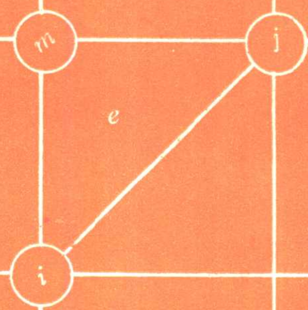
有限元法和边界元法基础

饶寿期 编



北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了有限元法和边界元法的基础理论和方法。全书共分九章。前三章由浅入深地分别描述了杆、梁、二维平面问题和轴对称问题的有限元法求解过程，并相应地介绍了两个简单的有限元计算机程序。第四章描述了形函数及二维和三维等参元的计算式。第五章介绍了变分原理及加权余量法，描述了有关场问题的有限元法求解。第六、七、八章分别介绍了用有限元法求解板壳问题、振动问题以及有限元法方程组的求解特点。第九章系统地描述了位势问题以及具有体积力和热载荷的二维、三维和轴对称问题弹性体的边界元法求解，并附有求解程序。各章均编有习题。

本书是为航空发动机以及流体机械专业的本科生和研究生而编写的教科书，也可供科研人员和工程技术人员阅读和参考。

有限元法和边界元法基础

YOUXIANYUANFA he BIANJIEYUANFA JICHU

饶 寿 期 编

责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京京辉印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张：20.25 字数：518千字

1990年6月第一版 1990年6月第一次印刷 印数：3000册

ISBN 7-81012-172-3/TK·008 定价：4.05元

前　言

本教材是为航空发动机和流体机械专业的学生而编写的，是作为有限元法计算和边界元法应用的理论基础。众所周知，有限元法的应用，目前较为普遍，它不但在固体力学方面，而且在流体力学、传热学、电磁场等方面，也得到了广泛的应用。工科大学有关机械设计专业开设有限元课是必要的，它有助于提高学生对工程结构强度分析的能力，有助于学生对力学、计算数学和算法语言等课程综合运用的能力。

本教材是根据我们多年来在教学实践的基础上编写的。内容本着由浅入深、突出重点、阐明概念和注重实用的原则。以杆、梁及常应变平面单元为基础，介绍了有限元法中的原理和概念。并编入了简单的计算机程序，使学生能了解应用有限元法解题实践的全过程。

本教材也有一定的广度和深度。第一、二、三、四、七章为基本讲授内容，其余章节可酌情取舍。

边界单元法是近几年来新发展的边界解的一种数值方法。由于它只需要输入边界信息，使得求解维数减少，在工程应用中是有可取之处的。尤其是与有限元法联合使用时，更能发挥其所长。

我们在教学实践中体会到，对工程设计专业学生，讲授有限元课程，增加一些课外习题和简单计算机程序是有必要的。这样有利于学生更好地掌握有限元法的基本内容及方法。

由于编者水平所限，编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正。

编者　1989.10.

目　　录

前　言

第一章　有限单元法求解简例

一、概述…………（1）

二、刚度和刚度矩阵…………（2）

三、连接二杆结构的有限元分析…………（4）

四、有限单元法的分析步骤和特点…………（7）

五、刚性连接结构的有限元求解及程序…………（8）

附录（Ⅰ、Ⅱ）…………（15）

习题…………（18）

第二章　平面问题的有限单元法

一、平面问题…………（19）

二、平面应力问题…………（19）

三、虚功原理…………（23）

四、基本方程的推导…………（24）

五、用有限单元法求解平面问题的具体步骤及举例…………（33）

六、三角单元平面问题的计算机程序及算例…………（41）

七、位移函数为二次多项式的六节点的三角形单元…………（52）

习题…………（61）

第三章　轴对称体零件的有限单元法

一、轴对称体问题概述…………（64）

二、轴对称体的单元划分、位移函数及应力应变矩阵…………（66）

三、轴对称体的单元刚度矩阵…………（70）

四、等效节点载荷计算…………（76）

五、非轴对称载荷情况下有限元分析…………（79）

习题…………（88）

第四章　插值函数和等参元

一、概述…………（90）

二、插值函数…………（92）

三、四边形单元及三维单元形函数…………（95）

四、四节点四边形等参数单元…………（103）

五、八节点曲边四边形等参数单元…………（109）

六、二十节点三维等参数单元…………（119）

七、数值积分在有限元法分析中的应用…………（127）

八、应力修匀…………（132）

习题 ……(135)
第五章 场问题的有限单元法
一、微分方程的变分解法 ……(137)
二、基于变分原理场问题的有限元法 ……(145)
三、用有限单元法求解椭圆型微分方程 ……(150)
四、由加权余量法建立的有限元法 ……(162)
习题 ……(174)
第六章 板与壳的有限单元法
一、概述 ……(176)
二、薄板弯曲的基本理论及有限元法求解 ……(177)
三、考虑横向剪切变形的平板弯曲单元 ……(186)
四、薄壳有限元法计算 ……(194)
五、考虑横向剪切影响的厚壳单元 ……(200)
习题 ……(214)
第七章 大型线性代数方程组求解
一、总刚系数矩阵的形成和特点 ……(215)
二、稀疏线性方程组解法的基本类型及其系数矩阵的压缩存贮方法 ……(217)
三、有限元方程组的直接解法 ……(219)
四、超松弛迭代法 ……(230)
五、加入边界条件的方法 ……(232)
习题 ……(234)
第八章 振动有限元分析
一、动态方程 ……(236)
二、质量矩阵 ……(239)
三、结构的自振频率和特征值问题 ……(242)
四、特征值问题的计算方法 ……(245)
五、阻尼矩阵和动力响应问题 ……(257)
习题 ……(261)
第九章 边界单元法基础
一、概述 ……(262)
二、泊松方程的边界单元法 ……(262)
三、弹性体受力分析的边界元法 ……(276)
四、体积力的边界积分计算 ……(287)
五、三维弹性体的边界元公式 ……(291)
六、轴对称体的边界元公式 ……(293)
七、二维常值单元 *BEM* 计算机程序及算例 ……(301)
参考文献 ……(318)

第一章　有限单元法求解简例

一、概　　述

有限单元法是一种有效的数值计算方法。对于结构形状复杂、载荷和支承情况也复杂的零部件进行应力分析，有限单元法都能应用。这是任何其它经典方法所不及的。所以，有限单元法在航空发动机设计以及其他机械设计的强度计算中，均得到了广泛的应用。

有限单元法必须使用高速数字电子计算机进行计算。学习有限单元法以前必须先学习有关计算机语言和数学计算方法等方面的知识，也必须具备弹性力学方面的基本知识。本书主要从固体力学和结构强度方面对有限单元法的概念和处理问题的方法进行介绍，并引伸到椭圆微分方程的有限元法求解。同时，为了有助于读者的理解和应用，除了增加习题以外，还由浅入深地选编了一些计算机程序。

由弹性力学的知识可知，解答弹性力学问题、从数学抽象的角度来说，就是求解偏微分方程的边值问题，即在给定的边界条件下，解弹性力学的基本方程。由于弹性体（机械或部件）的形状和载荷作用方式是很复杂的，除了少数比较简单的问题之外，试图按经典的弹性力学方法获得解析解是十分困难的，甚至是不可能的，从而限制了弹性力学的广泛应用。为了克服这种困难，人们创造了数值解法，如差分法等。但对于几何边界形状较复杂的构件来说，有限单元法更为有效。

在固体力学问题中，有限单元法的应用是根据变分原理来推导单元特性和有限元方程的。最常用的变分原理是：最小势能原理、余能原理和雷斯纳原理。采用不同的变分原理，得到不同的未知场变量。当采用势能原理时，必须假设单元内位移场函数的形式。这种有限元分析方法称作位移法或协调法。当采用余能原理时，须假设应力场的形式。这种方法称为力法或平衡法。当采用雷斯纳原理时，就必须同时假设某些位移和某些应力，因而这种方法称为混合法。用有限元法作振动分析时，很有用的变分原理是汉密尔顿原理（见第八章）。作静态分析时，对大多数问题，应用位移法较为简单，因此，这种方法得到了广泛的应用。

本书是作为有限单元法的基础，具有入门的性质，因此，除振动分析的章节外，着重讨论位移法。有限元方程的推导也只限于虚功原理或最小势能原理。

有限单元法处理弹性力学问题的基本思路是：

（1）将一个受力的连续弹性体“离散化”，即将它看作是由一定数量的有限小的单元（最简单的是三角形单元）的集合体。而认为这些单元之间只在节点上互相联系，亦即只有节点才能传递力。

（2）按静力等效原则将作用于每个单元的外力（包括面力、体积力、温度以及各相邻单元的作用力）简化到节点上去，形成等效节点力。

（3）根据弹性力学的基本方程（几何方程、物理方程等）推导出单元节点力和节点位移之间的关系，建立作用在每个节点上力的平衡方程式。于是得到一个以节点位移与未知数

的线性代数方程组。

（4）加入位移边界条件求解方程组，得到全部未知位移，进而求得各单元的应变和应力。

这种求解方法的主要优点是：①概念浅显，易于掌握，既可以从直观的物理模型来理解它，也可以按严格的数学逻辑来研究它；②适应性强，应用范围广，不仅能成功地解答应力分析中的复杂的边界条件、非线性、非均质材料、动力学等难题，而且还可以推广到解答数学物理方程的其它边值问题，如热传导、电磁场、流体力学等领域的问题；③普遍采用矩阵形式表达基本公式，便于计算机的程序运算。现在，用有限单元法计算工程问题，已有许多大型结构通用程序，如SAP，NASTRAN，ASKA，ADINA，ANSYS，ABAQUS等，[48]可以直接应用，较为方便。这些优点，使有限单元法得到了广泛的应用和发展。

二、刚度和刚度矩阵

在位移法的有限元分析中，计算单元刚度矩阵是有限元分析的重要的一步。为了说明刚度矩阵的物理概念，先讨论弹簧的刚度。

一个弹簧受有力 F 作用，其伸长为 u。在弹性极限范围内，拉力越大，伸长越多，见图1-1。力和伸长量之间的关系为

$$F = ku \tag{1-1}$$

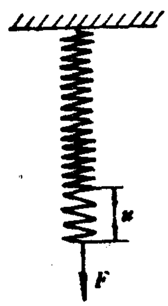


图 1-1　弹簧受力图

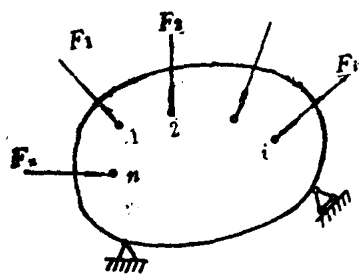


图 1-2　弹性体受力与变形

式中，k 是使弹簧产生单位位移（变形）需要加在弹簧上的力，称之为弹簧的刚度系数，简称为刚度。

由刚度系数所组成的矩阵称为刚度矩阵。刚度矩阵的物理概念，在下面举例说明。

如图1-2所示，设有一弹性体，在其上作用有广义力 F_1，F_2，…，F_i，…，F_n。作用点分别编号为1，2，…，i，…，n。设在支座约束下，弹性体不能发生刚体运动，仅产生弹性变形。在各点，其相应的广义位移（线位移和转角）为 δ_1，δ_2，…，δ_i，…，δ_n。如以节点 i 为例，广义位移 δ_i 是弹性体受这一组广义力 F_1，F_2，…，F_i，…，F_n 共同作用而产生的。由于弹性体服从虎克定律和微小变形的假定，按叠加原理可写出线性方程式

$$\delta_i = c_{i1}F_1 + c_{i2}F_2 + \cdots + c_{ij}F_j + \cdots + c_{in}F_n$$

式中，c_{ij} 为单位载荷（$F_j = 1$）作用在 j 点上而在 i 点在 F_i 方向上产生的位移。因此，作用在 j 点上的力 F_j（$F_j \neq 1$）所引起 i 点的位移应为 $c_{ij}F_j$。c_{ij} 叫柔度系数或位移影响系数。

同理，可写出每一点的位移方程式为

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1=c_{11}F_1+c_{12}F_2+\cdots+c_{1n}F_n\\ \delta_2=c_{21}F_1+c_{22}F_2+\cdots+c_{2n}F_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_i=c_{i1}F_1+c_{i2}F_2+\cdots+c_{in}F_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n=c_{n1}F_1+c_{n2}F_2+\cdots+c_{nn}F_n\end{array}\right\}\tag{1-2}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_i\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_i\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}\tag{1-3}$$

或简写成

$$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{F}$$

式中，$\boldsymbol{c}$为柔度矩阵。

如果反过来用位移来表示所产生的力时（在用位移法求解的有限元法经常是如此），则在 i 点由这组广义位移所引起的力为

$$F_i=k_{i1}\delta_1+k_{i2}\delta_2+\cdots+k_{ij}\delta_j+\cdots+k_{in}\delta_n$$

如有 n 个点，可写出n个表示式，即

$$\left.\begin{array}{l}F_1=k_{11}\delta_1+k_{12}\delta_2+\cdots+k_{1n}\delta_n\\ F_2=k_{21}\delta_1+k_{22}\delta_2+\cdots+k_{2n}\delta_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_i=k_{i1}\delta_1+k_{i2}\delta_2+\cdots+k_{in}\delta_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n=k_{n1}\delta_1+k_{n2}\delta_2+\cdots+k_{nn}\delta_n\end{array}\right\}\tag{1-4}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_i\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_i\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix}\tag{1-5}$$

或者简写成

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵。刚度系数 k_{ij} 表示在 j 点有单位位移（$\delta_j=1$）而在 i 点所引起的力，如果力和位移同向则为正，反向则为负。因此，在 j 点上如位移为 δ_j 时（$\delta_j\neq1$），则在 i点上引起的力为 $k_{ij}\delta_j$。若弹性体在 n 个点上均产生位移，即有 δ_1，δ_2，$\cdots$，δ_n。按线性叠加原

理，在 n 个点上所引起的力即为式（1-4）。

如果弹性体是取的一个单元，则 $\boldsymbol{K}$ 称为单元刚度矩阵，常表示为 $\boldsymbol{K}^e$。如果是由单元所组集的结构，则 $\boldsymbol{K}$ 称为结构刚度矩阵，或总刚矩阵。

以后我们将逐步介绍各种单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 的推导。

三、连接二杆结构的有限元分析

如图 1-3 所示，有等截面杆件 a 和 b，在节点 2 处铰连起来成为一简单的杆系。该杆系在节点 1 处与支座铰连，并在 2 和 3 处分别受有外加轴向载荷 F_2 和 F_3。试用有限单元法求该杆系节点 2 和节点 3 的位移 u_2 和 u_3，及杆 a 和杆 b 上的应力以及支座 1 上的支反力 F_1。

这是一个简单的一维问题，可以很容易用材料力学办法直接求得，这里采用有限单元法，其目的是为了说明有限单元法的基本思路和特点，作为以后处理复杂问题的借鉴。

有限单元法的具体分析步骤如下：

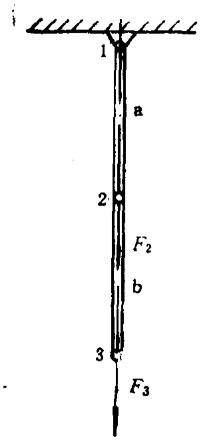


图 1-3　连接二杆结构

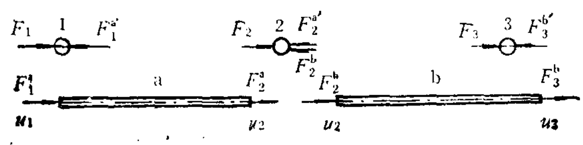


图 1-4　离散单元图

（1）结构离散化（划分单元）

将图 1-3 的杆系结构离散为图 1-4 所示的单元 a 和单元 b。节点 1 和 2 对单元 a 的作用力为 F_1^a 和 F_2^a（称节点力），节点 2 和 3 对单元 b 的作用力为 F_2^b 和 F_3^b。单元 a 和 b 对节点 1，2，3 的反作用力分别为 $F_1^{a\prime}$，$F_2^{a\prime}$，$F_2^{b\prime}$，$F_3^{b\prime}$。根据作用力大小相等方向相反的原理，$F_1^a=F_1^{a\prime}$，$F_2^a=F_2^{a\prime}$，$F_2^b=F_2^{b\prime}$，$F_3^b=F_3^{b\prime}$，在节点 1，2，3 上的外力分别为 F_1，F_2，F_3（支反力 F_1 也为外力）。

（2）求单元的节点力和节点位移的关系

求出节点位移和节点力的关系以后，用节点位移表示节点力，将各节点位移作为整个系统的待求未知数，这就是位移法的特点。

下面对杆单元 a 和杆单元 b 进行具体分析，并分别求出单元刚度矩阵。

单元 a，首先假设 1 端固定，$u_1=0$，2 端有位移 u_2（如图1-5所示），则 1，2 节点力分别为

$$\left.\begin{aligned} F_2^{a\prime\prime} &= k_a u_2 \\ F_1^{a\prime\prime} &= -F_2^{a\prime\prime} = -k_a u_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式中，$-k_a$ 表示刚度为负，说明力与位移的方向不一致。其次假设 2 端固定，$u_2=0$，1 端的位移为 u_1，则 1，2 端节点力分别为

$$\left.\begin{aligned} F_1^{a\prime\prime} &= k_a u_1 \\ F_2^{a\prime\prime} &= -F_1^{a\prime\prime} = -k_a u_1 \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

于是由式（1-6）和（1-7）求得用节点位移表示的节点力为

$$\left.\begin{aligned} F_1^a &= F_1^{a\prime\prime} + F_1^{a\prime\prime} = k_a u_1 - k_a u_2 \\ F_2^a &= F_2^{a\prime\prime} + F_2^{a\prime\prime} = -k_a u_1 + k_a u_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

把式（1-8）写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

式中，k_{11}，k_{12} 等的下标，除说明所在的行和列的位置外，还有明显的物理意义，即$k_{11}=k_a$，说明使节点 1 产生单位位移需要在节点 1 处施加的节点力，$k_{12}=-k_a$，说明使节点 2 产生单位位移需要在节点 1 处施加的节点力；k_{21}，k_{22} 等意义也相似。

单元b，同样求得用节点位移表示的节点力为

$$\left.\begin{aligned} F_2^b &= k_b u_2 - k_b u_3 \\ F_3^b &= -k_b u_2 + k_b u_3 \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

将其写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} F_2^b \\ F_3^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

（3）建立节点力的平衡方程式（见图1-4）

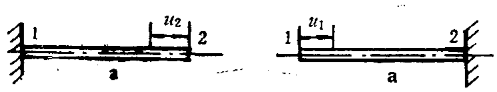


图 1-5 杆a端点位移

节点 1 的平衡方程式：

$$F_1 - F_1^{a\prime} = 0$$

即

$$F_1 = F_1^{a\prime} = F_1^a = k_a u_1 - k_a u_2 \tag{1-12}$$

节点 2 的平衡方程式：

$$F_2 - F_2^{a\prime} - F_2^{b\prime} = 0$$

即

$$\begin{aligned} F_2 = F_2^{a\prime} + F_2^{b\prime} &= F_2^a + F_2^b = (-k_a u_1 + k_a u_2) + (k_b u_2 - k_b u_3) \\ &= -k_a u_1 + (k_a + k_b) u_2 - k_b u_3 \end{aligned} \tag{1-13}$$

节点 3 的平衡方程式：

$$F_3 - F_3^{b\prime} = 0$$

即

$$F_3 = F_3^{b\prime} = F_3^b = -k_b u_2 + k_b u_3 \tag{1-14}$$

在位移法中仅各点位移 u_1，u_2，u_3 为未知数，其他各参数均为已知，于是根据节点力的平衡方程式（1-12）～(1-14)即可求解。将其写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

一般写成

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K\delta} \tag{1-16}$$

式中

$$F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix}$$

为载荷列阵。

$$K=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

为该杆系结构的总刚矩阵。

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

为节点位移列阵。

（4）代入边界条件求解节点位移及支反力

已知边界条件为 $u_1=0$，而 F_1 为未知的支反力，将其代入式（1-15）为

$$\begin{pmatrix}F_1\\ \hline F_2\\F_3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}k_a&-k_a&0\\ \hline -k_a&k_a+k_b&-k_b\\0&-k_b&k_b\end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\ \hline u_2\\u_3\end{pmatrix}\tag{1-17}$$

分解成两个矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}F_2\\F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_a+k_b&-k_b\\-k_b&k_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}\tag{1-18}$$

及

$$F_1=[-k_a\quad 0]\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}\tag{1-19}$$

对（1-18）式求逆，解$\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}$得：

$$\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_a+k_b&-k_b\\-k_b&k_b\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_2\\F_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{k_a}&\dfrac{1}{k_a}\\\dfrac{1}{k_a}&\dfrac{1}{k_a}+\dfrac{1}{k_b}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}F_2\\F_3\end{bmatrix}\tag{1-20}$$

再将式（1-20）代入式（1-19）得：

$$\begin{aligned}F_1&=[-k_a\quad 0]\begin{pmatrix}\dfrac{1}{k_a}&\dfrac{1}{k_a}\\\dfrac{1}{k_a}&\dfrac{1}{k_a}+\dfrac{1}{k_b}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}F_2\\F_3\end{bmatrix}=[-1\quad -1]\begin{bmatrix}F_2\\F_3\end{bmatrix}\\&=-F_2-F_3\end{aligned}\tag{1-21}$$

（5）求应力

由已知节点位移求各单元中应力。对等截面弹性杆在受拉情况下，其应力 σ 与应变 ε 和位移 u 的关系，可以根据材料力学的知识很容易得出：

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

单元 a：

$$\sigma^{a} = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = E\frac{u_2 - u_1}{L_a} = E\frac{1}{L_a}u_2 \tag{1-22}$$

将式（1-20）中的u_2代入式（1-22），得

$$\sigma^{a} = E\frac{1}{L_a}\ \frac{F_2 + F_3}{k_a} = \frac{E}{L_a}\frac{F_2 + F_3}{\frac{EA_a}{L_a}} = \frac{F_2 + F_3}{A_a} \tag{1-23}$$

单元 b：

$$\sigma^{b} = E\frac{u_3 - u_2}{L_a} = \frac{E}{L_b}(u_3 - u_2)$$

将（$u_3 - u_2$）值代入得：

$$\sigma^{b} = \frac{EF_3}{L_b k_b} = \frac{E}{L_b}\ \frac{F_3}{\frac{EA_b}{L_b}} = \frac{F_3}{A_b} \tag{1-24}$$

所得的结果与材料力学计算的完全相同。

四、有限单元法的分析步骤和特点

从上节对二连杆系的对比分析中，可以归纳出有限元法分析问题的一般步骤和特点：

（1）将构件离散成许多简单的单元。这些单元通过节点相互连结起来。

（2）求出各单元刚度矩阵。

如前例中，单元a的刚度矩阵（见式（1-9）为

$$\boldsymbol{K}_a^e = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

单元b的刚度矩阵（见式(1-11)为

$$\boldsymbol{K}_b^e = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{1-26}$$

（3）求整个结构的总刚度矩阵：

如前例在求总刚度矩阵$\boldsymbol{K}$时，不能直接由单元的刚度矩阵式（1-9）和（1-11）相加而成，因为两种矩阵中的行和列是不协调的。为了解决这个矛盾必须将单元的刚度矩阵的阶数膨胀，使其与集合后的总刚度矩阵的阶数相同。这就需要对那些与该单元无关的节点位移对应的行和列加一些零。于是式（1-9）和（1-11）变为

$$\boldsymbol{K}_a^e = \begin{pmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-27}$$

$$\boldsymbol{K}_b^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{pmatrix} \tag{1-28}$$

将式（1-27）和（1-28）叠加起来，即得总刚度矩阵（见式(1-15)）：

$$K=\begin{pmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \tag{1-29}$$

从式（1-29）中可以看出整个结构的总刚度矩阵K有以下一些特点：

① 对称性，即$k_{ij}=k_{ji}$。这个特点是由功的互等定理决定的。功的互等定理认为：对线性弹性体，第一种加载状态下的诸力在第二种加载状态下产生位移时所作的功，等于第二种加载状态下的诸力在第一种加载状态下产生相应位移时所作的功。

② 任一行（列）元素之和为零，这反映了平衡条件。总刚矩阵中每一行（列）的物理意义表示为：要迫使弹性体的某一节点在坐标轴方向发生单位位移，而其它节点位移都保持为零的变形状态，在所有各节点上需要施加的节点力。它们当然构成一个平衡力系。

③ 主对角线上元素均为正值。这与k_{ii}的物理意义是一致的，即$k_{ii}>0$；否则，在i点施加的外力产生与该力方向相反的位移，这是不可思议的。

④ 总刚矩阵是一个奇异矩阵；也就是说它的行列式等于零。这表明K^{-1}是不存在的，这是因为尚未加入边界约束以前，整个构件系统尚可作刚体运动的缘故，因而位移是不定的；故只有加入边界条件约束以后，消除了刚体位移才能使K成为正定矩阵，才能使位移得到唯一解。

上述特点，虽然是从一个具体例题中得出的，但是它具有普遍性。

（4）求解节点位移和支反力。先求出节点载荷并形成载荷列阵F，将所得F及总刚矩阵K组成平衡方程式（如式(1-16)）便有

$$K\delta=F$$

再将已给定的边界位移条件代入式（1-16），即可解。其实只要将总刚矩阵中与已知的边界位移对应的行和列去掉，就可以直接求逆矩阵，如式（1-18）所示。关于边界条件的确定以及在计算中的处理等问题，以后还要详细分析。

（5）求各单元中的应力，当节点位移求得后，各单元中的应力则较易求出。如式（1-22）和（1-23）所示。

五、刚性连接结构的有限元求解及程序

许多结构是把各部分用刚性连接在一起，除了受拉及受压外，还受有扭转和弯曲作用。有时弯曲所引起的位移和应变比拉压载荷所引起的位移和应变都要大。

将一根梯形悬臂梁（图1-6）作为一维问题的刚性连接的一个例子来进行有限元分析。从而导出一维梁单元的单元刚度矩阵及梯形梁的有限元求解，并引出一个简单的计算机求解程序，作为利用计算机进行有限元分析的开始。

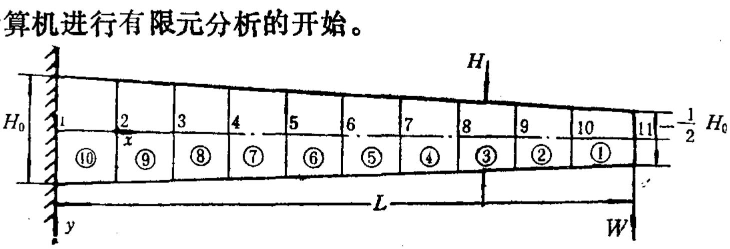


图 1-6 梯形悬臂梁

假定梁的长度比宽度大得多，于是可以把它分成许多简单的均匀的梁单元。

1. 梁单元的单元刚度矩阵

沿平行和垂直单元中性轴取坐标 x，y 作为单元局部坐标，如图 1-7 所示。所有单元都进行编号。

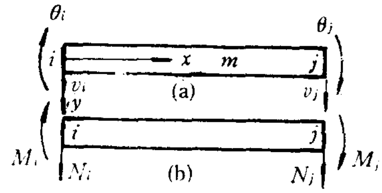


图 1-7 梁单元

上图所示的单元编号为 m，它的长度、惯性矩和弹性模量分别为 L_m，I_m和E_m。单元与单元之间通过节点来连接，而节点两端编号为i和 j。当结构受力后分别在单元的 i 点和 j 点产生 y方向的位移和转角，用 v_i，v_j，θ_i，θ_j表示。而相应y 方向的力和力矩用 F_i，F_j，M_i，M_j表示。

假定单元在y 方向的位移函数是 x 的三次多项式，即

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \tag{1-30}$$

式中 α_1 到 α_4 是常数，可由单元边界条件决定。

选择多项式作为位移函数是方便的。选择三次多项式能保证单元具有下列运动和变形：

（1）保证能具有刚体运动（当$\alpha_1 \neq 0$时）；

（2）具有刚体转动项（$\alpha_2 \neq 0$）；

（3）具有弯曲应变（$\alpha_3 \neq 0$）；

（4）具有剪切应变（在y 方向，$\alpha_4 \neq 0$）。

下面用单元节点的四个位移值 v_i，θ_i，v_j，θ_j 来决定位移函数中的四个常数。

因为

$$\theta = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \tag{1-31}$$

所以在i 节点上有

$$\left.\begin{aligned}
v_i &= v(0) = \alpha_1 \\
\theta_i &= \theta(0) = \alpha_2 \\
v_j &= v(l) = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 \\
\theta_j &= \theta(l) = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2
\end{aligned}\right\} \tag{1-32}$$

将 α_1 和 α_2 代入后两式可推得

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\frac{3v_i}{l^2} - \frac{2\theta_i}{l} + \frac{3v_j}{l^2} - \frac{\theta_j}{l} \\
\alpha_4 &= \frac{2v_i}{l^3} + \frac{\theta_i}{l^2} - \frac{2v_j}{l^3} + \frac{\theta_j}{l^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-33}$$

在简单梁的弯曲理论中，弯矩M和剪力N 可由方程

$$\left.\begin{aligned}
M &= EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = EI(2\alpha_3 + 6\alpha_4 x) \\
N &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = 6EI\alpha_4
\end{aligned}\right\} \tag{1-34}$$

给出（图1-8）。于是，在单元的节点上所加的力和弯矩表示成矩阵形式则为

$$
\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(0) \\ -M(0) \\ -F(l) \\ M(l) \end{Bmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \\ 0 & -6 \\ 2 & 6l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{1-35}
$$

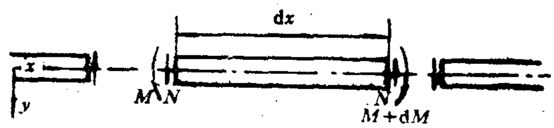


图 1-8 直梁的弯曲

把常数 α_3 到 α_4 代入到式（1-35）中去，则得到以单元节点位移和转角表示节点力的方程为

$$
\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{1-36}
$$

或者简写成

$$
\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{K}^e \delta^e \tag{1-37}
$$

式中，$\boldsymbol{F}^e$ 和 δ^e 是单元的节点力和节点位移列阵；$\boldsymbol{K}^e$ 是单元刚度矩阵。

2．单元刚度矩阵和节点力的组集

有限元分析的第二步是把单个单元的力和位移特性叠加在一起（注：不是简单的叠加而要对号入座）来形成整体结构的特性，即形成总体刚度矩阵。对于一般的刚性结构，当单元与另外单元以任意角度连接时，要从上述单个单元的局部坐标转换到整个结构的总体坐标上去。然而，对现在的直梁来说可以直接进行组集。因为单元与单元是在节点连接的，那么两个相连单元公共节点的位移和转角是相同的。结构的平衡条件可表述为：在所有节点上的外加力和力矩等于在这些节点上单元作用在它上面的外加力和力矩的总和，写成公式就是：

$$
\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}^e = \sum \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} \tag{1-38}
$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 是总刚矩阵，$\boldsymbol{F}$ 和 δ 是外力或力矩及相应的位移或转角。例如，有 n 个节点，则 δ 包含有 v_1，θ_1，v_2，θ_2，…，v_n，θ_n 序列。上式中和式 Σ 是对结构中所有单元求和的，并且总刚矩阵系数是从单元刚度矩阵系数组集而得到的。矩阵$\boldsymbol{K}$是稀疏的（具有很少的非零系数）因为每个节点与它相连的单元在这里不多于 2 个。

令 k_{pq} 和 k_{rs} 分别为总体刚度矩阵系数和单元刚度矩阵系数。脚标 p 和 q 是从 1 到 $2n$，而r和s 由 1 到 4 。p，r 是矩阵的行号，q 和 s 是列号。现在k_{rs} 的物理意义可解释为力或者力矩。它是单元在第 s 号节点上产生单位位移时而在第 r 号节点上所产生的力。k_{pq} 的力学意义也相同，只是把s,r 换成 p,q 就行了。由单元刚度矩阵组集成总刚度矩阵的公式如下：

$$
k_{pq} = \sum k_{rs} \tag{1-39}
$$

式中，$r,s=1,\cdots,4$；$p,q=1,2,\cdots,n$。

下面我们看看如何组集。每个单元的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 是 4×4 阶的，共有 16 个刚度系数如图 1-9 所示。图中左边表示两个单元刚度系数的排列；右边表示相邻两单元刚度系数的叠加。

由单元节点i，j和r，s可以求得p，q的值，即单元刚度系数存放在总刚中的位置（行和列）。

若r，$s<3$，节点为i时，则

$$p=2(i-1)+r$$

$$q=2(i-1)+s$$

若r，$s\geqslant3$，节点为j时，则

$$p=2(j-1)+(r-2)$$

$$q=2(j-1)+(s-2)$$

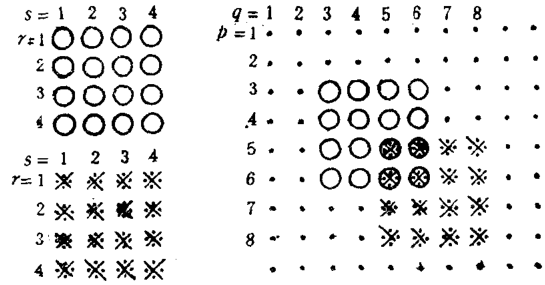


图 1-9 单元刚度系数组集

式中i，j为单元两节点的总体编号。例如第8号单元，两端节点分别为$i=3$，$j=4$，当$r=1$，$s=1$，即$k_{rs}=k_{11}$时，看看它在总刚矩阵中的位置，亦即要求出p，q的值。由公式可得$p=5$，$q=5$，即$k_{pq}=k_{55}$。也就是把8号单元中的k_{11}放在总刚矩阵的第5行和第5列的位置上，如图1-9所示。其它15个系数同样可以算出并放在相应的位置上。第9号单元也是这样算法。由图可见。$k_{pq}=\Sigma k_{rs}$，如$k_{55}=k_{33}+k_{11}$。在第9号单元中$r=3$，$s=3$时，可以算出$p=5$，$q=5$。当每个单元中的16个刚度系数都叠加到总刚度系数中去以后，则组集就完成了。

3．求解线性代数方程组

单元刚度矩阵组集成总刚系数矩阵以后，线性代数方程组就建立起来了。下一步就是求解线性代数方程组。有关求解有限元法所形成的方程组问题，另作介绍。这里采用的是一般高斯消元法，详见附录。

求解以前必须加入约束条件。一般至少要规定两个位移值。本例可用更改相应的方程的办法来解。

如果在刚性连接的结构中，物体受有沿长度的分布载荷。这种均布载荷可以用它作用在单元上的总载荷ql分配到它的两个节点上来近似处理。

4．直梁弯曲的有限元求解程序

（1）程序说明

程序中所用公式是在前节推导的。联立线性代数方程组的解是用高氏消元法的ELIMIN子程序求解。

DIMENSION语句中允许梁分成10个单元11个节点。数组F，OSTIFF和DELTA用来存放节点外力和力矩、总刚度矩阵系数、节点的位移和转角。F和DELTA也可用双下标，第一个下标用节点号，另一个表示位移或转角。因此又引入另外两个数组，LOAD，VTH，并且借助于EQUIVALENCE语句和F，DELTA等价。

数组X是用来存放节点坐标的。NREST储存整形数，它表示约束情况。NREST(I)＝0，无约束；NREST(I)＝1，表示I节点位移是0；NREST(I)＝2，表示I节点转角是0；如NREST(I)＝3，表示位移和转角都是0。上述约束修改成给定非0值也是可以的。数组NPI和NPJ是用来存放单元两端节点号的。SMA，E和L是储存单元的惯性矩、弹性模量和单元长度的。ESTIFF是储存单元刚度系数的。

用在主程序中的其它变量NEL，NNP，NEQN，分别是单元数、节点数和方程数。运算符I和J用作节点号，而M用作单元号。IROW，ICOL用作总刚矩阵的行号和列号，而IRE和ICE用作单元刚度矩阵的行号和列号（相当于上节中的p，q，r，s）。

程序执行过程是：

首先输入和输出有关原始数据。读入单元数，接着对每个节点读入节点号、约束条件数、坐标值、加在每个节点上的力和力矩。下一张卡片是输入每个单元的两端节点号，每个单元的弹性模量和惯性矩（惯性矩按后面公式计算后输入）。

下一步是作组集总刚度矩阵。在此之前首先对总刚度矩阵系数清零。然后按单元循环计算每个单元刚度矩阵的系数并把它放在相应的总刚度矩阵的位置中去（即由r，s求出p,q）。当所有单元刚度系数算出并组集完成后，则总刚度矩阵就完成了。

再下一步是加入约束条件。假如编号为I的节点对应的NREST(I)中的值为非零值，那么该节点是固定的，视其值为1，2或3而定。假如为1，则I点位移是固定的，为2，则转角是固定的，为3，则位移和转角均固定。然后将相应的方程中的v_i，θ_i更改成$v_i=0$或$\theta_i=0$。具体做法是在总刚度矩阵相关的行中除对角项外全部置零，相应的外力或力矩也置零。下面是调用ELIMIN子程序，用高氏消元法解线性代数方程组，从而解出各节点的位移和转角。为了应用ELIMIN子程序，把总刚度矩阵扩展到包括外加力和力矩项。子程序变量DET和RATIO在附录Ⅱ中讨论，它在主程序中不用。

最后输出计算结果。当程序执行遇到不允许接受的单元数时程序就停止执行，因此在所计算全部问题的数据卡后面放一张空白卡片程序就自动正常结束。