邹一心 主编

Chu Zhong

基础篇 · 能力篇

Xi Tong Xun Lian Zhi Nan

初中数学系统训练指南

数学

上海辞书出版社

邹一心　主编

Chu Zhong

CHU XUE

Xi Tong Xun Lian Zhi Nan

初中数学系统训练指南

数学

上海辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学系统训练指南/邹一心主编.—上海:上海辞书出版社,2000

ISBN 7-5326-0740-2

Ⅰ.初… Ⅱ.邹… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 59018 号

责任编辑 朱可宁
插　　图 姜宝坤
封面设计 汪　溪

初中数学系统训练指南

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路457号 邮政编码200040)

上海辞书出版社发行所发行 上海中华印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 14.25 插页 1 字数 332000

2001年2月第1版 2001年2月第1次印刷

印数 1-5100

ISBN 7-5326-0740-2/O·30

定价: 18.00 元

主　编

邹一心　华东师范大学数学系编审

主　审

田万海　华东师范大学数学系教授

作　者

（以姓氏笔画为序）

刘汉标　上海市格致中学特级教师

刘志浩　上海市教育信息中心高级教师

许鸣岐　上海市卢湾区教育学院高级教师

孙兆桂　上海市格致中学特级教师

李世廷　上海市格致中学高级教师

夏兰娣　上海市建青实验学校高级教师

奚根荣　上海市白玉中学高级教师

编 者 的 话

本书为着眼知识、立足能力，帮助初中学生进行知识系统疏理并最后落实到能力培养的一本书.

我们知道，知识是能力的基础，能力是知识的发展；如果缺乏知识，肯定谈不上能力，但是仅有知识，也未必会有能力，当然，基础知识随着时代前进而变化.例如繁分式，仅是昨天的基础，今天已退出基础舞台；又如实验与猜想，包括计算器的使用，今天的能力，将成为明天的新基础.知识与能力，两者相辅相成.为此，本书分为两大篇.

第一篇侧重于以九个专题为知识载体，尽力揭示初中数学中的全部主要内容与相互关联.在每个专题的开头，都有提纲挈领的概括，使你对本专题的内容可以一览群山而统观全局.

第二篇侧重于以六个专题导引能力培养.其中“实验与猜想”是在“做”数学中有所发现、有所创新的源泉；“图形运动”是在处理平面几何时由“静态”到“动态”的一次观点的升华；“数形结合”是通过数形互补，使数、形相映成辉；“探索与证明”是一种发现问题、分析问题、解决问题的重要途径；“数学综合问题”是将第一篇知识篇中的专题融会贯通和有机综合；“数学应用”是数学在生产实践和日常生活中各方面的应用.

本书范例众多，以便读者择优而选，开阔视野；习题配备适量，意在以少胜多，控制题量.在习题的答案和提示中，一些较难题都作了简要的提示，以利于读者自学和减轻负担，不致使读者在练习中过多搁浅.

值得提出的是:“问题是数学的心脏”,本书的例题习题至关重要.读者切莫把它们作为小说那样轻松阅读,一看就懂,一做就错;而应独立思考,动脑动手做一遍,然后再核对答案.固然,没有模仿,何来创造;但是机械模仿,可能熟能生“呆”.

最后,要感谢田万海教授热情主审全稿,感谢上海辞书出版社对出版本书倾注了大量精力.正由于他们的大力支持,本书才得以顺利出版.

本书作者为许鸣岐(专题一、二、四)、夏兰娣(专题三、十二、十三)、李世廷(专题五、六、十四)、刘汉标(专题七)、孙兆桂(专题八、十五)、刘志浩(专题九)、奚根荣(专题十、十一).

由于水平有限,错漏之处,敬请读者赐教.

邹一心

2000.10.

目　　录

基　础　篇

能　力　篇

基础篇

一、实数与代数式

（一）实　　数

本专题内容包括：

1. 实数的概念：有理数和无理数统称为实数．有理数一定可以表示为有限小数或者无限循环小数（整数看作为小数点后为零的小数），而无限不循环小数是无理数．有理数都可以表示为分数形式，无理数则不能．

2. 数轴上的任意一点总对应着一个实数；反过来任意一个实数在数轴上总有一点对应．

3. 实数的运算性质、运算顺序和运算律是由正整数的运算性质、运算顺序和运算律逐步拓广而来的．在实数的运算中，合理地运用其运算律，可使运算简便．

4. 近似数的概念和精确度．在已知数据较大或较小时，还要运用科学记数法记数．

5. 非负实数 a，可表示为 $a \geqslant 0$．对任意实数 x，则 $|x|$、x^2、$\sqrt{x^2}$等都表示非负实数．

6. 有理数指数幂：当 n 是正整数时，a^n 是 n 个相同因式 a 的连乘积，a^0、a^{-m}、$a^{\frac{m}{n}}$则不能用相同因式 a 的连乘来解释，它们的意义是重新规定的：

$$a^0 = 1(a \neq 0)，0^0 \text{ 无意义；}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}(a \neq 0, m \text{ 是正整数})，$$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a>0, m、n$ 都是正整数, $n>1)$.

作出以上的规定后,指数就由正整数扩大到有理数范围,且正整数指数幂的运算法则仍然适用.

例 1 某股票牌价,原来每股 12.50 元,第一天涨 8.4%,第二天涨 -4.2%,这样,第二天最后的牌价是几元(精确到 0.01)?

[分析] 某股票第一天涨 8.4%,是把原牌价作为 1,第一天增加 8.4%,第二天涨 -4.2%,表示跌了 4.2%.用第一天涨后的牌价乘以(1-4.2%),可得第二天最后的牌价.

[解] 第二天的牌价是

$$\begin{aligned}&12.50\times(1+8.4\%)\times(1-4.2\%)\\&=12.9809\\&\approx 12.98(\text{元}).\end{aligned}$$

[说明] 在有理数中,通常把正数前面的"+"号省略不写,但负数前面的"-"不可漏写.在以元为单位的量中,通常计算到 0.01 元,因此本例还涉及到近似数的截取方法.

例 2 写出实数 a 的相反数、倒数和绝对值.

[分析] 用字母 a 表示一个数时,要进行分类讨论.

[解] a 的相反数是 $-a$.

当 $a\neq 0$ 时,a 的倒数是 $\frac{1}{a}$,当 $a=0$ 时,a 的倒数不存在.

当 $a>0$ 时,a 的绝对值是 a,当 $a=0$ 时,a 的绝对值是 0,当 $a<0$ 时,a 的绝对值是 $-a$.

[说明] 一个数的绝对值是这个数表示在数轴上的点到原点的距离,所以 $|a|$ 是一个非负实数,当 $a<0$ 时,$|a|=-a$,这说明 $-a$ 是一个正数.

例 3 写出小于$6\frac{1}{3}$但不小于-4的所有的偶数.

［解］ 由数轴观察到小于$6\frac{1}{3}$但不小于-4的所有偶数有

$$-4,-2,0,2,4,6.$$

［说明］ 不要把零忘记.

例 4 写出比$12\frac{3}{7}$大且比$12\frac{4}{7}$小的三个有理数.

［解］ $\because\quad 12\frac{3}{7}=12\frac{12}{28},\ 12\frac{4}{7}=12\frac{16}{28}$,

$\therefore$ 比$12\frac{12}{28}$大但比$12\frac{16}{28}$小的三个有理数如:

$$12\frac{13}{28},\ 12\frac{14}{28}=12\frac{1}{2},\ 12\frac{15}{28}.$$

［说明］ 本例答案不是唯一的.例如把分子、分母同时扩大5倍,得到$12\frac{3}{7}=12\frac{15}{35}$,$12\frac{4}{7}=12\frac{20}{35}$,则比$12\frac{3}{7}$大但比$12\frac{4}{7}$小的三个有理数可以是:$12\frac{16}{35}$,$12\frac{17}{35}$,$12\frac{18}{35}$等.如果把已知两个数分别用数轴的点表示出来以后,根据直线上任意两点之间还有无数多个点来看,可以说明任意两个不相等的有理数之间,还存在无数多个有理数,这实际上是有理数的又一个性质.

例 5 有一筐桔子,平均分给 8 人,则缺少 2 个;平均分给 7 人,仍缺少 2 个;平均分给 5 人,则余下 3 个.这筐桔子最少有多少个?

［分析］ 把这筐桔子平均分给 5 人,则余下 3 个,要是这 5 人中每人都多分 1 个,则也是缺少 2 个.这样可得到这筐桔子数最少的个数应该是 8、7、5 三个数的最小公倍数减去 2 的差.

［解］ 由 8、7、5 的最小公倍数是

$$8\times7\times5=280,$$

则这筐桔子最少的个数是

$$280-2=278(\text{个}).$$

[说明] 本例中“平均分给 5 人，则余下 3 个”，这和“平均分给 5 人，仍缺少 2 个”是同一个表述目的.

例 6 计算:

(1) $0.2-\left[1\frac{3}{4}-\left(-2\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)\right]$;

(2) $\left|3\frac{1}{3}-4\frac{5}{9}\right|-\left|\left(-3\frac{1}{6}\right)+1\frac{1}{2}\right|\times\left(-1\frac{1}{2}\right)$;

(3) $\left(\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}\right)\div\left[1+\frac{3}{14}\times\left(-1\frac{1}{6}\right)\right]+16\frac{8}{11}\div 8$.

[解] (1) $0.2-\left[1\frac{3}{4}-\left(-2\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)\right]$

$$=\frac{1}{5}-\left[1\frac{3}{4}-\left(-1\frac{1}{6}\right)-2\frac{5}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{7}{60}.$$

(2) $\left|3\frac{1}{3}-4\frac{5}{9}\right|-\left|\left(-3\frac{1}{6}\right)+1\frac{1}{2}\right|\times\left(-1\frac{1}{2}\right)$

$$=\left|-1\frac{2}{9}\right|-\left|-1\frac{7}{6}+\frac{3}{6}\right|\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=1\frac{2}{9}-\frac{5}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=1\frac{2}{9}+\frac{5}{2}$$

$$=1\frac{4}{18}+2\frac{9}{18}$$

$$=3\frac{13}{18}.$$

(3) $\left(\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}\right)\div\left[1+\frac{3}{14}\times\left(-1\frac{1}{6}\right)\right]+16\frac{8}{11}\div 8$

$$=-2\frac{1}{4}\div\left[1-\frac{3}{14}\times\frac{7}{6}\right]+\frac{184}{11}\times\frac{1}{8}$$

$$=-\frac{9}{4}\div\frac{3}{4}+\frac{23}{11}$$

$$=-3+2\frac{1}{11}$$

$$=-\frac{10}{11}.$$

[说明] 有理数的混合运算要注意其运算顺序,先乘除,后加减,在同一级运算中,谁在前面就先算谁.有括号时,先算小括号,再算中括号,最后算大括号.

例7 已知地球与太阳的距离约为150000000千米,用科学记数法表示这个数.

[分析] 对于较大的数或较小的数,在写、记及运算中都不方便,为此可用科学记数法来表示.本例是地球与太阳的距离的近似值,数值较大,可用有特殊规律的10的 n 次幂乘以某一个较小的数表示.在工程技术和科学实验中,常将较大的数记为 $a\times10^n$ 的形式(其中 $1\leqslant a\leqslant10$, n 是正整数),这就是科学记数法.

[解] 地球与太阳的距离约为150000000千米,用科学记数法表示为 1.5×10^8 千米.

[说明] 这里用科学记数法表示一个很大的数.不仅是记法上的简便,同时还可以表达这个近似数的精确度的意义.如 1.5×10^8 可表明这个数是精确到千万位上的数.如果用 1.50×10^8 表示,则表明这个数是精确到百万位上的数.

例 8 在天文学上计算星球之间的距离常以光年为单位，一光年是光在一年(365 天)内所走的距离. 光的速度是 3×10^5 千米/秒，则一光年光走的距离是多少?

[分析] 本例已知光的速度，且是用科学记数法表示的数，要求光一年走的距离，可先算出一年有多少秒，这也是一个较大的数，可按一年有 365 天，一天有 24 时，1 时有 60 分，1 分有 60 秒，计算出一年有多少秒，也用科学记数法表示，然后可算出光一年所走的距离.

[解] 光一年所走的距离是

$$\begin{aligned}&3\times10^5\times(365\times24\times60\times60)\\&=3\times10^5\times31536000\\&=3\times10^5\times3.1536\times10^7\\&=9.4608\times10^{12}(\text{千米}).\end{aligned}$$

[说明] 从本例可知用科学记数法表示一个较大的数是有一定的方便，且在两个较大的数的运算中有不少优越性. 解题过程中用到 $10^5\times10^7=10^{12}$，这是幂的运算性质之一:“同底数的幂相乘，底数不变，指数相加.”

例 9 计算:

(1) $2^3\times2^4\times2^5$;

(2) $2^6\times5^6\times10^4$;

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^5\times(-10)^4$;

(4) $(-1)^7\times27\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+(-1)^{10}$
$\times32\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4$.

[分析] 本例是关于幂的运算，在含有乘方的混合运算中，一般先算乘方，而后乘除，最后加减. 在乘法运算中可约分的要

先约分而后计算.

[解] (1) $2^3\times 2^4\times 2^5=2^{3+4+5}=2^{12}=4096.$

(2) $2^6\times 5^6\times 10^4=(2\times 5)^6\times 10^4=10^6\times 10^4$

$=10^{10}=10000000000.$

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^5\times(-10)^4$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^5\times 10^4=10^4=10000.$

(4) $(-1)^7\times 27\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+(-1)^{10}\times 32$

$\times\left(-1\frac{1}{2}\right)^5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$=3^3\times\frac{2^3}{3^3}\times\frac{1}{2^4}-2^5\times\frac{3^5}{2^5}\times\frac{1}{3^4}$

$=\frac{1}{2}-3$

$=-2\frac{1}{2}.$

[说明] 在幂的运算中,应熟练地掌握幂的运算法则,即 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(b\neq 0)$, $(ab)^n=a^nb^n$ 等.这些法则,不仅顺向运算成立,逆向运算同样成立.在负数为底数的幂的运算中可先决定结果的符号而后再算.数字较大时,可保留幂的形式.

例 10 计算:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{2}-1)^0$$
$$-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}+[(-3)^2]^{\frac{1}{4}}-2^{-2}.$$

[分析] 本例是有理数为指数的幂的计算题.对负指数幂,

可以把底数的分子、分母颠倒后,指数改为正指数后计算.这样,$2^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,$\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$.指数是零,只要底数不等于零,它的零次幂的值为1.对正分数指数,可按指数的分子对底数进行乘方计算,再按指数的分母对其进行开方计算.这样 $27^{\frac{2}{3}}=[(3^3)^2]^{\frac{1}{3}}=(3^6)^{\frac{1}{3}}=3^2$.实际上,这里也即使用了法则 $(a^n)^m=a^{nm}$.计算过程中应注意各个数的符号.

[解]
$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+(\sqrt{2}-1)^0\\&\quad-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}+[(-3)^2]^{\frac{1}{4}}-2^{-2}\\&=-\frac{1}{8}+\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(3^3)^{\frac{2}{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+9^{\frac{1}{4}}\\&\quad-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}-9+1-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{3}-\frac{1}{4}\\&=-6\frac{7}{8}-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

习　题

1. 某地上星期日的最高气温是 -3℃, 最低气温是 -12.5℃.这星期日的最高气温是4℃,最低气温是 -8℃.求:

(1) 上星期日的最高气温比最低气温高多少?

(2) 这星期日的最高气温比最低气温高多少?

(3) 上星期日的最高气温比这星期日的最高气温高多少?

(4) 上星期日的最低气温比这星期日的最低气温低多少?

2.（1）写出小于$\frac{1}{2}$且大于$\frac{1}{3}$的三个不相等的有理数；

（2）写出大于$-2\frac{2}{3}$但不大于$-2\frac{2}{7}$的五个不相等的有理数；

（3）写出大于$-4\frac{1}{2}$的所有非正整数.

3. 有一堆苹果，三个三个地数余 2，五个五个地数余 4，七个七个地数余 6. 这堆苹果最少有多少个？

4. 三段铁丝分别长为$5\frac{1}{4}$米，$4\frac{2}{3}$米，$3\frac{1}{2}$米，现要把它们截成相同长度的铁丝，那么截得铁丝最小段数有多少？

5. 一个边长为 7 厘米的立方体，每立方厘米的重量是 7 克，求这个立方体的重量时，把它写成幂的形式，则这幂的底数是多少？指数是多少？怎样读法？这幂的值是多少？

6. 卫星绕地球运动的速度是7.9×10^3米/秒，求卫星绕地球运行

（1）一星期所走过的路程；

（2）一年所走过的路程.

7. 一个大正方形的面积是 169 厘米^2，另一个小正方形的面积比它小 25 厘米^2. 那么这大正方形的边长比小正方形的边长大多少？

8. 判断下列各题：

（1）无限小数都是无理数；

（2）在实数中没有绝对值最小的数；

（3）两个实数相加所得的和不一定是实数；

（4）如果$\sqrt{-a}$是有理数，则$a\leqslant0$，且$-a$是一个完全平方数；

（5）数轴上所有的点不一定表示实数；