每日 4 个时次即 0, 6, 12 和 18 时的资料全部参加统计的最优平均），时间段为 1958 年 1 月~1997 年 12 月共 40 年，包括常规要素资料、扩展要素资料和其它要素资料三类，具体由表 1 给出。

表 1 本书中所用 NCEP/NCAR1958~1997 再分析资料一览表
Table 1. List of NCEP/NCAR 1958-1997 reanalysis data used in this book.

参 数	单 位	层次类型和层次值	网格类型
纬向风 u	m s^{-1}	p -L17	经纬度
经向风 v	m s^{-1}	p -L17	经纬度
垂直速度 ω	hPa s^{-1}	p -L11	经纬度
位势高度 z	gpm	p -L17	经纬度
温度 T	K	p -L17	经纬度
比湿 q	kg kg^{-1}	p -L8	经纬度
相对湿度 r	%	p -L8	经纬度
相对涡度 ζ	s^{-1}	p -L17	经纬度
散度 D	s^{-1}	p -L17	经纬度
流函数 ψ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	p -L17	经纬度
位势速度 χ	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	p -L17	经纬度
海平面气压 P_{SL}	hPa	SL	经纬度
降水率 P	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$	SFC	高斯
可降水量 W	kg m^{-2}	TOT	经纬度
对流性降水率 P_c	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$	SFC	高斯
云量 $C_C, C_{\text{CU}}, C_{\text{CM}}$ 和 C_{CL}	%	THML	高斯
向下长波 $F_{\text{LW}}^{\downarrow}$	W m^{-2}	SFC	高斯
向下短波 $F_{\text{SW}}^{\downarrow}$ 和 $F_{\text{SW}}^{\text{TL}}$	W m^{-2}	ST	高斯
向上长波 $F_{\text{LW}}^{\uparrow}$ 和 $F_{\text{LW}}^{\text{TL}}$	W m^{-2}	ST	高斯
向上短波 $F_{\text{SW}}^{\uparrow}$ 和 $F_{\text{SW}}^{\text{TL}}$	W m^{-2}	ST	高斯
净长波 F_{LW}	W m^{-2}	SFC	高斯
净短波 F_{SW}	W m^{-2}	SFC	高斯
潜热通量 $F_{\text{TH}}^{\uparrow}$	W m^{-2}	SFC	高斯
感热通量 $F_{\text{SH}}^{\uparrow}$	W m^{-2}	SFC	高斯

表中的一些符号的意义如下：

p -L17: 等压面, 共 17 层: 1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100, 70, 50, 30, 20, 10hPa;

p -L11: 等压面, 共 11 层: 1000, 850, 700, 600, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100hPa;

p -L8: 等压面, 共 8 层: 1000, 925, 850, 700, 600, 500, 400, 300hPa;

SL: 平均海平面; SFC: 地面; ST: 地面及大气顶部; TOT: 总大气柱;

THML: 总大气柱、高云、中云、低云;

经纬度网格: $2.5^\circ \times 2.5^\circ$ 网格, 纬向从东经 0°E 到西经 2.5°W , 经向从北纬 90°N 到南纬 90°S ;

高斯网格: $1.875^\circ \times 1.875^\circ$ 网格, 纬向从东经 0°E 到西经 1.875°W , 经向从北纬 88.542°N 到南纬 88.542°S 。

2 计 算

本书中的气候平均采用统计中简单的等权平均（即算术平均）。对任意量 A 在第 I 年第 j 月（或季）的值记为 $A_{I,j}$ ，其多年第 j 月份（或季）的气候平均值为 $\bar{A}_j$ ，则

$$\bar{A}_j = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N A_{I,j}, \quad (1)$$

其中 N 为统计的总年数。本书中 $N=40$ 。令水平空间场 A 在离散网格点上的值已知，其在纬度为 i 、经度为 j 处的值记为 A_{ij} ，在纬度为 i 处 A 的纬向平均记为 $[A]_i$ ，则

$$[A]_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m A_{ij}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

其中 m 为纬圈上的格点数， n 为经圈上的格点数。本书中对经纬网格场 $m=144, n=73$ ；对高斯网格场 $m=192, n=94$ 。进一步，记 A 在纬度为 i 、经度为 j 处的纬向偏差值为 A_{ij}^* ，则

$$A_{ij}^* = A_{ij} - [A]_i, \quad (3)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ 。

本书中在统计位势高度 z 的纬向平均时已减去了相应等压面上标准大气的位势高度值 z_{SA} 。这里标准大气的位势高度 z_{SA} 是根据 1976 年美国标准大气得来，如表 2 所示。

表 2 本书中所用不同等压面的标准大气位势高度值（美国标准大气，1976）

Table 2. Values of the geopotential height of standard atmosphere at the different pressure levels used in this book. (U.S. Standard Atmosphere, 1976)

	气 压 p (hPa)	位势高度 z_{SA} (gpm)
1	1 000	110
2	925	762
3	850	1 457
4	700	3 012
5	600	4 206
6	500	5 574
7	400	7 185
8	300	9 164
9	250	10 363
10	200	11 784
11	150	13 608
12	100	16 180
13	70	18 442
14	50	20 576
15	30	23 849
16	20	26 481
17	10	31 055

对于位温 θ 是按下述熟知的公式计算的

$$\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\kappa}, \quad (4)$$

其中 $\kappa = R_d / c_p$, p_{00} 为参考面气压, 一般取为 $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$.

相当位温 θ_e 是根据下述关系式得到的

$$\theta_e = \theta \exp \left(\frac{L q_s}{c_p T} \right), \quad (5)$$

其中 L 是相变潜热, q_s 是饱和比湿, 满足

$$q_s = \frac{0.622 e_s}{p}, \quad (6)$$

这里 e_s 是饱和水汽压。利用关于饱和水汽压随温度变化关系的 Clapeyron-Clausius 方程可得

$$\begin{aligned} e_s &= e_{s0} \exp \left(\frac{0.622 L}{R_d} \frac{T - 273.16}{T} \right), \\ &= e_{s0} \cdot 10^{\frac{8.04(T - 273.16)}{T}}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $e_{s0} = 6.11 \text{ hPa}$ 是温度为 0°C (即 $T = 273.16 \text{ K}$) 时的饱和水汽压。但由于上式算出的结果与实际情况不完全符合, 所以在实际计算中一般采用 Magnus 的如下经验公式

$$e_s = \begin{cases} e_{s0} \cdot 10^{\frac{7.5t}{t+237}}, & \text{对于水面;} \\ e_{s0} \cdot 10^{\frac{9.5t}{t+265}}, & \text{对于冰面.} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $t = T - 273.16$ 是摄氏温度。

一般地说, 大气环流是处于斜压状态的。根据绝对加速度的环流定理知, 大气的斜压性是产生环流加速度的动力因素。因此, 计算表征大气斜压性大小的物理量有重要意义。这一物理量可以由斜压矢量 $\mathbf{N}$ (又称力管矢量) 来表示, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\text{curl}(\alpha \text{ grad } p) \\ &= -\text{grad } \alpha \times \text{grad } p. \end{aligned} \quad (9)$$

用 Hamilton 算子表示就是

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\nabla \times (\alpha \nabla p) \\ &= -\nabla \alpha \times \nabla p. \end{aligned} \quad (10)$$

斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的大小代表了单位面积内力管数的多少。因为力管的存在是大气斜压性的充要条件, 所以单位面积上的力管数 (即斜压矢量 $\mathbf{N}$) 给出了大气斜压性大小的度量。简单的推导可得斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的三个分量如下:

$$N_x = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (11)$$

$$N_y = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (12)$$

$$N_z = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (13)$$

在实际大气中, 一般来讲, 斜压矢量 $\mathbf{N}$ 的垂直分量远小于它的水平分量, 因此斜压矢量 $\mathbf{N}$ 是准水平的。这表明, 只需要考虑 $\mathbf{N}$ 的水平分量 $\mathbf{N}_h$ 即可, 它代表了垂直剖面上的力管数, 表征了垂直剖面上大气斜压性的大小。不难知,

$$\mathbf{N}_h = -\mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \nabla_h p - \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_h \alpha \right). \quad (15)$$

为了给出 p 坐标系中 $\mathbf{N}_h$ 的表达, 需要应用准静力学方程, 即

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (16)$$

由此可得,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_h \left(\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g \right) = \nabla_h \left(\alpha \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_h \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \nabla_h p + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \nabla_h p). \end{aligned} \quad (17)$$

所以,

$$\mathbf{N}_h = -\mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \nabla_h p). \quad (18)$$

此式表明, 水平斜压矢量 $\mathbf{N}_h$ 是由水平气压梯度力的垂直微分决定的。再根据地转风关系

$$\mathbf{V}_g = \frac{\alpha}{f} \mathbf{k} \times \nabla_h p, \quad (19)$$

所以,

$$\mathbf{N}_h = -f \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial z} = -\rho g f \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p}. \quad (20)$$

利用 p 坐标系中地转风表达式

$$\mathbf{V}_g = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \Phi, \quad (21)$$

有

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{\alpha}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \ln T. \quad (22)$$

故,

$$\mathbf{N}_h = -g \mathbf{k} \times \nabla_p \ln T. \quad (23)$$

上式说明水平斜压矢量是由温度的对数场的水平梯度所决定, 其与热成风矢量平行 (也即与等平均温度线平行) 而方向相反。在北半球背 $\mathbf{N}_h$ 的方向而立, 高温在左, 低温在右; 南半球则相反。水平斜压矢量的模为

$$|\mathbf{N}_h| = g |\nabla_p \ln T|. \quad (24)$$

本书就是利用式(23)和(24) 对水平斜压矢量及其模进行计算的。

(x, y, z, t) 坐标系中垂直速度 w 是利用它与 (x, y, p, t) 坐标系中的垂直速度 ω 满足的如下近似等式获得的

$$\omega \approx w \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g w. \quad (25)$$

对于质量流函数或称纬向平均经圈环流, 这里需要特别地给予说明, 以澄清某些模糊之处。对 p 坐标系中的质量连续性方程

$$\operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (26)$$

取时间平均和纬向平均后有

$$\frac{\partial[\bar{v}]\cos\varphi}{a\cos\varphi\partial\varphi} + \frac{\partial[\bar{\omega}]}{\partial p} = 0. \quad (27)$$

于是引入质量流函数 Ψ 满足

$$\frac{2\pi a^2 \cos\varphi}{g} [\bar{\omega}] = -\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = -A, \quad (28)$$

$$\frac{2\pi a \cos\varphi}{g} [\bar{v}] = \frac{\partial\Psi}{\partial p} = B. \quad (29)$$

显见,

$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial\varphi}.$$

又因为考虑的区域是单连通的, 所以有全微分形式

$$d\Psi = A d\varphi + B dp, \quad (30)$$

且 Ψ 的积分与路径无关, 只与积分路径的端点有关。设积分路径为 C , 则

$$\begin{aligned} \int_C d\Psi &= \Psi_{C_1} - \Psi_{C_0} = \Psi(\varphi_1, p_1) - \Psi(\varphi_0, p_0) \\ &= \int_C -A d\varphi + \int_C B dp, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 C_0 和 C_1 为路径 C 的端点。现选取 C_0 在上边界 $p=0$ 处, 且 C 取为如图1所示的折线路径, 在折线的一边是与上边界 $p=0$ 面重合, 另一边则是与其正交并与 p 轴平行。这样利用上边界条件 $[\omega]|_{p=0}=0$ 有,

$$\Psi_{C_1} - \Psi_{C_0} = \int_0^{p_1} B dp. \quad (32)$$

所以, 当端点 C_0 上的 Ψ 值已知时, 在所考虑的区域 Ψ 的积分由 $[\bar{v}]$ 的分布完全决定, 而并不需要预先知道区域内 $[\bar{\omega}]$ 的分布。而反过来, 由所得的质量流函数 Ψ 取径向梯度则可以得到纬向平均经圈环流的垂直分量 $[\bar{\omega}]$ 。通常假定在大气层顶没有净的质量通量, 这样在大气层顶处 $\Psi=0$, 由此利用式(32)和观测的 $[\bar{v}]$ 就可确定出所考虑的区域上 Ψ 的分布。

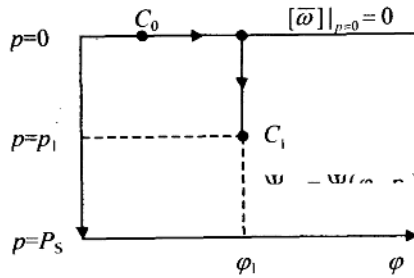


图 1.1 质量流函数的计算

Fig. 1.1 Calculation of mass streamfunction.

地面净辐射通量为

$$F_{\text{rad}}^{\text{net}} = F_{\text{sw}} + F_{\text{lw}}, \quad (33)$$

其中地面净长波和净短波辐射通量分别为

$$F_{\text{sw}} = F_{\text{sw}}^{\downarrow} - F_{\text{sw}}^{\uparrow}. \quad (34)$$

$$F_{l,w} = F_{l,w}^{\downarrow} - F_{l,w}^{\uparrow}. \quad (35)$$

所以, 本书中的地面净长波和净短波辐射通量与原始资料中的相应量在数值上相等, 但符号正好相反。

大气顶净辐射通量为

$$F_{\text{rad}}^{\text{top}} = F_{\text{SW}}^{\uparrow} - F_{\text{LW}}^{\uparrow}, \quad (36)$$

其中大气顶净短波辐射通量为

$$F_{\text{SW}}^{\uparrow} = F_{\text{SW}}^{\text{T}\downarrow} - F_{\text{SW}}^{\text{T}\uparrow}. \quad (37)$$

Bowen 比是向上潜热通量和感热通量的比值, 即

$$B = \frac{F_{\text{LH}}^{\uparrow}}{F_{\text{SH}}^{\uparrow}}. \quad (38)$$

它表征了潜热通量和感热通量两者之间的相对大小。

本图集中计算了气象要素的梯度, 从而涉及到关于物理量的空间差分方法。在水平方向由于资料是等间距的, 所以采用熟知的中央差分格式, 即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j,k} \approx \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2\Delta x}, \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j,k} \approx \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2\Delta y}. \quad (40)$$

它们具有二阶精度。在南北极的边界上, 通常采用向前差或向后差, 这是具有一阶精度的, 与式(40)的二阶精度不匹配。为了在精度上得到协调一致的差分方案, 在南北边界上, 本书中采用如下二阶精度的三点格式进行计算

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,0,k} \approx \frac{-u_{i,2,k} + 4u_{i,1,k} - 3u_{i,0,k}}{2\Delta y}, \quad (41)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,N,k} \approx \frac{3u_{i,N,k} - 4u_{i,N-1,k} + u_{i,N-2,k}}{2\Delta y}. \quad (42)$$

在垂直方向上, 由于是不等间距的, 因此需要构造适当的不等间距差分方法。这主要是为了考虑所用差分格式应当与水平等间距差分在精度上相匹配。因为不等间距的差分不仅仅是在资料诊断中经常会遇到, 而且在数值模式的格式构造上也是十分关键的, 所以, 在此我们给出较为详细的讨论。为书写简便起见, 假定 u 只是 z 的函数, 这显然不失一般性。设在 z 方向上有格点 z_k ($k=0, 1, \dots, n$), 并记 $u_k = u(z_k)$, $u_k^{(n)} = u^{(n)}(z_k)$, 且令,

$$\Delta_k = z_{k+1} - z_k, \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (43)$$

先讨论内部格点上的情形, 即 $k=1, \dots, n-1$. 根据 Taylor 展开

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u(z_k + \Delta_k) = u_k + \Delta_k u'_k + \frac{\Delta_k^2}{2} u''_k + \frac{\Delta_k^3}{3!} u'''_k + \dots \\ u_{k-1} &= u(z_k - \Delta_{k-1}) = u_k - \Delta_{k-1} u'_k + \frac{\Delta_{k-1}^2}{2} u''_k - \frac{\Delta_{k-1}^3}{3!} u'''_k + \dots \end{aligned}$$

所以可得带余项的三点微分表达式

$$u'_k = \frac{\Delta_{k-1}^2 u_{k+1} + (\Delta_k^2 - \Delta_{k-1}^2) u_k - \Delta_k^2 u_{k-1}}{\Delta_{k-1} \Delta_k (\Delta_{k-1} + \Delta_k)} - \frac{\Delta_{k-1} \Delta_k}{3!} u'''(\xi_k), \quad \xi_k \in (z_{k-1}, z_{k+1}). \quad (44)$$

显然当 $\Delta_k = \Delta$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), 即等间距情形时, 由式(44)得到带余项的中央差分式

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta} - \frac{\Delta^2}{3!} u'''(\xi_k), \quad \xi_k \in (z_{k-1}, z_{k+1}).$$

对于边界点 z_0 , 因为

$$\begin{aligned} u_1 &= u(z_0 + \Delta_0) = u_0 + \Delta_0 u'_0 + \frac{\Delta_0^2}{2} u''_0 + \frac{\Delta_0^3}{3!} u'''_0 + \dots \\ u_2 &= u(z_0 + \Delta_0 + \Delta_1) = u_0 + (\Delta_0 + \Delta_1) u'_0 + \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^2}{2} u''_0 + \frac{(\Delta_0 + \Delta_1)^3}{3!} u'''_0 + \dots \end{aligned}$$

所以可得带余项的三点微分表达式

$$u'_0 = \frac{-\Delta_0^2 u_2 + (\Delta_0 + \Delta_1)^2 u_1 - [(\Delta_0 + \Delta_1)^2 - \Delta_0^2] u_0}{\Delta_0 \Delta_1 (\Delta_0 + \Delta_1)} + \frac{\Delta_0 \Delta_1}{3!} u'''(\xi_0), \quad \xi_0 \in (z_0, z_2). \quad (45)$$

当 $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ 时, 可得

$$u'_0 = \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2\Delta} + \frac{\Delta^2}{3!} u'''(\xi_0), \quad \xi_0 \in (z_0, z_2).$$

同理, 对于边界点 z_n 可有

$$u'_n = \frac{[(\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})^2 - \Delta_{n-1}^2] u_n - (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})^2 u_{n-1} + \Delta_{n-1}^2 u_{n-2}}{\Delta_{n-2} \Delta_{n-1} (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})} + \frac{\Delta_{n-2} \Delta_{n-1}}{3!} u'''(\xi_n), \quad (46)$$

其中 $\xi_n \in (z_{n-2}, z_n)$. 当 $\Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} = \Delta$ 时, 有

$$u'_n = \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2\Delta} + \frac{\Delta^2}{3!} u'''(\xi_n), \quad \xi_n \in (z_{n-2}, z_n).$$

综合上述, 对于不等间距格点, 有如下准二阶精度的三点差分格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \approx \frac{-\Delta_0^2 u_2 + (\Delta_0 + \Delta_1)^2 u_1 - [(\Delta_0 + \Delta_1)^2 - \Delta_0^2] u_0}{\Delta_0 \Delta_1 (\Delta_0 + \Delta_1)}, \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_k \approx \frac{\Delta_{k-1}^2 u_{k+1} + (\Delta_k^2 - \Delta_{k-1}^2) u_k - \Delta_k^2 u_{k-1}}{\Delta_{k-1} \Delta_k (\Delta_{k-1} + \Delta_k)}, \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (48)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_n \approx \frac{[(\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})^2 - \Delta_{n-1}^2] u_n - (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})^2 u_{n-1} + \Delta_{n-1}^2 u_{n-2}}{\Delta_{n-2} \Delta_{n-1} (\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1})} \quad (49)$$

当 $\Delta_k = \Delta$ ($k=0, 1, \dots, n$) 时, 得等间距格点的二阶精度的三点数值微分公式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \approx \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2\Delta}, \quad (50)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_k \approx \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta}, \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (51)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_n \approx \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2\Delta}. \quad (52)$$

式(50)~(52)实质上就是式(40)~(42). 利用 Lagrange 插值多项式的方法, 也能得到式(47)~(49), 这里不再赘述. 对于式(47)~(49), 我们可给出另外一种表达式如下

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \approx (1 + \alpha_0) \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} + (-\alpha_0) \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1}, \quad (53)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_k \approx \alpha_k \frac{u_k - u_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} + (1 - \alpha_k) \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k}, \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (54)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_n \approx (-\alpha_n) \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{z_{n-1} - z_{n-2}} + (1 + \alpha_n) \frac{u_n - u_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}. \quad (55)$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}, \\ \alpha_k &= \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1} + \Delta_k} = \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} - z_{k-1}}, \quad (k=1, \dots, n-1), \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1}.\end{aligned}$$

由此可知, 上述三点公式实质是左微商(向后差)和右微商(向前差)的加权平均, 即式(54)的几何意义就是如图2中所示的点B处函数的斜率BT(在B点处的切线)可以用弦线AB的斜率与弦线BC的斜率的加权平均来近似, 所以这种不等间距差分又称加权平均法。若记

$$d_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta_k} = \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k}, \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

则上述公式还可写成如下更为简洁的形式

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 &\approx (1 + \alpha_0)d_0 + (-\alpha_0)d_1, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k &\approx \alpha_k d_{k-1} + (1 - \alpha_k)d_k, \quad (k=1, \dots, n-1) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n &\approx (-\alpha_n)d_{n-2} + (1 + \alpha_n)d_{n-1}.\end{aligned}$$

下面给出式(47)~(49)或式(53)~(55)的几何意义更为清晰的另外一种表达式。虽然这个表达式可以从式(47)~(49)或式(53)~(55)导得(拼凑复杂), 但我们将采取另外的办法。这不仅仅是因为要细致深入的讨论, 而且因为推导过程中的结果在后面的讨论中仍然需要。

因为根据 Taylor 展开有($k=1, \dots, n-1$)

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta_k} - \frac{\Delta_k}{2} u''_k - \frac{\Delta_k^2}{3!} u'''_k - \dots, \quad (56)$$

$$u'_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta_{k-1}} + \frac{\Delta_{k-1}}{2} u''_k - \frac{\Delta_{k-1}^2}{3!} u'''_k + \dots, \quad (57)$$

所以

$$u'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} + \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k} \right) - \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{4} u''_k - \frac{\Delta_{k-1}^2 + \Delta_k^2}{12} u'''_k - \dots, \quad (58)$$

$$u'_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} - \frac{\Delta_k - \Delta_{k-1}}{2} u''_k - \frac{\Delta_{k-1}^2 - \Delta_{k-1}\Delta_k + \Delta_k^2}{6} u'''_k - \dots. \quad (59)$$

由此得

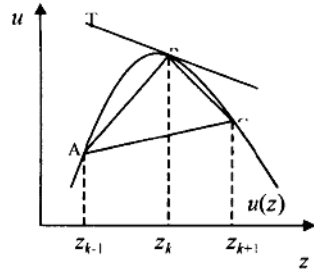


图 1.2 不等间距差分的几何意义

Fig. 1.2 Geometrical significance of the difference with non-uniform grids

$$u'_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} + \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k} - \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} - \frac{\Delta_{k-1}\Delta_k}{6} u''_k + \dots$$

同理可得边界点处的三点微分表达式。综合就有如下三点差分格式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \approx \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} + \frac{u_2 - u_0}{z_2 - z_0} - \frac{u_2 - u_1}{z_2 - z_1}, \quad (60)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} + \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k} - \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}}, \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (61)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_n \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} + \frac{u_n - u_{n-2}}{z_n - z_{n-2}} - \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{z_{n-1} - z_{n-2}}. \quad (63)$$

上三式是与式(47)~(49)或式(53)~(55)完全等价的,但它们的几何意义却是非常不同的。式(60)~(61)的几何意义更为清晰,就是如图2所示,A, B, C是函数 u 上的任意三点,它们构成一个三角形,其中任一点处函数的斜率近似等于与该点相邻两个边的斜率之和减去对边的斜率。本书就是根据式(60)~(61)来计算垂直差分的。

一阶的差分格式,除了向前差和向后差两种格式外,由式(58)和式(59)还可得另外两种一阶的差分格式,即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} + \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k} \right), \quad (64)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k \approx \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}}. \quad (65)$$

显然,格式(64)的精度要好于格式(65)。需要特别注意的是,尽管是一阶精度,但在实际中,由于网格的间距是有限的且较大,因此,对于有限网格距的情况下,格式(61)未必比格式(64)的精度要高,有时甚至还差。这说明对于不等间距的差分格式的选取是很有讲究的,不经过精心的校验和比较,盲目地采取某一格式的做法是不可取的。这一点在数值模式的设计中表现的更为突出。在垂直方向上,在早期的大气数值模式中一般是均匀网格,然而当代的数值模式却常常是不等间距的,因此,水平和垂直方向上差分格式的不协调性就是一个非常严重的问题。目前还无法从数值格式的构造上来解决这一问题,这个事实表明要彻底解决上述问题就必须采取均匀网格或网格分段均匀的设计方案。在实际当中,根据函数在不同区间所具有的性质,采取网格分段均匀的设计方法,可能是最为理想的。在这方面的深入讨论已超出本书的范围,我们将另文研究。

本书中还涉及到数值积分,用的是大家熟知的复化梯形求积公式。给定积分区间 $[a, b]$,其上有格点 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$,满足 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$,于是

$$I(u) = \int_a^b u(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} u(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx.$$

在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx$ 用梯形公式近似,有

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx \approx \frac{\Delta_i}{2} [u(x_i) + u(x_{i+1})].$$

其中 $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. 所以有

$$\begin{aligned}
I(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} I_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta_i}{2} [u(x_i) + u(x_{i+1})] \\
&= \frac{1}{2} (\Delta_0 u(a) + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta_{i-1} + \Delta_i) u(x_i) + \Delta_{n-1} u(b)) \\
&= \frac{1}{2} [(x_1 - x_0) u(a) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_{i-1}) u(x_i) + (x_n - x_{n-1}) u(b)]
\end{aligned}$$

若是等间距即 $\Delta_i = h (i = 0, 1, \dots, n-1)$, 则

$$I(u) \approx h \left[\frac{1}{2} u(a) + \sum_{i=1}^{n-1} u(x_i) + \frac{1}{2} u(b) \right]$$