作者　柯珊

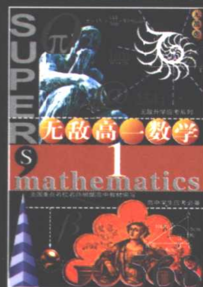
高级教师。1960年至1966年就读于北京师大二附中、北京师大实验中学。1982年毕业于北京师范大学数学系。现执教于北京师范大学第二附属中学。曾任西城区兼职教研员。曾参加《名师中考指导手册》丛书及《中国小百科全书》编写工作。

作者　高雪松

1996年毕业于北京师范大学数学系。现任教于北京师范大学第二附属中学。1997年获得西城区青年教师教学基本功大赛一等奖。曾参加《奥林匹克赛前训练》数学版以及《名校名师辅导》丛书编写。

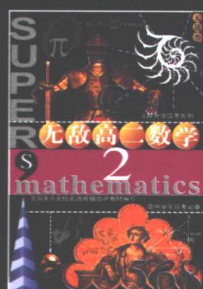
《无敌高中数学》荣耀上市

无敌高一数学（高中版）



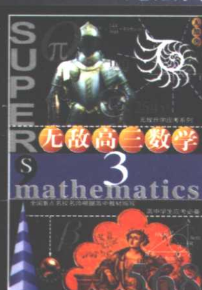
◆代数与几何分别由柯珊、高雪松老师撰稿。其清晰的思路指示、详尽的例题解说、精选的习题配备，是高中数学入门的最佳选择。

无敌高二数学（高中版）



◆由李家智、曹付生老师撰稿。本书最大特色在于题前思路指引，题后归纳总结，举一推二，让你既知其然，亦知其所以然，拓宽解题思路。

无敌高三数学（高中版）



◆柯珊老师融多年教学经验呕心沥血之作。汇集易错易忽视之处娓娓道来，内容强大，解说详尽，还辅以应试指导，是复习迎考宝典。

SUPER

名师根据高中教材编写

无敌高一数学

1

mathematics

海豚出版社

mathematics

编者序

学数学，原本并不难

在期待中，辛劳中，喜悦中，责任中，我们同读者一起收获了高中数学。从孕育到生产完成的过程中有无数读者给予了鼓舞与鞭策。在《无敌初中数学》的基础上，我们再邀名师，吸取经验，提炼精华，倾力编写，完成此书，期望“百尺竿头，更进一步”。

数学在中小学课程设置中相当重要，特别是在高考中常是拉分的关键，但长期以来，它一直扮演着“拦路虎”的角色，学生深知其重要，却又畏惧。我们本着“兴趣是最好的老师”,致力于激发同学们对学习的兴趣及热忱，消除其畏惧心理，设计上先以彩色面目引人，而后以精湛翔实内容灌输，做到“华而且实”,如名师在旁，娓娓叙述，既弥补学生课上未及消化的部分，又起到加深巩固的作用。我们的目标是“请君入瓮”,一旦进入，必会发现别有洞天，一有收获，自会激起兴趣，增加信心，便会觉“学数学，原本并不难!”

根据不同年级的特点，我们做了不同的划分。高一数学立足于思路引领、方法指导，并配以详尽的解说，使其“入门有道”;高二数学则重于理论与实践的结合，在实际演练中，将思路拓宽；高三数学则紧跟高考，除了历次高考涉及的各种题型、各种解法的详尽指示，尚有针对各层次学生的应试技巧辅导，精彩题库任你遨游。

学习不是死记硬背，不是搞题海战术，而是应掌握良好的思维习惯。基于此，本套三册书均重于典型题的思路分析，题后的概括总结也起到举一反三的作用。“良好的开始，成功的一半”,高一时播下的良好的种子，经历高二的辛劳耕耘，必会在高三结出累累硕果。

我们在此预祝我们新书的出世能给莘莘学子带来更大的帮助，同时它也期待着与更多新老朋友结识，共创明天的坦途。

2001 年 7 月 30 日

本书编辑特色

代数

1 学习经纬：
将该节重点清晰、明确、全面呈现，利于预习和复习。

3 解题秘招：
以例题形式讲解本节所涉及之定义、公式、定理、性质……从而帮助学生加深对概念的理解。

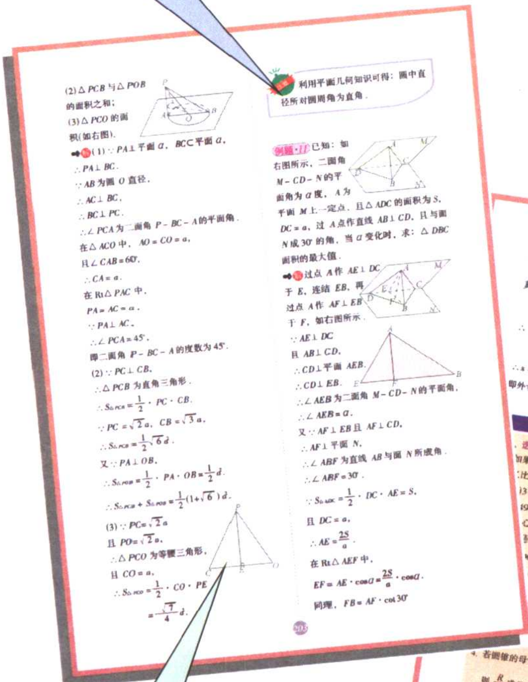
2 KEY POINT：
将教材中必背公式及解题必备技巧特别提炼出来，是学生应牢牢掌握之知识点。

4 STEP BY STEP：
通过对各类题型之详尽解答，于步骤中逐一示范解题技巧，由此举一反三，使数学学习事半功倍。

与使用方法

几何

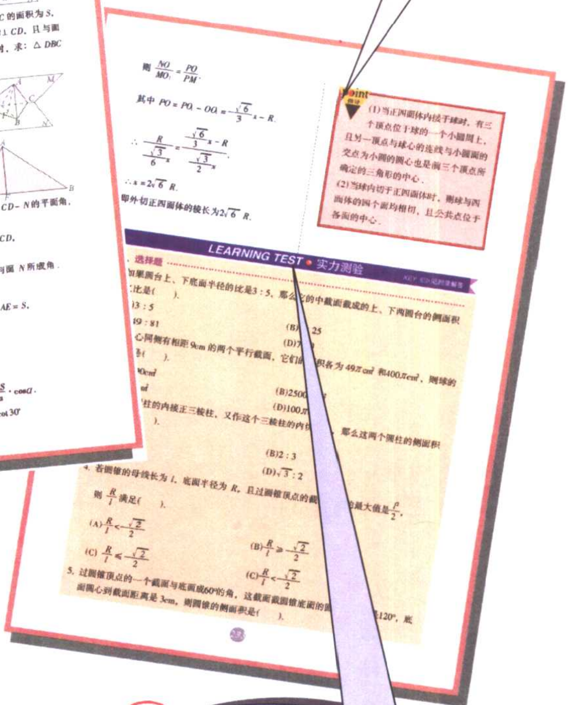
5 注意：
在学习过程中，随时随地提醒学生应强烈注意的地方，避免细节失误。


(2) △PCB 与△POB 的面积之和；
(3) △PCO 的面积（如右图）。
解 (1) ∵ PA⊥平面α，BC⊂平面α，
∴ PA⊥BC.
∵ AB 为圆 O 直径，
∴ AC⊥BC，
∴ BC⊥PC.
∴ ∠PCA 为二面角 P－BC－A 的平面角.
在△ACO 中，AO＝CO＝a，
且∠CAB＝60°，
∴ CA＝a.
在 Rt△PAC 中，
PA＝AC＝a.
∵ PA⊥AC，
∴ ∠PCA＝45°.
即二面角 P－BC－A 的度数为 45°.
(2) ∵ PC⊥CB，
∴ △PCB 为直角三角形.
∴ $S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot CB$.
∵ $PC=\sqrt{2}a$，$CB=\sqrt{3}a$，
∴ $S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}\sqrt{6}a^2$.
又∵ PA⊥OB，
∴ $S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot OB=\frac{1}{2}a^2$.
∴ $S_{\triangle PCB}+S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{6})a^2$.
(3) ∵ $PC=\sqrt{2}a$
且 $PO=\sqrt{2}a$，
∴ △PCO 为等腰三角形，
且 CO＝a，
∴ $S_{\triangle PCO}=\frac{1}{2}\cdot CO\cdot PE=\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$.

注意 利用平面几何知识可得：圆中直径所对圆周角为直角.

例题·11 已知：如右图所示，二面角 M－CD－N 的平面角为α度，A 为平面 M 上一定点，且△ADC 的面积为 S，DC＝a，过 A 点作直线 AB⊥CD，且与面 N 成 30°的角，当α变化时，求：△DBC 面积的最大值.
解 过点 A 作 AE⊥DC 于 E，连结 EB，再过点 A 作 AF⊥EB 于 F，如右图所示.
∵ AE⊥DC
且 AB⊥CD，
∴ CD⊥平面 AEB.
∴ CD⊥EB.
∴ ∠AEB 为二面角 M－CD－N 的平面角，
∴ ∠AEB＝α.
又∵ AF⊥EB 且 AF⊥CD，
∴ AF⊥平面 N，
∴ ∠ABF 为直线 AB 与面 N 所成角，
∴ ∠ABF＝30°.
∵ $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot AE=S$，
且 DC＝a，
∴ $AE=\frac{2S}{a}$.
在 Rt△AEF 中，
$EF=AE\cdot\cos\alpha=\frac{2S}{a}\cdot\cos\alpha$.
同理，$FB=AF\cdot\cot30°$

7 Point 指导：
将数学的解题思路，方法和易错失分之处特别归纳指出，是应考的提分秘诀。


则 $\frac{NO}{MO_1}=\frac{PO}{PM}$.
其中 $PO=PO_1-OO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}x-R$.
∴ $\frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{6}x}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}x-R}{\frac{\sqrt{3}}{2}x}$.
∴ $x=2\sqrt{6}R$.
即外切正四面体的棱长为 $2\sqrt{6}R$.

Point (1)当正四面体内接于球时，有三个顶点位于球的一个小圆周上，且另一顶点与球心的连线与小圆面的交点为小圆的圆心也是该三个顶点所确定的三角形的中心.
(2)当球内切于正四面体时，则球与四面体的四个面均相切，且公共点位于各面的中心.

LEARNING TEST · 实力测验

选择题
如果圆台上、下底面半径的比是3∶5，那么它的中截面截成的上、下两圆台的侧面积之比是（ ）.
3∶5
(B) 25
49∶81
(D)
心同侧有相距 9cm 的两个平行截面，它们的面积各为 $49\pi cm^2$ 和 $400\pi cm^2$，则球的
(B)2500
(D)100π
柱的内接正三棱柱，又作这个三棱柱的内切圆柱，那么这两个圆柱的侧面积
(B)2∶3
(D)$\sqrt{3}$∶2
4. 若圆锥的母线长为 l，底面半径为 R，且过圆锥顶点的截面面积的最大值是 $\frac{l^2}{2}$，则 $\frac{R}{l}$ 满足（ ）.
(A) $\frac{R}{l}<\frac{\sqrt{2}}{2}$
(B) $\frac{R}{l}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\frac{R}{l}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $\frac{R}{l}<\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. 过圆锥顶点的一个截面与底面成 60°的角，这截面截圆锥底面的弧为 120°，底面圆心到截面距离是 3cm，则圆锥的侧面积是（ ）.

6 图形：
全部图形均彩色化，不仅清晰明确，更利于理解题目并攻克难题。

8 LEARNING TEST · 实力测验：
采用习题的形式，帮助学生真实检测学习成效，书后附答案及解题思路供参考。

目录

代数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数—7

第二章 三角函数—75

第三章 两角和与差的三角函数、解斜三角形—107

第四章 反三角函数和简单三角方程—139

几何

第一章 直线和平面—147

第二章 多面体和旋转体—207

实力测验·答案

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

内容提示

❶ 理解集合的概念及特征，并能熟练地进行集合的交集、并集、补集的运算．
❷ 会熟练地解简单的绝对值不等式和一元二次不等式．
❸ 理解映射与函数的概念，掌握函数定义域和值域的求法，会求反函数，会作函数图象．
❹ 掌握函数单调性、奇偶性的证明方法及其应用．
❺ 掌握幂函数、指数函数和对数函数的图象与性质．
❻ 会解指数方程和对数方程．

第一节　集合与不等式

学习经纬

[1] 绝对值不等式、一元二次不等式及不等式组解法．

[2] 集合的概念、特征，子集的概念．

[3] 集合的交集、并集、补集的运算．

KEY POINT

[1] 集合的元素具有确定性、互异性和无序性三特征；集合与元素之间有且仅有属于与不属于两种关系，即表示为：$a\in A$ 或 $a\notin A$.

[2] 集合的表示法　(1)列举法；(2)描述法，如$\{x\mid x-2>5\}$，x 为元素，$x-2>5$ 为元素 x 的共同属性．

[3] 子集　若集合 A 中的所有元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作$A\subseteq B$.

空集是任何集合的子集，A 是 A 的子集．

真子集　若集合 A 是 B 的子集，而 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

空集是任何非空集合的真子集，即 $\phi\subset A(A\neq\phi)$，但空集不是空集的真子集．

集合相等　若集合 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

子集的性质　(1) $A\subseteq A$；(2) $\phi\subseteq A$；(3)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；(4)若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

[4] 交集　由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A、B 的交集，记作 $A\cap B$.

交集的性质　(1) $A\cap A=A$；(2) $A\cap\phi=\phi$；(3) $A\cap B=B\cap A$；(4) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

[5] 并集　由所有属于集合 A 或属于集合

B 的元素所组成的集合，称为集合 A、B 的并集，记作 $A\cup B$.

并集的性质 (1) $A\cup A=A$；(2) $A\cup\phi=A$；(3) $A\cup B=B\cup A$；(4) $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

6 补集 已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$.

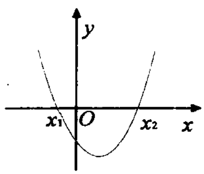
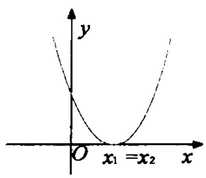
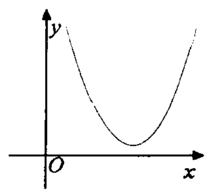
补集的性质 (1) $A\cup\overline{A}=I$；(2) $A\cap\overline{A}=\phi$；(3) $\overline{\overline{A}}=A$；(4) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；(5) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

7 常用数集：N—自然数集，Z—整数集，Q—有理数集($\overline{Q}$—无理数集，Q^-—负有理数集)，R—实数集(R^+—正实数集).

8 不等式 $|kx+b|>a(a>0)\Leftrightarrow kx+b>a$ 或 $kx+b<-a$.

不等式 $|kx+b|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<kx+b<a$.

9 一元二次方程、一元二次函数、一元二次不等式之间的关系(见下表)：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)的根	有两不等实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	有两相等实根 $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$	无实根
$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)的图象			
$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_1,\ x\in R\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	ϕ	ϕ

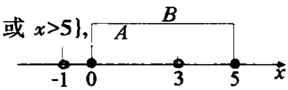
解题秘招

已知 $I=R$，$A=\{x\mid |x-1|<2\}$，$B=\{x\mid x^2-5x\leqslant0\}$，求 $A\cup B$，$A\cap\overline{B}$.

解法与解答

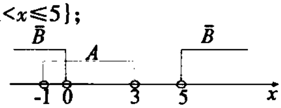
化简 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant5\}$，又 $\overline{B}=\{x\mid x<0$ 或 $x>5\}$，

如右图可知：



$A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant5\}$；

如右图可知：



$A\cap\overline{B}=\{x\mid -1<x<0\}$.

(1)集合 B 中已包含元素 0、5，其补集中就不能再有 0、5. 等号的取舍一定要准确；(2)此类题可借助数轴直观解题；(3)并集是图中两条直线全部覆盖的区间；(4)交集是图中两条直线公共覆盖的区间.

point 指导

本例直接考察集合交、并、补的运算．

举例2 设 I 为全集，集合 P、Q 满足 $P \subset Q$，则下面的结论中错误的是(　　).

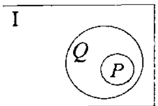
(A) $P \cup Q = Q$　　(B) $P \cup \overline{Q} = I$

(C) $P \cap \overline{Q} = \phi$　　(D) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{Q}$

解法与解答

选(B).

如右图可知，$P \subset Q$，



可见 $\overline{P} \supset \overline{Q}$，

$\therefore \overline{P} \cup \overline{Q} = \overline{P} \neq I$，应选(B).

在做题前一定要读清题意．例如本题中，要选择结论是错误的答案．

point 指导

文氏图可以迅速直观地看出集合之间的关系，需要熟练掌握运用．

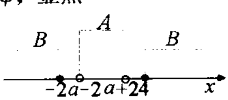
[redacted]已知集合 $A = \{x \mid |x - a| < 2\}$，$B = \{x \mid |x - 1| \geq 3\}$，$A \cap B = \phi$，求实数 a 的取值范围．

解法与解答

化简 $A = \{x \mid a - 2 < x < a + 2\}$，$B = \{x \mid x \leq -2$ 或 $x \geq 4\}$.

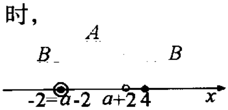
如图可知：$A \cap B = \phi$，显然

$\begin{cases} -2 < a - 2, \\ a + 2 < 4, \end{cases}$



再考虑当 $-2 = a - 2$ 时，

如右图，$A \cap B = \phi$ 仍然成立．



同理，当 $a + 2 = 4$ 时也符合题意，

$\therefore a$ 的取值范围应满足 $\begin{cases} -2 \leq a - 2, \\ a + 2 \leq 4, \end{cases}$

解得：$\begin{cases} a \geq 0, \\ a \leq 2, \end{cases}$　$\therefore a \in [0, 2]$.

做此类题时，应先把它们正确转化为不含绝对值的不等式．

point 指导

依据题中已知的集合关系，确定集合中待定字母的取值范围，这类题目是经常出现的，解题要领是在坐标轴上画出符合题意的图，以得到各点间的关系式，而对于端点等号的取舍要单独进行讨论．

[redacted]已知集合 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$，$B = \{a - 5, 1 - a, 9\}$，$A \cap B = \{9\}$，求实数 a.

解法与解答

$\because A \cap B = \{9\}$，

$\therefore 9 \in A$.

(1)先令 $2a - 1 = 9$，得出：$a = 5$，则此时 $A = \{-4, 9, 25\}$，$B = \{0, -4, 9\}$，

则 $A \cap B = \{-4, 9\}$，与题意不符，

$\therefore a = 5$ 舍去．

(2)再令 $a^2 = 9$，得出 $a = \pm 3$.

当 $a = 3$ 时，$A = \{-4, 5, 9\}$，$B = \{-2, -2, 9\}$，集合 B 不符合集合元素的互异性特征，$\therefore a = 3$ 舍去；

当 $a = -3$ 时，$A = \{-4, -7, 9\}$，$B = \{-8, 4, 9\}$，$A \cap B = \{9\}$ 符合题意．

综上所述，$a = -3$.

point 指导 根据集合之间的关系确定出的参数值一定要代回原题检验，才能保证找出符合题意的解．

举例·5 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,\ p、x\in R\}$，且 $A\cap R^+=\phi$，求实数 p 的取值范围．

解法与解答

要满足 $A\cap R^+=\phi$，等价于 $A=\phi$，或方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有二非正根．

$\because$(1) $A=\phi\Leftrightarrow\Delta=(p+2)^2-4=p^2+4p<0$

$\Leftrightarrow -4<p<0$,

或(2) $x^2+(p+2)x+1=0$ 有二非正根

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=p^2+4p\geqslant 0,\\ x_1+x_2=-p-2<0,\\ x_1\cdot x_2=1>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}p\leqslant -4 \text{ 或 } p\geqslant 0,\\ p>-2.\end{cases}\Leftrightarrow p\geqslant 0.$$

$\therefore p\in(-4,+\infty)$.

point 指导 要使 $A\cap R^+=\phi$ 的一种情况为 $A=\phi$，这十分容易遗漏．另外对 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, p、x\in R\}$ 正确理解应是二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的全体实根，而二次方程实根的个数有三种情况：两个不等实根，两个相等实根及无实根，无实根时，即 $A=\phi$.

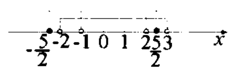
由于 $x_1\cdot x_2=1$，$\therefore x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，$\therefore x_1+x_2<0$，而不是泛泛地 $x_1+x_2\leqslant 0$.

举例·6 解不等式组：$\begin{cases}0<x^2-x-2<4,\\ |x|\geqslant\frac{5}{2}.\end{cases}$

解法与解答

原不等式组等价于 $\begin{cases}x^2-x-2<4,\\ x^2-x-2>0,\\ |x|\geqslant\frac{5}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<3\\ x<-1 \text{ 或 } x>2,\\ x\leqslant -\frac{5}{2}\text{或 } x\geqslant\frac{5}{2}.\end{cases}$$ 如下图，



$\therefore$ 不等式组的解集为 $\{x\mid\frac{5}{2}\leqslant x<3\}$.

point 指导 求不等式组的解集时，要在坐标轴上画出各不等式的解集，每个不等式的解集无论有几部分区间，都应画在同一高度，而不同不等式的解集必须用不同高度的横线区分，最后解的是几个不等式构成的不等式组，就在图上找出几条横线重合的部分，即为不等式组的解集．若没有几条横线重合之处，解集即为 ϕ. 求不等式组解集的图象法应熟练掌握．

STEP BY STEP

例题·1 用列举法表示下列集合：

(1)方程组 $\begin{cases}x-3=3\\ x+y=5\end{cases}$ 的解集．

(2)用 3 除一个自然数得到的余数的集合．

答 (1) $\{(6,-1)\}$;

(2) $\{0, 1, 2\}$.

(1)方程组解的集合表示法需特别记住，与点集类似．

(2)整除情况，余数是 0，不能遗漏这个元素．

例题·2 用描述法表示下列集合：

(1)$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$；

(2)用 3 除余 2 的自然数的集合．

答 (1)所求集合为{小于 8 的自然数}或表示为$\{x \mid x \in N, x<8\}$；

(2)所求集合为$\{x \mid x=3n+2$，n 为非负整数$\}$或表示为$\{x \mid x=3n-1, n \in N\}$.

(1)审题时，必须分清“除”与“除以”两个概念．

(2) $\because (3n+2)-(3n-1)=3$，相差 3 的正整数除以 3 的余数相同，故 $3n+2$、$3n-1(n \in N)$均符合题意．

例题·3 指出下列集合的元素：

(1)$\{ax^2+bx+c=0 \mid a \neq 0, b^2-4ac \geqslant 0\}$；

(2)$\{x \mid ax^2+bx+c=0$，$a \neq 0$ 且 $x \in R\}$；

(3)$\{x \mid y=\sqrt{1-x}\}$；

(4)$\{y \mid y=x^2+1\}$.

解 (1)元素是有实根的一元二次方程．

(2)元素是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根．

(3)元素是函数 $y=\sqrt{1-x}$ 中自变量 x 所能取到的实数，即该函数的定义域中的实数化简后为 $x \leqslant 1$ 的实数．

(4)元素是函数 $y=x^2+1$ 中函数值 y 所能取到的实数，化简得出解为 $y \geqslant 1$ 的实数．

point 指导

题(3)中集合即为函数 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域，题(4)中集合即函数 $y=x^2+1$ 的值域，请参见第 2 节，对这样的集合必须要认识清楚．

例题·4 写出下列集合的所有子集：

(1)$\{a, b\}$；

(2)$\{a, b, c\}$；

(3)$\{a, b, c, d\}$.

答 (1)此集合的子集有 4 个：ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$；

(2)此集合的子集有 8 个：ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$；

(3)此集合的子集有 16 个：ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$，$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$，$\{a, b, c, d\}$.

point 指导

n 个元素的集合全部子集个数应为 2^n.

求子集时，别忘 ϕ 与集合本身．

例题·5 判断正误：

(1)$\phi \subset \{0\}$；　(2)$\phi=0$；

(3)$0 \in \{\phi\}$；　(4)$0 \notin \phi$；

(5)$\phi \subseteq \{\phi\}$；(6)$\phi \in \{\phi\}$.

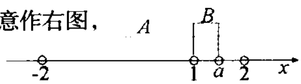
答 (1)✓；　(2)×；　(3)×；

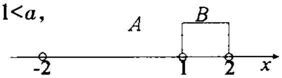
(4)✓；　(5)✓；　(6)✓.

(1) $\{\phi\}$ 表示以空集为元素的集合，把 ϕ 看成是集合时，$\phi\subseteq\{\phi\}$ 成立；把 ϕ 看成是元素时，$\phi\in\{\phi\}$ 成立；(2) 0 是元素，$\{0\}$ 是含有元素 0 的集合．

例题·6 已知集合 $A=\{x\mid |x|<2\}$，$B=\{x\mid 1<x<a\}$，且 $A\supset B$，求 a 的取值范围．

根据题意作右图，由 $1<x<a$ 的已知条件可知 $1<a$，且图中有 $1<a<2$；再若 $a=2$ 时，再见右图，满足 $A\supset B$. 综上所述，a 的取值范围是 $(1,2]$.





例题·7 填空：

(1) 已知集合 $A=\{(x,y)\mid 2x+y=4\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x-y=2\}$，则 $A\cap B=$ ______；

(2) 若 $A\subset B$，$A\subset C$，则 A ______ $B\cap C$；

(3) 集合 $A=\{$平形四边形$\}$，$B=\{$梯形$\}$，则 $A\cap B=$ ______；

(4) 若 $A\subset C$，$B\subset C$，则 $A\cup B$ ______ C，$A\cup C$ ______ $B\cup C$；

(5) $\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}=$ ______；

(6) $\{$平形四边形$\}$ ______ $\{$梯形$\}=\{$至少一组对边平行的四边形$\}$.

(1) $\{(\frac{3}{2},1)\}$；(2) $\subseteq$；(3) ϕ；(4) $\subseteq$，$=$；(5) $\{$斜三角形$\}$；(6) $\cup$.

(1) 集合 A 表示直线 $2x+y=4$ 上的点，B 表示直线 $2x-y=2$ 上的点，

$\therefore A\cap B$ 表示这两条直线的交点，

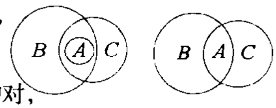
$$\therefore 由\begin{cases}2x+y=4,\\2x-y=2,\end{cases}$$

$$解得：\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=1.\end{cases}$$

$\therefore A\cap B=\{(\frac{3}{2},1)\}$.

本例关键之处是理解 $A\cap B$ 是什么；以点为元素的集合表示法要正确掌握．

(2) 如右文氏图，知 $A=B\cap C$ 或 $A\subset B\cap C$ 均对，



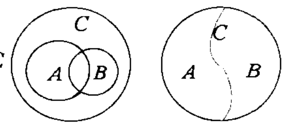
$\therefore$ 应填 $\subseteq$.

(3) 平行四边形是两组对边分别平行的四边形，梯形是一组对边平行而另一组对边不平行的四边形，

$\therefore$ 没有任何一个四边形既是平行四边形又是梯形，

$\therefore$ 应填 ϕ.

(4) 如右图可知，$A\cup B\subset C$ 与 $A\cup B=C$ 均成立，



$\therefore A\cup B\subseteq C$.

另外，$A\cup C=C$，$B\cup C=C$，

$\therefore A\cup C=B\cup C$.

$\therefore$ 应填 $\subseteq$、$=$.

(5) 应填 $\{$斜三角形$\}$；(6) 应填 $\cup$.

例题·8 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，用列举法写出 B.

由已知条件注意到 B 中元素 x 的属性是 $x\subseteq A$，

$\therefore x$ 是 A 的子集，

$\therefore B=\{\phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

认识集合记号十分重要，集合也可作为元素．

例题9 已知集合 $A=\{x\mid x=6n+1,\ n\in Z\}$，$B=\{x\mid x=6n+4,\ n\in Z\}$，$C=\{x\mid x=3n+1,\ n\in Z\}$，求 $A\cup B$ 与 C 的关系．

解1 A 中元素 $x=6n+1=3(2n)+1$，即为 3 的偶数倍多 1 的数，B 中元素 $x=6n+4=3(2n+1)+1$，即为 3 的奇数倍多1 的数，C 中元素 $x=3n+1$，即为 3 的整数倍多 1 的数，而 $A\cup B$ 也是 3 的整数倍多 1 的数，故 $A\cup B=C$.

解2 用试数法解题，即当 $n=0$，±1，±2，…时，得出 $A=\{\cdots,\ -11,\ -5,\ 1,\ 7,\ 13,\ \cdots\}$，$B=[\cdots,\ -8,\ -2,\ 4,\ 10,\ 16,\ \cdots]$，

$\therefore A\cup B=\{\cdots,\ -11,\ -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots\}$，$C=\{\cdots,\ -11,\ -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots\}$，

$\therefore A\cup B=C$.

例题10 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2+1\}$，求 $A\cup B$ 与 $A\cap B$.

解 化简 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant1\}$，$B=\{y\mid y\leqslant1\}$，它们的元素均为实数，$A$ 表示 $[-1,\ 1]$ 上实数的全体，B 表示 $(-\infty,\ 1]$ 上实数的全体，

$\therefore A\cup B=\{x\mid x\leqslant1\}$，$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant1\}$.

例题11 某班有 30 个学生，19 人会打乒乓球，16 人会打羽毛球，若每人至少会打两种球之一，求两种球都会打的有多少人？

解 设 30 个学生分只会打乒乓球的 a 人，只会打羽毛球的 b 人，两种球都会打的 c 人，根据题意可得：

$a+c=19$，$b+c=16$，$a+b+c=30$，

$\therefore c=(a+c)+(b+c)-(a+b+c)$

$=19+16-30=5$(人).

$\therefore$ 两种球都会打的有 5 人．

要学会用集合知识灵活决解相关的应用题目．

point 指导

设集合 $A=\{$会打乒乓球的人$\}$，$B=\{$会打羽毛球的人$\}$，所以，$A\cup B=\{$全班学生$\}$，$A\cap B=\{$两种球全会打的人$\}$，这四个集合所含元素的个数有如下公式：$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$，这个公式对任何集合 A、B 均成立．

例题12 设全集 $I=\{x\mid x<10,\ x\in N\}$，集合 $A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$，$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,\ 9\}$，求 A、B.

解 $I=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$，由其余已知条件知：

$2\in A$；$1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\in\bar{A}$；$2,\ 4,\ 6,\ 8\in B$；$1,\ 9\in\bar{B}$. 假设 $3\in B$，

$\because A\cap B=\{2\}$，知 $3\notin A$，

$\therefore 3\in\bar{A}$，此时 $\bar{A}\cap B=\{3,\ 4,\ 6,\ 8\}$，与已知矛盾，

故 $3\notin B$.

同理，5、$7\notin B$，

$\therefore 3$、5、$7\in\bar{B}$，

$\because \bar{A}\cap\bar{B}=\{1, 9\}$.

$\therefore 3、5、7\notin\bar{A}$,

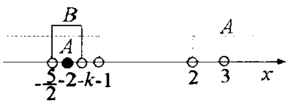
$\therefore 3、5、7\in A$.

$\therefore A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$.

本题用到“反证法”.

例题·13 已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>2$, $x\in Z\}$, $B=\{x|(2x+5)(x+k)<0, x\in Z\}$, 且 $A\cap B=\{-2\}$, 求 k 的取值范围.

解 如右图,



显然 $A\cap B=\{-2\}$,

$\therefore -2<-k<-1$.

当 $-k=-2$ 时,

$\because B=\{x|-\frac{5}{2}<x<-k=-2, x\in Z\}$,

$\therefore -2\notin B$, $A\cap B\neq\{-2\}$,

$\therefore -k\neq 2$.

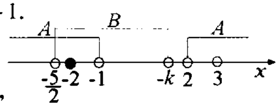
当 $-k=-1$ 时,

$\because -1\notin A$, $-1\notin B$,

$\therefore -1\notin A\cap B$, $A\cap B=\{-2\}$仍成立,

$\therefore -2<-k\leqslant -1$.

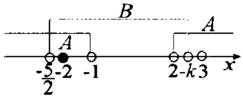
如右图,



$-1<-k\leqslant 2$ 时,

$A\cap B=\{-2\}$也成立.

如右图,



$2<-k<3$ 时,

$\because 2\notin A$,

$\therefore A\cap B=\{-2\}$仍成立,

当 $-k=3$ 时, $3\notin B$,

$\therefore A\cap B=\{-2\}$仍成立,

即 $2<-k\leqslant 3$ 可取.

综上所述, $-2<-k\leqslant 3$,

$\therefore k\in[-3, 2)$.

例题·14 已知集合 $A=\{x|x^2-6x+8<0\}$, $B=\{x|(x-a)(x-3a)<0\}$,

(1)若 $A\subset B$, 求 a 的取值范围;

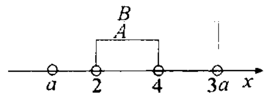
(2)若 $A\cap B=\phi$, 求 a 的取值范围;

(3)若 $A\cap B=\{x|3<x<4\}$, 求 a 的值.

解 化简集合 $A=\{x|2<x<4\}$, 而集合

$$B=\left\{x\left|\begin{matrix}a<x<3a, & a\geqslant 0\\ 3a<x<a, & a<0\end{matrix}\right.\right\},$$

(1) $\because A\subset B$, 如右图, 显然 $\begin{cases}3a>4,\\ 2>a.\end{cases}$



当 $a=2$ 时,

$3a>4$ 仍成立,

$\therefore A\subset B$ 成立, 同理, $3a=4$ 也符合题意,

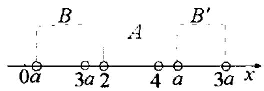
$\therefore \begin{cases}3a\geqslant 4,\\ a\leqslant 2,\end{cases}$

解得: $a\in[\frac{4}{3}, 2]$.

(2)①当 $a<0$ 时, 显然 $A\cap B=\phi$ 成立;

或② $a>0$ 时,

如右图,



B 或 B'位置均使 $A\cap B=\phi$ 成立,

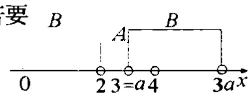
当 $3a=2$ 或 $a=4$ 时也符合题意,

$\therefore 0<3a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 4$, 即 $a\in(0, \frac{2}{3}]\cup[4, +\infty)$; ③ $a=0$ 时, $B=\{x|x^2<0\}=\phi$, 显然 $A\cap B=\phi$ 成立.

故 $a=0$ 可取.

综上所述, $a\in(-\infty, \frac{2}{3}]\cup[4, +\infty)$.

(3) $\because A=\{x|2<x<4\}$, $A\cap B=\{x|3<x<4\}$, 如右图, B 若要符合题意, 位置显然为 $a=3$,



此时 $B=\{x|3<x<9\}$,

$\therefore a=3$ 为所求.

例题·15 若函数 $y=mx^2+mx+m-2$ 的值恒为负数, 则 m 的取值范围是(　　).

(A) $m<0$ 或 $m>\frac{8}{3}$　　(B) $m<0$

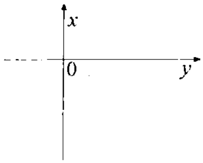
(C) $m\leqslant 0$　　(D) $m>\frac{8}{3}$

答 (C).

解 (1)当 $m=0$ 时，函数化为 $y=-2$ 恒为负数，

$\therefore m=0$ 可取 .

或(2)函数为二次函数，符合题意的情况，如右图，



$\therefore \begin{cases} m<0, \\ \Delta=m^2-4m(m-2)<0. \end{cases}$

解得: $\begin{cases} m<0, \\ 3m^2-8m>0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} m<0, \\ m<0 \text{ 或 } m>\frac{8}{3}, \end{cases}$

$\therefore m<0.$

综上所述，$m\leqslant 0$ 为所求，

应选(C).

可用排除法解题．此题中，由求出的 $m=0$ 就可把其余答案完全排除．

二次方程、二次不等式和二次函数是高中学习重点．凡二次项系数是字母的必须讨论二次项系数为 0 与不为 0 两种情况．要从开始学习起就养成良好的分类讨论意识．

例题·16 已知不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解是 $2<x<3$，求不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集．

解 $\because x^2-ax-b<0$ 的解是 $2<x<3$，

$\therefore x^2-ax-b=0$ 的两根是 $x_1=2$，$x_2=3$.

由韦达定理得: $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=-b$，

即 $a=5$，$b=-6$，

$\therefore bx^2-ax-1>0$ 为 $-6x^2-5x-1>0$，

即 $6x^2+5x+1<0$.

$\therefore \{x|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\}$ 为原不等式的解集．

LEARNING TEST ● 实力测验

KEY 见附录解答

一、选择题

1. 已知全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$M=\{3, 4, 5\}$，$N=\{1, 3, 6\}$，则集合 $\{2, 7\}$ 等于(　　).

(A) $M\cap N$　　(B) $\overline{M}\cap\overline{N}$　　(C) $\overline{M}\cup\overline{N}$　　(D) $M\cup N$

2. 对非空集合 A、B 存在关系 $A\subset B$，I 是全集，则下列集合中为空集的是(　　).

(A) $A\cap B$　　(B) $\overline{A}\cap\overline{B}$　　(C) $\overline{A}\cap B$　　(D) $A\cap\overline{B}$

3. 非空集合 P、Q、R 满足关系 $P\cup Q=Q$，$Q\cap R=Q$，则 P、R 的关系是(　　).

(A) $P=R$　　(B) $P\subseteq R$　　(C) $P\supseteq R$　　(D) $P\cap R=\phi$

4. 集合 $M=\{x|-1\leqslant x<2\}$，$N=\{x|x\leqslant a\}$，若 $M\cap N\neq\phi$，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(-\infty, 2]$　　(B) $(-1, +\infty)$

(C) $[-1, +\infty)$　　(D) $[-1, 1]$