初中学生数学课外阅读系列

JUEDUI
ZHI

JUEDUIZHI

绝对值

陈汝作 编著

上海教育出版社

初中学生数学课外阅读系列

绝 对 值

陈汝作 编著

上 海 教 育 出 版 社

初中学生数学课外阅读系列　　**绝　对　值**

陈汝作　编著

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行
（上海永福路123号）

各地新华书店经销　　上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 2　插页 1　字数 42,000

1980年4月第1版　2000年6月第9次印刷

印数 156,131—161,130 本

ISBN 7-5320-5336-9/G・5578　　定价：2.40元

序

在中学阶段，数学是很重要的课程，对于提高学生的文化素质，有极大的作用．学生将来无论从事哪一种职业，都需要打好数学基础，有好的数学修养，更不必说从事理工科、经济管理方面的专门工作了．

怎样学好初中数学？课堂学习是最重要的一个环节，练习一定数量的习题也是完全必要的．但是现在有一种倾向，认为题目做得越多越好，越难越好；又有一种倾向，认为课外再要请老师辅导，老师辅导得越多越好．这样不仅造成学生课业负担过重，而且会影响学生智力的发展．

我认为要想学好数学(其他学科也如此)，培养自学能力和思考能力最为重要，即使在初中阶段，能使学生有自行阅读课外读物的能力是很重要的事，特别对那些学习较好的同学，尤其如此：任课教师最好在提高课堂教学的同时，留一些时间让学生自学，启发学生思考，这样也就能进一步提高学生的兴趣和水平．因此好的课外读物就显得非常重要了．

上海教育出版社出版了《初中学生数学课外阅读系列》，内含10本小册子：《漫游勾股世界》、《绝对值》、《多项式的乘法和因式分解》、《怎样列方程解应用题》、《怎样解不等式》、《怎样用配方法解题》、《面积关系帮你解题》、《怎样添辅助线》、《根与系数的关系及其应用》、《反证法》．这些专题是中学数学中极其重要的基本内容，并且是初等数学的基础．这些专题有的注重于与横向知识的联系，以培养初中学生初

步运用知识解决问题的综合能力；有的适当介绍了知识的自身发展并注重于与后续内容的联系，以便让学生领略数学知识的应用和作用．例如《面积关系帮你解题》，看来似乎只是讲几何的，其实却蕴含着许多三角、代数的内容．又如《根和系数关系及其应用》，从二次方程的判别式和韦达定理出发，引出了许多几何和代数的问题，还包含了解析几何的思想．这套丛书还将趣味性寓于知识性之中，例如《漫游勾股世界》中，有许多有趣的故事和问题．总之，这是一套开拓学生视野，训练学生思维，为学生终身受益的一套课外读物．这套书由专家和有经验的教师所撰写，所以质量是有保证的．初中学生如果能够读懂其中的某些分册或某些部分，就会得到很多益处．

胡和生

于复旦大学数学所

1995.5.

目　　录

一、实数绝对值的定义和运算性质 ……………………………1
1．绝对值的意义…………………………………………1
2．绝对值的运算性质……………………………………4
3．算术根与绝对值………………………………………6
二、含有绝对值符号的代数式……………………………12
三、含有绝对值符号的方程与方程组……………………22
四、含有绝对值符号的不等式……………………………35
1．解含有绝对值符号的不等式 ……………………35
2．含有绝对值符号不等式的证明 …………………43
五、含有绝对值符号的函数的图象………………………48
练习题答案…………………………………………………59

一、实数绝对值的定义和运算性质

1. 绝对值的意义

在初中代数课程中，我们知道，数轴上的每一个点都有一个完全确定的实数与它对应，反之，每一个实数有数轴上的唯一点与它对应，因此实数与数轴上的点建立一一对应关系.在数轴上表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值. 并且规定了：

正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零.

实数 a 的绝对值可以记作 $|a|$. 如果实数 a 在数轴上的对应点是 A，那末 A 点和原点的距离 OA 就是实数 a 的绝对值，即 $|OA|=|a|$.（图 1-1）

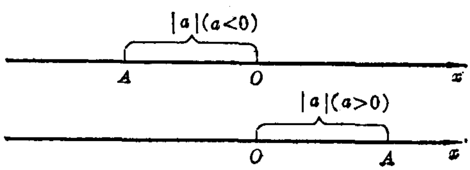

图 1-1

根据定义，我们可以知道，任何一个实数都有唯一的绝对值. 实数的绝对值是一个非负的实数. 任何一个实数都不大于它的绝对值，也就是说，$a\leqslant|a|$ 总成立. 任何两个互为相反的数，它们的绝对值总相等. 例如 3 的绝对值是 3，而 -3

的绝对值也是 3，即 $|3|=|-3|$. 一般地说，$|a|=|-a|$. 因此已知一个实数的绝对值，它所对应的是两个互为相反数. 如果绝对值是零，那末它所对应的数只有一个，就是零. 即

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时;} \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

从绝对值的定义可以看到，求一个数的绝对值时，必须将绝对值符号里的式子分别就大于零、小于零和等于零的三种情况来研究. 例如，求 $a-2$ 的绝对值，要考虑 $a-2$ 究竟是正数，是负数，还是零，这三种情况. i) 当 $a-2>0$，就是 $a>2$ 时，$|a-2|=a-2$; ii) 当 $a-2<0$，就是 $a<2$ 时，$|a-2|=-(a-2)=2-a$, iii) 当 $a-2=0$，就是 $a=2$ 时，$|a-2|=0$. 即

$$|a-2|=\begin{cases} a-2, & \text{当 } a>2 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a=2 \text{ 时;} \\ 2-a, & \text{当 } a<2 \text{ 时.} \end{cases}$$

[例 1] 在下列条件下，x 可取哪些整数？

(1) $|x|=5$; (2) $|x|\leqslant 3$; (3) $1\leqslant|x|<5$.

解 (1) 绝对值等于 5 的数有两个，$+5$ 和 -5. 因此 x 可取 $+5$ 和 -5.

(2) 绝对值小于等于 3 的整数有 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 共七个.

(3) 绝对值小于 5 的整数有 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$，而绝对值大于等于 1 的整数是 $\cdots\cdots -3, -2, -1, 1, 2, 3\cdots\cdots$，所以适合条件的整数是 $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$.

[例 2] 如果 $|a|=|b|$，那末 a、b 是否相等，试用绝对值的几何意义来说明.

解 由$|a|=|b|$，并不能得出$a=b$的结论，因为$|a|=|b|$只表示数轴上表示a的点A与表示b的点B离开原点的距离相等，但它们可能在原点的两侧，此时A、B不重合，所以a、b不相等．如果A、B在原点的同侧，那末A、B重合，此时a、b才相等．也就是说，只有当a、b同号，而且$|a|=|b|$时，a、b才相等．

[例 3] 已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值．

解 $\because \quad |a|=2, \quad \therefore \quad a=\pm 2;$

$\because \quad |b|=5, \quad \therefore \quad b=\pm 5.$

$$a+b=\begin{cases} 2+5=7, & \text{当 } a>0,\ b>0; \\ -2-5=-7, & \text{当 } a<0,\ b<0; \\ 2-5=-3, & \text{当 } a>0,\ b<0; \\ -2+5=3, & \text{当 } a<0,\ b>0. \end{cases}$$

[例 4] 实数a、b、c在数轴上的对应点如图 1-2 所示，试化简$|a+b|+|c-a|+|b+c|$．

图 1-2

解 $\because \quad a<0,\ b<0,\ a+b<0,$

$\therefore \quad |a+b|=-(a+b).$

$\because \quad a<0,\ c>0,\ c-a>0,$

$\therefore \quad |c-a|=c-a.$

$\because \quad b<0,\ c>0,$ 又 $b<-c, \quad \therefore \quad b+c<0,$

$\therefore \quad |b+c|=-(b+c).$

$\therefore \quad |a+b|+|c-a|+|b+c|$

$=-a-b+c-a-b-c=-2a-2b.$

[例 5] 能否找到m的一个值，使等式

$$|5m+6|+|7-3m|+4=0$$

成立?

解 m取任何实数都不能使等式成立．因为不论m取什么实数值，

$$|5m+6|\geqslant 0, \quad |7-3m|\geqslant 0.$$

$$|5m+6|+|7-3m|+4\geqslant 4.$$

所以使等式成立的 m 的值是不存在的．

[例 6] a、b 是实数，如果$|a|>|b|$，能断定 $a>b$ 吗？如果 $a>b$，能断定$|a|>|b|$吗？

解 如果$|a|>|b|$，不能断定 $a>b$，例如 $|-3|=3$，$|2|=2$，所以$|-3|>|2|$，但是$-3<2$．只有当 a、b 都是非负数时，才能由$|a|>|b|$，断定 $a>b$ 的结论．

同样，由 $a>b$，也不能断定$|a|>|b|$，如果 $a=2$，$b=-3$ 虽然 $2>-3$，但是$|2|<|-3|$．也只有当 a、b 都是非负数时，才能由 $a>b$，断定$|a|>|b|$的结论．

2. 绝对值的运算性质

绝对值具有下列运算性质:

(1) $|a|+|b|\geqslant|a+b|$.

两个数的绝对值的和，不小于这两个数的和的绝对值．

证明 对于实数 a，总有$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；对于实数 b，同样有$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，所以

$$-|a|+(-|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$

即
$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$

所以
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

这个式子只有当 a、b 同号，或者 a、b 中至少有一个为零时，等号才成立.

(2) $|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

两个数的绝对值的差，不大于这两个数的差的绝对值.

证明 $\because$ $|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$，把 $|b|$ 移到不等号的左边就可以得到

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

(3) $|a|\cdot|b|=|a\cdot b|$.

两个数的绝对值的积，等于这两个数的积的绝对值.

(4) $\dfrac{|a|}{|b|}=\left|\dfrac{a}{b}\right|$. $(b\neq 0)$

两个数的绝对值的商，等于这两个数的商的绝对值.

[例 7] m 取什么实数时，下列各式能够成立：

(1) $|5m-4|=4-5m$; (2) $\left|\dfrac{m-3}{2-m}\right|=\dfrac{m-3}{2-m}$;

(3) $|(m-3)+(m-8)|=|m-3|+|m-8|$.

解 (1) 根据绝对值的定义 $4-5m\geqslant 0$,

$$\therefore\quad m\leqslant\frac{4}{5}.$$

即 m 取大于、等于 $\dfrac{4}{5}$ 的数时等式成立.

(2) 要使等式成立，那末

$$\frac{m-3}{2-m}\geqslant 0,$$

所以 $$2<m\leqslant 3.$$

即 m 取大于 2 而小于等于 3 的数时等式成立.

(3) 根据绝对值的运算性质，$|a+b|=|a|+|b|$，当 a、b 同号或者 a、b 中有一个为零时等号才成立，因此能使等式成

立的 m 的值，应该满足下列条件之一：

i) $\begin{cases} m-3>0, \\ m-8>0, \end{cases}$ 即两数同为正数；

ii) $\begin{cases} m-3<0, \\ m-8<0, \end{cases}$ 即两数同为负数；

iii) $m-3=0$ 或 $m-8=0$，即两数中有一个为零.

由 i) 得 $m>8$，由 ii) 得 $m<3$，由 iii) 得 $m=3$ 或 $m=8$. 所以当 $m\geqslant 8$ 或 $m\leqslant 3$ 时等式成立.

3. 算术根与绝对值

我们知道，如果 x 的 n 次方等于 a，那末 x 就叫做 a 的 n 次方根. a 的 n 次方根记作 $\sqrt[n]{a}$，其中 a 是被开方数，n 是根指数.

例如，3 的三次方是 27，因此 3 是 27 的三次方根(或立方根). -2 的五次方是 -32，所以 -2 是 -32 的五次方根. 由此可见，任何一个实数的奇次方根是唯一确定的数，一般我们用 $\sqrt[2n+1]{a}$ 来表示 a 的奇次方根(n 是自然数). 当被开方数是正数时，那末它的奇次方根是正数，当被开方数是负数时，那末它的奇次方根是负数，零的奇次方根是零.

因为任何一个实数的偶次方是一个非负数，因此，只有非负数才存在偶次方根，而负数不存在偶次方根，例如，4 的平方是 16，因此 4 是 16 的平方根；-4 的平方也是 16，那末 -4 也是 16 的平方根，由此可见，任何一个正数的偶次方根有两个，并且是互为相反数. 而零的偶次方根仍然是零. 一般我们用 $\pm\sqrt[2n]{a}$ 来表示正数 a 的偶次方根.

为了运算的需要，我们规定：正数的正的方根叫做算术

根，零的算术根是零，并且用符号$\sqrt[n]{a}$ ($a\geqslant0$，n是大于1的整数)来表示.

根据算术根的定义，一般地有：

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|=\begin{cases}a & \text{当 } a>0 \text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } a=0 \text{ 时,}\\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时.}\end{cases}\quad (n\text{是自然数})$$

作了这样的规定，根式运算的结果就唯一了．例如，计算$\sqrt{9}+\sqrt{4}$．如果不作这样的规定，$\sqrt{9}$表示9的平方根，它可以是$+3$，也可以是-3，$\sqrt{4}$表示4的平方根，它可以是$+2$，也可以是-2．这样，运算的结果就有四个，即：5，-5，1，-1．规定了算术根以后，那末$\sqrt{9}=3$，$\sqrt{4}=2$，所以$\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$，运算结果就唯一地确定了.

下面我们举一个诡辩的题目的论证，分析一下它究竟错在哪里？

取一个等式：

$$16-36=25-45,$$

等式的两边，各加上$20\frac{1}{4}$，得

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}.$$

由此 $4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$，

即

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

两边开平方，得

$$\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2},$$

即 $$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2},$$

所以 $$4=5(?!)$$

这个题目，在论证时究竟错在哪里呢？就错在对算术根概念不清楚．事实上$\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\left|4-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}-4\neq4-\frac{9}{2}$，正因为这一步错了，就推出了一个荒谬的结论来．

类似这样的错误是很容易发生的．例如，求 $2a+\sqrt{1-2a+a^2}$，当 $a=5$ 时的值，可以得到两种不同的答案：

一种是

$$2a+\sqrt{1-2a+a^2}=2a+\sqrt{(1-a)^2}=2a+1-a=a+1=6;$$

另一种是把 $a=5$ 代入后，得

$$10+\sqrt{1-10+25}=10+4=14.$$

这两个答案究竟哪一个是正确的，哪一个是错误的呢？错在什么地方？留给读者自己研究．

因此，在进行根式的运算时，一定要注意算术根这个概念．

［例 8］ 化简：$\sqrt{4-12a+9a^2}$．

解 $\sqrt{4-12a+9a^2}=\sqrt{(2-3a)^2}$

$$=|2-3a|=\begin{cases}2-3a, & \text{当 } a<\frac{2}{3}\text{ 时;}\\ 3a-2, & \text{当 } a\geqslant\frac{2}{3}\text{ 时.}\end{cases}$$

［例 9］ 计算：$\sqrt{17-12\sqrt{2}}$．

分析 要求 $17-12\sqrt{2}$ 的算术平方根，可以先把它化成 $A-2\sqrt{B}$ 的形式，就是先把$\sqrt{17-12\sqrt{2}}$化成$\sqrt{17-2\sqrt{72}}$，然后把 72 分解成 8、9 两个因数．这样 $17-12\sqrt{2}$ 的算术平方根就可求得了．

解 $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{8+9-2\sqrt{8\cdot 9}}$

$=\sqrt{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{9})^2-2\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}$

$=\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{9})^2}=|\sqrt{8}-\sqrt{9}|$

$=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$.

注意：$\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 是表示 $17-12\sqrt{2}$ 的算术平方根，因此结果是 $3-2\sqrt{2}$，而不能是 $2\sqrt{2}-3$.

[例 10] 下列各式运算对不对？为什么？

(1) $\sqrt{25}=\pm 5$; (2) $\sqrt{(-3)^2}=-3$;

(3) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$; (4) $\sqrt{\cos^2 245^\circ}=\cos 245^\circ$.

解 这四个运算都是错误的. 因为这四个式子的左端都是算术根，运算的结果必须是非负数，而原来的式子并未考虑到这一点，正确的运算应该是：

(1) $\sqrt{25}=5$; (2) $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=-(-3)=3$;

(3) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha}=|\sin\alpha|$.

当 $2n\pi\leqslant\alpha\leqslant(2n+1)\pi$ 时，

$$原式=\sin\alpha;$$

当 $(2n-1)\pi<\alpha<2n\pi$ 时，

$$原式=-\sin\alpha.$$

(4) $\sqrt{\cos^2 245^\circ}=|\cos 245^\circ|$,

$\because$ $\cos 245^\circ<0$,

$\therefore$ $\sqrt{\cos^2 245^\circ}=|\cos 245^\circ|=-\cos 245^\circ$.

[例 11] 证明下列各式：

(1) $x+\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases}2x-1, & 如果\ x\geqslant 1;\\ 1, & 如果\ x<1.\end{cases}$

(2) $(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}=\begin{cases}\sqrt{m+n}, & 如果\ m>n;\\ -\sqrt{m+n}, & 如果\ m<n.\end{cases}$

证明 (1) $x+\sqrt{(x-1)^2}=x+|x-1|$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$，所以

$$原式=x+x-1=2x-1;$$

当 $x<1$ 时，$|x-1|=1-x$，所以

$$原式=x+1-x=1.$$

所以等式成立.

(2) $(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}=(m-n)\dfrac{1}{|m-n|}\sqrt{m+n}$.

当 $m>n$ 时，$|m-n|=m-n$，所以，

$$原式=(m-n)\frac{1}{(m-n)}\sqrt{m+n}=\sqrt{m+n};$$

当 $m<n$ 时，$|m-n|=n-m$，所以，

$$原式=(m-n)\frac{1}{n-m}\sqrt{m+n}=-\sqrt{m+n}.$$

所以等式成立.

[例 12] 化简:

(1) $\sqrt{10^{2\lg(\lg x)}-10^{\lg(\lg x)+\lg 2}+1}$;

(2) $\sqrt{1-\sin x}$. (x 是锐角)

解 (1) $\sqrt{10^{2\lg(\lg x)}-10^{\lg(\lg x)+\lg 2}+1}$

$$=\sqrt{10^{\lg(\lg x)^2}-10^{\lg(\lg x)}\cdot 10^{\lg 2}+1}$$

$$=\sqrt{(\lg x)^2-2\lg x+1}=\sqrt{(\lg x-1)^2}$$

$$=|\lg x-1|.$$

当 $x\geqslant 10$ 时，因为 $\lg x\geqslant 1$，所以

$$原式=\lg x-1;$$

当 $1<x<10$ 时，因为 $\lg x<1$，所以

$$原式=1-\lg x.$$

(2) $\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|.$$

$\because$ x 是锐角，$\frac{x}{2}$ 小于 $45°$，$\therefore$ $\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2}$.

所以

$$原式=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}.$$