青年数学小丛书

一笔画和邮递路线问题

姜伯駒

北京市数学会编

中国青年出版社

青年数学小丛书

一笔画和邮递路线問題

姜 伯 駒

北京市数学会编

中国青年出版社

1962年·北京

青年数学小丛書

华罗庚：从杨輝三角談起
段学复：对称
华罗庚：从祖冲之的圓周率談起
吳文俊：力学在几何中的一些应用
史济怀：平均
閔嗣鶴：格点和面积
姜伯駒：一笔画和邮递路线問題
龚　昇：从刘徽割圓談起

一笔画和邮递路线問題
姜　伯　駒
*
中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
*
787×1092 1/32　1 1/16印張　20,000字
1962年11月北京第1版　1962年11月北京第1次印刷
印数 1—27,000

統一书号：13009·207

定价一角四分

編者的話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义．近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物．在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套“青年数学小丛書”，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求．

考慮到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前数学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来．

这是我們的初步想法和尝試．热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物．

北京市数学会

1962年四月

目　　次

編者的話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义．近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物．在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套“青年数学小丛書”，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求．

考虑到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前教学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来．

这是我們的初步想法和尝試．热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物．

北京市数学会

1962年四月

目　　次

一　从邮递路綫問題說起

"一个邮递員每次送信，要走遍他負責投递的范围內的街道，完成任务后回到邮局．問他按怎样的路綫走，所走的路程最短？"

这个問題叫做**最短邮递路綫問題**，是邮递員每天都要碰到的．1959年，在山东省用运筹学解决实际問題的热潮中，发明了一种求最短邮递路綫的数学方法——**奇偶点图上作业法**．据說在某地用这个方法改善了投递制度后，邮递的效率大大提高．

这是一个又实用又有趣的問題，值得我們花一些时間来研究一下．

最理想的邮递路綫当然是从邮局出发，走遍每条街而且都只走过一次，最后回到邮局．这样的路綫由于沒有重复，显然是最短的．

然而这么理想的路綫一定找得到嗎？

比方說有像下面图1、图2那样的街道图，图中A是邮

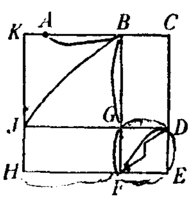

图1．

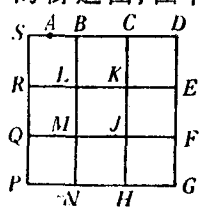

图2．

局．从 A 出发，要走遍每条街而且都只走过一次，在图 1 上是可以做到的，例如 A-B-C-D-E-F-G-B-J-G-D-F-H-J-K-A，或 A-B-C-D-F-E-D-G-J-B-G-F-H-J-K-A，或 A-B-G-F-D-G-J-B-C-D-E-F-H-J-K-A，等等．可是图 2 却不行，不管你怎样走，不是有几段沒有走到，便是有几段得重复走．

看来不是在任何条件下都能找到这么理想的路綫的．那么是在什么样的条件下能找到理想路綫呢？

这使我們联想到一种有名的数学游戏，叫做**一笔画**．

二　一笔画問題

一笔画問題是問：什么样的图形可以一笔画成，笔不离紙，而且每条綫都只画一次不准重复？

譬如下面图 3 中的三个图形，讀者試过各种画法后，会断定“田”和“品”不可能一笔画成，而“串”却可以．

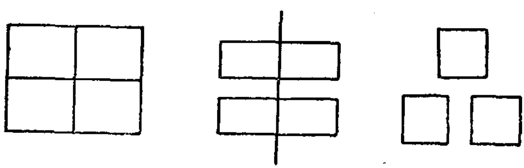

图 3.

刚才的理想邮递路綫問題，比一笔画要求还多一点：最后要画回起点．但是以后我們会看到，这点差别是不頂要紧的．

所以一笔画問題可以說就是最短邮递路綫問題的一部分，是理想邮递路綫找不找得到的問題．其实，我們用来解决

邮递路綫問題的奇偶点图上作业法，就是以一笔画的研究作为理論基础的。所以我們准备先把最短邮递路綫問題擱在一边，花比較多的篇幅討論一笔画問題①，然后再回头来分析最短邮递路綫問題。

一笔画問題是大数学家欧拉（Euler, 1707-1783）提出并解决的。說起来还有一段故事呢。

三　七座桥的故事

故事发生在十八世紀的哥尼斯堡城，这城市当时属东普魯士，現属苏联立陶宛共和国，已改名叫加里宁格勒。那里有七座桥，如图 4。当时那里的居民热衷于一个难题：一个散步

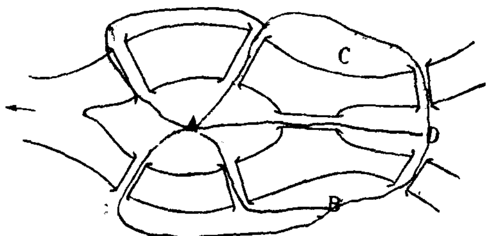

图 4.

者怎样能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点？这題目似乎不难，誰都願意試一試，但是誰也回答不出。

欧拉是一位数学家，他的头脑比較冷靜。千百人的失敗，使他猜想：也許那样的走法根本就不存在。1736 年，他証明了他的猜想，并在圣彼得堡科学院作了一次报告。

① 在孙泽瀛所著《数学方法趣引》（中国科学图書仪器公司出版）一書里，有一笔画問題的精采討論，可以参看。不过我們的講法和他不一样。

他首先用一点 A 表示島，点 B 表示河的左岸，C 表示右岸，D 表示两支流間的地区(参看图4)；用联結两点的綫来表示联結两块陆地的桥，得到一个由七条綫組成的图形(如图 5)．前面的七桥問題就变成一个一笔画問題：能否一笔画出这个图形，并且最后返回起点？

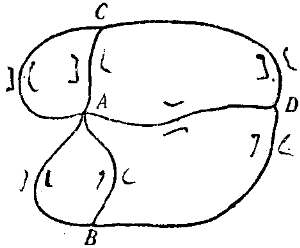

图 5.

現在我們分析一下用笔画图的过程．如果我們从某一点出发，一笔画出了某个图形，到某一点終止，那么中間每經过一点，总有画进那点去的一条綫和从那点画出来的一条綫．所以除了起点和終点这两个点以外，这个图形的每一点应該和偶数条綫相联．如果起点和終点重合，那么連这个点也应該和偶数条綫相联．

然而我們的图形上的四个点都和三条(B，C，D 各点)或五条(A 点)綫相联，都是奇数条綫．这样当然不可能一笔画出并回到起点．即使不要求回到起点，也不可能一笔画出．

正是經过这样分析，欧拉断定，不管要求不要求回到出发点，不重复地一次走遍那七座桥，总是不可能的．

七桥問題，或者一笔画問題，明显地是一个几何問題．然而这种几何問題却是欧几里德几何学(即中学里的平面几何和立体几何)所沒有研究过的．因为欧氏几何中研究的图形，都由直綫和圓組成，討論的是长度、角度等等性質，而在七桥問題里，桥的准确位置、长度是无关紧要的，要紧的只是哪两

块陆地間有几座桥；一笔画問題里綫条的长短曲直也无关紧要，要紧的只是有几个分叉点，哪几对点間有几条綫相联．也可以説，要紧的只是点綫之間的相关位置，或相互联結的情况．所以欧拉把这类几何問題的研究叫做**位置几何学**．对于这么一类新鲜的几何問題，欧拉当然不满足于只解答一个七桥問題．他繼續鑽研，終于找到了一个簡便的原則，可以鉴别任一图形能不能一笔画出．那条定理，通常就叫**欧拉定理**．

在講欧拉定理之前，为了把問題弄得更清楚些，使叙述和論証更确切些，我們需要先引进一些术語和記号．

四 网 絡

我們要討論的图形都是由綫条构成的，不考虑整块的面积，也不考虑孤立的点．对于这种討論对象，我們用一个专門的名詞来叫它，叫做**网絡**．为了明确起見，我們給它下一个定义：

网絡是由有限个点（叫网絡的**頂点**，頂点的个数以后記作α_0）和有限条綫（叫网絡的**弧**，弧的条数以后記作α_1）所組成的图形，这些綫和点满足下面几个条件：

(G1) 每条弧都以两个不同的頂点作为**端点**；

(G2) 每个頂点至少是一条弧的端点；

(G3) 各条弧彼此不相交．

平面几何和立体几何中所遇到的許多由点和綫組成的图形，在适当地規定了頂点和弧以后，都可以看成网絡．条件(G1)是說网絡中的弧必須有端点（因此直綫和圓都不能做网

絡中的弧)，也不能只有一个端点(因此射綫也不能做弧，圓和圓上一点所組成的图形也不是网絡)，而必須有两个端点．例如图 6 用两个点把圓周分成两条弧，就得到两个頂点两条弧的网絡．条件 (G2) 是說不考慮孤立的頂点．条件(G3)規定了，要想把相交的綫看成一个网絡，必須把所有的交点都算作頂点，并把那几条綫适当地算作若干条弧．例如：平面上的凸四边形的頂点和边組成一个网絡，添上两条对角綫，如图 7，就不是网絡了，因为这两条綫相交．但是假如我們把对角綫的交点也算作頂点，而且把每条对角綫都算做由交点分成的两条弧，如图 8，那它又是一个网絡了．

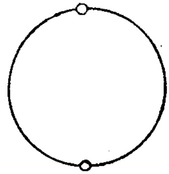

图 6.

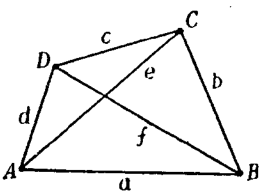

图 7.

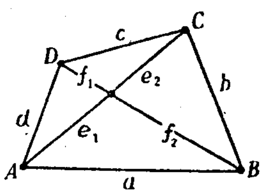

图 8.

为什么要这样比較抽象地提出网絡的概念呢？这是因为，有了网絡的概念，不但使我們以后說起話来方便，而且可以扩大我們討論适用的范围．因为按照这个定义，不单紙上的一个图可以看成网絡，一个电子仪器的复杂的电路也可以看成网絡，一个国家的鉄路网、公路网、水运网，一个区的街道网，都可以看成网絡．不但有平面上的网絡，还可以有空間中

的网絡。所以我們以后对一般的网絡进行研究所得到的种种結論，就会对所有这些具体的网絡都适用。

为了記述方便，我們規定用这样的記号：凡是网絡中的頂点都用大写字母，弧都用小写字母。用 $l=AB$ 表示弧 l 以 A,B 为端点。当然，如果 $l=AB$，那么也有 $l=BA$。但要注意，若 $l_1=AB, l_2=AB$，未必 $l_1=l_2$，因为以 A,B 为端点的弧可以不止一条。网絡本身用黑体大写字母，譬如 $\mathbf{G}$，来表示。

另外，我們还要提出一个概念。所謂网絡中的一条**路**，是指一串弧 $(l_1,l_2,\cdots,l_k)$，其中沒有重复出現的弧，并且每一条弧 $l_i(i=2,\cdots,k-1)$ 都以一端和 l_{i-1} 相接，另一端和 l_{i+1} 相接。路也用黑体大写字母表示，記做 $\boldsymbol{W}=(l_1,l_2,\cdots,l_k)$，$l_i=A_{i-1}A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$。$A_0$ 和 A_k 叫做这路的两端，或者說这路連結 A_0 和 A_k。若 $A_0=A_k$，那么这路叫**閉路**。若頂点 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 又互不相同，那么这閉路叫做**圈**。例如图 9 中，(a,d,g,e) 不是路，(a,d,e,g) 是路；(a,g,h,f,c,b,d,e,h) 不是閉路（也不是路），因为弧 h 出現了两次；(a,b,c,e,g,d,f) 是閉路而不是圈；(a,d,e,h) 是一个圈。

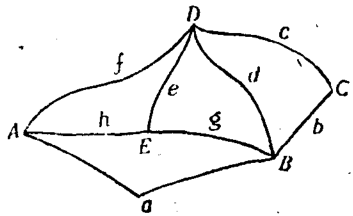

图 9.

現在不难看出，一笔画問題相当于：給定了一个网絡，問有沒有可能把所有的弧排成一条路。而要求一笔画成后回到起点，就相当于要求把全部的弧排成一条閉路。这就把一笔画問題用网絡的語言提明确了。同时也把問題推广了，因为

原来的一笔画問题只是对平面上的图形說的，而現在的提法却对任何网絡都有意义，不必限于平面上的网絡。如果一个网絡的全部弧可以排成一条路（不必是閉路），这网絡就叫做一个**一笔画**。

有一些图形，像前面图3中的"品"字，所以不能一笔画成，显然因为它不是連在一起的。可見能一笔画成的图形必定是連成一片的。所謂連成一片到底是什么意思？我們也来下个定义。一个网絡称为**連通的**，如果它的任意两个頂点都可用一条路連結起来；否则称为**不連通的**。例如图10中左边的网絡是連通的，右边的是不連通的，因为其中有几对頂点，例如 A、D，或 D、G，无法用路連結。

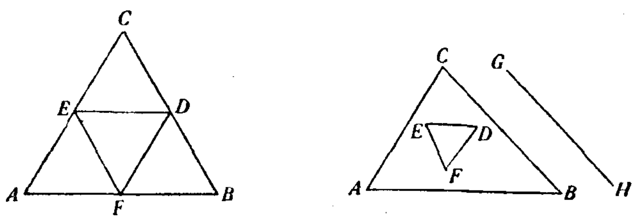

图 10.

如果某网絡是由几个网絡併成的，这几个网絡彼此沒有公共的頂点和弧，那么这网絡就一定是不連通的。反过来，可以証明，不連通的网絡总是由几个互不相交的連通网絡併成的；这几个連通网絡叫做这不連通网絡的**分支**。分支的个数記作 p_0。例如图10右边的网絡，有三个分支：三角形 ABC，三角形 DEF，綫段 GH，所以 $p_0=3$。連通网絡的 $p_0=1$。

我們曾經注意到，一笔画問題又和頂点联結的弧数，即頂

点处的分叉情况有关。以某个頂点为端点的弧的条数，叫做这頂点的**叉数**。例如图 9 中 B 是 4 叉頂点，C 是 2 叉頂点，E 是 3 叉頂点。頂点的叉数有奇偶之分。叉数是奇数的頂点叫做**奇頂点**，叉数是偶数的頂点叫做**偶頂点**。奇頂点的多少，和一笔画問題有极大关系。沒有奇頂点的网絡，通常叫做**欧拉网絡**，紀念他第一个指出了这种网絡的一些特性。

有了这些准备，可以講欧拉的定理了。

五 欧拉定理

欧拉給自己提出了两个問題：根据哪些特征可以断定一个网絡不是一笔画？根据哪些特征可以断定一个网絡是一笔画？我們先来談談第一个問題。

要証明一个网絡（例如图 5 上的网絡）不是一笔画，就应該証明在这网絡中全部的弧不可能排成一条路，或者說这网絡中不存在一条路包括全部的弧。也就是說，不能只是承認你自己沒能找到这样的路，还要能断言别人也不会找到；不但是至今沒人找到过，而且将来任何时候也不会有人找得到。要論証，找不到的原因并不是你主观上能力不够，而是客观上根本不存在。这种"不存在性"定理在数学中是很多的①。有的很容易証，譬如說：不存在三边长度分别是 2，3，4 的直角三角形，因为直角三角形的三边长度必須滿足勾股弦定理，而 $2^2+3^2=13\neq 4^2$。也有的很不容易証，譬如說：不可能用圓規

① 1962 年北京市数学竞賽高二第二試第 1，4 题，就是"不存在性"問題。見《数学通报》1962 年第 5 期。

和直尺三等分任意角[①]. 証明"不存在性"定理的最常用的办法,是用反推法:先証明,假如"存在",那么必須如何如何;然后說,現在并不如何如何,所以"不存在". 上面証那直角三角形的不存在,用的是这个办法. 第三节証明七桥問題不可能有解,用的也是这个办法.

由此可見,欧拉的第一个問題可以換个問法:一笔画必須具备哪些性質? 如果后面这問題得到了回答,那么不具备那些性質的网絡就一定不是一笔画了. 下面的定理就是回答这个問題的,解决七桥問題的实际上正是这个定理.

定理一 一笔画必是連通的,并且奇頂点的个数是0或2.

証明 一笔画的全部弧可以排成一条路

$$Z=(l_1,l_2,\cdots,l_k),l_i=A_{i-1}A_i,i=1,2,\cdots,k.$$

这里 $A_0,A_1,\cdots,A_k$ 包括这网絡的全部頂点(可能有重复),因为任一頂点至少是一条弧的端点. 任取两頂点 $A_i,A_j,i<j$,它們可用路 $(l_{i+1},\cdots,l_j)$ 联結起来. 所以这网絡是連通的.

任取网絡中的一个頂点 A,假設它在序列 $A_0,A_1,\cdots,A_k$ 中出現 s 次: $A=A_{i_1}=A_{i_2}=\cdots=A_{i_s}$, $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant k$,那么对每个 i_r, $1\leqslant r<s$,都有 $i_r+1<i_{r+1}$; 因为否則 $i_r+1=i_{r+1}$,即 $l_{i_{r+1}}$ 的两端点相同,这违反条件 $(G1)$. 假如 A 不是 A_0 或 A_k,即 $i_1>0,i_s<k$,那么以 A 为端点的弧有 $2s$ 条: l_{i_1},

---

① 三等分一角的問題,可以参看《你会不会三等分一角?》,錢曾涛著,中国青年出版社出版. 那里指出了怎样去証明不可能用圓規和直尺三等分任意角,但是論証还不十分严密. 又可参看聶灵沼:《几何作图》,《数学通报》1957年2月号.