

小学数学活动课丛书

我+数学=聪明

顾汝佐 周家明 主编

六年级



文匯出版社

小学数学活动课丛书

我+数学=聪明

顾汝佐 周家明 主编

六年级



文 匯 出 版 社

责任编辑:朱志鹏

封面装帧:周夏萍

插图:汪天忠

《小学数学活动课》丛书

我+数学=聪明

· 六年级 ·

主编 顾汝佐 周家明

文匯出版社出版发行

(上海市虎丘路 50 号 邮政编码 200002)

全国新华书店经销

复旦大学印刷厂印刷

1999 年 10 月第 11 次印刷

印数:133101-138201

开本:787×1092 1/32

字数:131000

印张:5.875

ISBN7-80531-278-8/G·177

定价:6.00 元

编者的话

为了适应一九九三年开始的中小学课程教材改革,由三个板块构成的课程结构(必修课、选修课和活动课)的需要,促进课堂教学,充实数学兴趣活动的内容,丰富学生课余生活,给学生更大的自由度以发展自己,陶冶情操;为了开扩学生学习数学的视野,激发学生学习数学的兴趣,学会一些基本的数学思想和数学方法,特编写了这套小学数学活动课丛书,书名为《我+数学=聪明》。

本书从学生的知识基础出发,着眼于培养学生灵活运用知识的能力。注意寓理于例,重在思维训练。力求以浅近易懂的内容,活泼多样的形式,渗透对应、函数、概率和集合等数学的基本思想。

本书按年级分段,每个年级一本,全套共6本。考虑到学校实际开展活动的需要,每一个年级分两个学期,每一学期安排16讲左右。每六、七讲后都配有一个小竞赛,以便及时复习、检查和巩固。每一讲都安排了一定数量的由浅入深的例题,例题力求深入浅出,思考过程剖析详尽。每一讲后都编有“做一做”,通过学生动手画画、摆摆、贴贴、剪剪、拼拼、量量、数数、算算,重点学会怎样思考。每本书后都附有“做一做”的详尽解答,不仅提供了正确答案,而且还告诉学生怎样去获取正确的答案,从而起到帮助学生活跃思维、举一反三、提高解题能力的作用。通过本书的学习,学生必将学有所得,受到启发。

本书每一讲的内容大致可用于一次活动课。考虑到学生实际接受能力的差异,教师或家长选用本书辅导学生时,每一讲后的“做一做”可根据实际情况选用其中的部分内容或全部内容。

本书由顾汝佐、周家明主编。参加编写的有:朱正礼(一年级)、唐美玲(二年级)、朱忠民(三年级)、杭顺清(四年级)、黄玉鸣、冯福源(五年级)、管南雄、徐向颖(六年级)。

在编写过程中,得到金正扬、宋旭辉两位同志的协助与指导,特此致谢!

由于编写时间紧促,限于水平,难免有疏漏与错误之处,谨请广大读者指正。

编者

目 录

六年级第一学期

一、谁当大哥哥	(1)
二、巧攻城堡	(6)
三、排起队来的分数	(13)
四、小高斯的求和方法	(18)
五、埃及分数的奥妙	(23)
六、周而复始	(30)
七、一个萝卜一个坑	(34)
数学小竞赛(一)	(38)
八、变化无穷的行程问题	(40)
九、巧妙的解法	(45)
十、有趣的古算题	(50)
十一、钟面的学问	(56)
十二、钞票生出了钞票	(59)
十三、千姿百态的图形	(64)
十四、组合图形的特殊解法	(73)
数学小竞赛(二)	(83)
附:参考答案	(85)

六年级第二学期

一、“搭积木”后的计算	(97)
-------------------	------

二、酒瓶里的葡萄酒·····	(102)
三、蜘蛛寻路·····	(107)
四、将军饮马·····	(114)
五、宝塔尖顶上的灯·····	(120)
六、自行车上的齿轮·····	(124)
七、奇怪的方程·····	(128)
数学小竞赛(一)·····	(131)
八、哥尼斯堡的七座桥·····	(133)
九、一加一等于几? ·····	(141)
十、田忌赛马·····	(145)
十一、排列的学问·····	(149)
十二、多出来的纪念品·····	(152)
十三、究竟姓什么? ·····	(156)
十四、鸽子与鸽笼·····	(161)
数学小竞赛(二)·····	(164)
附:参考答案 ·····	(166)

六年级第一学期

一、谁当大哥哥

$A = \frac{777775}{777776}$ 、 $B = \frac{888887}{888889}$ 、 $C = \frac{999991}{999994}$ ，三个数中哪个最大？哪个是老二？……这里，需要比较分数大小的学问。两个分数比大小，通常的方法是先通分，变异分母分数为同分母分数，再比大小；也有较巧妙的方法，根据题目的特点，采用不同的技巧。 A 、 B 、 C 三个数哪个当大哥？这里暂且不去研究，待我们掌握了这些方法之后，再回过去琢磨，加以解决。

▲ 比较 $\frac{8}{15}$ 和 $\frac{9}{24}$ 的大小。

根据分数的基本性质， $\frac{8}{15} = \frac{64}{120}$ ， $\frac{9}{24} = \frac{45}{120}$ 。同分母分数比大小，分子大的分数值大。因此， $\frac{64}{120} > \frac{45}{120}$ ，即 $\frac{8}{15} > \frac{9}{24}$ 。这是通分母比大小。

通分子比大小可不可以呢？也是可以的。根据分数的基本性质， $\frac{8}{15} = \frac{72}{135}$ ， $\frac{9}{24} = \frac{72}{192}$ 。同分子分数比大小，分母大的分数值反而小。因此， $\frac{72}{192} < \frac{72}{135}$ ，即 $\frac{9}{24} < \frac{8}{15}$ 。

另外，还可以将分子、分母交叉相乘，看积较大的是哪个数的分子做因数得到的，哪个分数值就大。 $15 \times 9 = 135$ ， $24 \times 8 = 192$ ， $192 > 135$ ；因此， $\frac{8}{15} > \frac{9}{24}$ 。这里，运用了对角相乘的方法比较分数的大小。

▲ 找出一个比 $\frac{4}{5}$ 大,比 $\frac{5}{6}$ 小的分数。

可以用小数的方法,找出一个 $\frac{4.5}{5.5}$;然后把分子、分母扩大10倍,变成 $\frac{45}{55}$,再约分成 $\frac{9}{11}$ 。 $\frac{9}{11}$ 就是要找的一个比 $\frac{4}{5}$ 大,而比 $\frac{5}{6}$ 小的分数。(符合条件的分数有无数个。)

或者先把 $\frac{4}{5}$ 与 $\frac{5}{6}$ 通分,分别得到 $\frac{24}{30}$ 和 $\frac{25}{30}$,然后把这两个分数的分子、分母扩大两倍,分别成为 $\frac{48}{60}$ 和 $\frac{50}{60}$,于是可找到一个中间数 $\frac{49}{60}$ 。

另外,把两个分数的分子、分母分别相加,得到一个新分数。这个新分数叫加成分数。加成分数的值,总是在它的两个母分数之间。根据这个道理, $\frac{4+5}{5+6} = \frac{9}{11}$ 。这个 $\frac{9}{11}$ 就是大于 $\frac{4}{5}$ 而小于 $\frac{5}{6}$ 的一个分数。

▲ 把下列分数用“<”号连接起来: $\frac{10}{17}$ 、 $\frac{12}{19}$ 、 $\frac{15}{23}$ 、 $\frac{20}{33}$ 、 $\frac{60}{37}$ 。

这五个分数的分母都不相同,要通分变成同分母的分数比较麻烦。但60正好是10、12、15、20四个数的公倍数,可运用通分子比大小的方法,把这五个分数化成分子都是60的分数: $\frac{10}{17} = \frac{60}{102}$, $\frac{12}{19} = \frac{60}{95}$, $\frac{15}{23} = \frac{60}{92}$, $\frac{20}{33} = \frac{60}{99}$, $\frac{60}{37}$ 。可见, $\frac{60}{102} < \frac{60}{99} < \frac{60}{95} < \frac{60}{92} < \frac{60}{37}$;也就是, $\frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23} < \frac{60}{37}$ 。

▲ 比较 $\frac{22222221}{22222223}$ 与 $\frac{33333331}{33333334}$ 的大小。

这道题目可以用对角相乘的方法进行比较： $22222221 \times 33333334 = 22222221 \times (33333331 + 3) = 22222221 \times 33333331 + 22222221 \times 3$ ，而 $22222223 \times 33333331 = (22222221 + 2) \times 33333331 = 22222221 \times 33333331 + 33333331 \times 2$ 。两个算式中的前一个加数相同，都是 22222221×33333331 ；而后一个加数一个算式是 $22222221 \times 3 = 66666663$ ，另一个算式是 $33333331 \times 2 = 66666662$ 。显然， $66666663 > 66666662$ ；也就是， $22222221 \times 3 > 33333331 \times 2$ 。根据一个加数相同，另一个加数大的和也大的道理，便有 $22222221 \times 33333334 > 22222223 \times 33333331$ 。因此， $\frac{22222221}{22222223} > \frac{33333331}{33333334}$ 。

另外，还可以用被减数与差的关系比大小： $1 - \frac{22222221}{22222223} = \frac{2}{22222223}$ ， $1 - \frac{33333331}{33333334} = \frac{3}{33333334}$ ； $\frac{2}{22222223} = \frac{6}{66666669}$ ， $\frac{3}{33333334} = \frac{6}{66666668}$ 。显然， $\frac{6}{66666668} > \frac{6}{66666669}$ ；也就是， $\frac{3}{33333334} > \frac{2}{22222223}$ 。因为被减数一定，差小的减数反而大；所以， $\frac{22222221}{22222223} > \frac{33333331}{33333334}$ 。

▲ 把 $\frac{197}{198}$ 、 $\frac{1987}{1988}$ 、 $\frac{987}{988}$ 、 $\frac{18}{19}$ 四个分数按照由小到大的顺序排列出来。

这四个分数的特点是分子比分母小 1。因为 $1 - \frac{1987}{1988} =$

$\frac{1}{1988}, 1 - \frac{987}{988} = \frac{1}{988}, 1 - \frac{197}{198} = \frac{1}{198}, 1 - \frac{18}{19} = \frac{1}{19}$, 而 $\frac{1}{19} > \frac{1}{198} > \frac{1}{988} > \frac{1}{1988}$ 。根据被减数一定, 差大的减数反而小; 所以按照由小到大的顺序排列, 应该为 $\frac{18}{19}, \frac{197}{198}, \frac{987}{988}, \frac{1987}{1988}$ 。

▲ 如果 $A = \frac{1111111110}{222222221}, B = \frac{444444443}{888888887}$; 那么, A 与 B 比, 哪个大?

可以取倒数进行比较: $\frac{1}{A} = \frac{222222221}{1111111110} = 2 \frac{1}{1111111110}, \frac{1}{B} = \frac{888888887}{444444443} = 2 \frac{1}{444444443}$ 。显然, $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 。根据倒数大的原数反而小的道理, 可得 $B > A$ 。

▲ 比较 $\frac{123456789}{234567891}$ 与 $\frac{123456789-1992}{234567891-1992}$ 的大小。

比较分数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a-k}{b-k}$ 的大小 (k 是小于 a, b 的自然数), $a \times (b-k) = a \times b - a \times k, b \times (a-k) = b \times a - b \times k$, 两个算式的被减数都是 $a \times b$, 两个减数分别为 $a \times k$ 与 $b \times k$ 。有两种情况: 当 $a > b$ 时, $a \times k > b \times k$, 差 $a \times b - b \times k > a \times b - a \times k$, 便有 $\frac{a}{b} < \frac{a-k}{b-k}$; 当 $a < b$ 时, $a \times k < b \times k$, 差 $a \times b - b \times k < a \times b - a \times k$, 便有 $\frac{a}{b} > \frac{a-k}{b-k}$ 。原题中, $123456789 < 234567891$; 因此, $\frac{123456789}{234567891} > \frac{123456789-1992}{234567891-1992}$ 。同样道理, 比较 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+k}{b+k}$ 的大小, 也有两种情况: 当 $a > b$ 时, $\frac{a}{b} > \frac{a+k}{b+k}$; 当 $a < b$

时, $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$ 。

做一做:

1. 比较下列各组分数的大小。

$$\frac{7}{10} \text{ 和 } \frac{8}{11} \quad \frac{20}{21} \text{ 和 } \frac{17}{18} \quad \frac{7}{15} \text{ 和 } \frac{9}{14}$$

2. 在括号里填上适当的分数。

$$\frac{5}{9} < () < \frac{6}{9} \quad \frac{1}{5} > () > \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{13} < () < () < \frac{9}{11}$$

3. 把下列各分数按从小到大的顺序排列起来: $\frac{4}{5}, \frac{8}{9},$

$$\frac{10}{13}, \frac{20}{33}, \frac{40}{37}, \frac{80}{39}。$$

4. 用“>”号把下列分数连接起来:

$$\frac{13}{24}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}。$$

5. 比较 $\frac{8888887}{8888889}$ 、 $\frac{9999991}{9999994}$ 与 $\frac{777775}{777776}$ 三个数的大小。

6. $\frac{34331279}{34331281}$ 与 $\frac{51496919}{51496922}$, 谁大?

7. $\frac{34331279}{51496919}$ 与 $\frac{34331281}{51496922}$, 谁大?

8. 比较 $\frac{654321}{543216}$ 与 $\frac{654321-72}{543216-72}$ 的大小。

9. 比较 $\frac{987654321}{876543219}$ 与 $\frac{987654321+1992}{876543219+1992}$ 的大小。

10. $\frac{12345}{54321}$ 与 $\frac{12337}{54313}$ 哪个大?

二、巧攻城堡

在电影里,常常看到一方要攻打另一方的城堡(或碉堡),正面硬攻,伤亡惨重,久攻不下。这时如果改变一下战术,采取迂迴的方式,巧妙地把城堡(或碉堡)攻下来了。同样道理,有些分数题目一步一步硬算下去,麻烦极了;而且容易算错。如果认真动动脑筋,找找规律,运用巧妙的方法,就觉得难而有趣了。

▲ 计算 $57 \times \frac{55}{56}$ 。

将其中的 57 拆成 $56+1$,再运用乘法分配律进行计算。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (56+1) \times \frac{55}{56} \\ &= 56 \times \frac{55}{56} + 1 \times \frac{55}{56} \\ &= 55 \frac{55}{56};\end{aligned}$$

▲ 计算: $\left(16 \frac{7}{8} \div 1.6875 + 2 \frac{1}{5}\right) \times \frac{10}{61}$ 。

把 $16 \frac{7}{8}$ 化成有限小数 16.875,不难发现 16.875 是 1.6875 的 10 倍。

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(16.875 \div 1.6875 + 2 \frac{1}{5}\right) \times \frac{10}{61} \\ &= \left(10 + 2 \frac{1}{5}\right) \times \frac{10}{61} \\ &= 12 \frac{1}{5} \times \frac{10}{61}\end{aligned}$$

$$= \frac{61}{5} \times \frac{10}{61}$$

$$= 2。$$

▲ 计算 $1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} - \cdots - \frac{1}{1000000000}。$

将分数逐一化成小数计算。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 - (0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots \\ &\quad + 0.000000001) \end{aligned}$$

$$= 1 - 0.111111111$$

$$= 0.888888889。$$

▲ 计算 $\frac{382+498 \times 381}{382 \times 498 - 116}。$

设法应用乘法分配律,使运算简便。

$$\text{原式} = \frac{382+498 \times 381}{(381+1) \times 498 - 116}$$

$$= \frac{382+498 \times 381}{381 \times 498 + 498 - 116}$$

$$= \frac{498 \times 381 + 382}{498 \times 381 + 382}$$

$$= 1。$$

▲ 计算 $\frac{121121121121}{2121212121} \times \frac{121212121212}{212212212212}$

分子部份: $121121121121 = 121 \times 1001001001$ 、
 $121212121212 = 12 \times 10101010101$, 分母部份 2121212121
 $= 21 \times 10101010101$ 、 $212212212212 = 212 \times 1001001001$; 于是
 分子与分母可以约分,运算就简便了。

$$\text{原式} = \frac{1001001001 \times 121}{10101010101 \times 21} \times \frac{10101010101 \times 112}{1001001001 \times 212}$$

$$= \frac{121 \times 12}{21 \times 212}$$

$$= \frac{121}{371}。$$

▲ 计算

$$\left(1 - \frac{1}{2 \times 2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3 \times 3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{10 \times 10}\right)。$$

先将各括号里式子计算出来,然后一起约分。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \frac{24}{25} \times \frac{35}{36} \\ &\quad \times \frac{48}{49} \times \frac{63}{64} \times \frac{80}{81} \times \frac{99}{100} \\ &= \frac{11}{20}。 \end{aligned}$$

▲ 计算

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{88888888 \times 88888888}。$$

先把分子部分凑成一个一个“8”: $1+7=8, 2+6=8, 3+5=8, \dots$, 共有 8 个 8, 即 8×8 ; 然后与分母进行约分, 得

$$\frac{1}{11111111 \times 11111111}。$$

因为,

$$\begin{array}{ll} 111 \times 111 = 12321 & 1111 \times 1111 = 1234321 \\ \text{(6 个数字)} \quad \text{(5 位数)} & \text{(8 个数字)} \quad \text{(7 位数)} \end{array}, \dots;$$

所以,

$$\begin{array}{ll} 11111111 \times 11111111 = 123456787654321 \\ \text{(16 个数字)} & \text{(15 位数)} \end{array}。$$

这样,能很巧妙地算出原式的结果:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{8+8+8+8+8+8+8+8}{88888888 \times 88888888} \\ &= \frac{8 \times 8}{88888888 \times 88888888} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{11111111 \times 11111111}$$

$$= \frac{1}{123456787654321}。$$

▲ 化简 $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$ 。

像这样一层一层又一层的繁分数，叫连分数。连分数可以化简，方法是从最下面一层开始化简。先计算 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，然后“倒一倒”，变成 $\frac{2}{3}$ ，化去最下面一层；再逐层这样化简上去。

$$\text{原式} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{8}{13}。$$

▲ 化简 $2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{18 + \frac{1}{2}}}}}}}$ 。

$$\text{原式} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{37}}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{37}{39}}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{39}{115}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{115}{154}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{2 + \frac{154}{423}}$$