修订版

金牌奥校

北京市西城区数学学会 编

数学奥林匹克教程

初中二年级

中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克教程

（初中二年级）

北京市西城区数学学会　编

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥校:初中数学二年级/李松文等编 . - 北京:中国少年儿童出版社,1998.6

ISBN 7 - 5007 - 4243 - 6

Ⅰ. 金… Ⅱ. 李… Ⅲ. 数学课 - 初中 - 习题 Ⅳ. G623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12536 号

本册编著:李松文　郑　康　张鸿菊
李家智　陈　娴

金牌奥校——数学奥林匹克教程

初中二年级

*

中国少年儿童出版社 出版发行

北京泽明印刷有限责任公司 新华书店经销

*

850×1168　1/32　印张:8.875　字数:202 千字

本次印数:10000 册

2000 年 11 月第 3 版　2001 年 8 月第 4 次印刷

ISBN 7 - 5007 - 4243 - 6/G·3010　定价:12.80 元

凡有印装问题,可向承印厂调换

前　言

在推进数学素质教育的过程中，开拓第二课堂的工作已受到普遍重视，组织数学竞赛活动是推动这项工作的重要一环.

为使初中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力，推动数学奥林匹克活动的开展，多年来，北京市西城区广泛开展了初中数学竞赛辅导讲座活动，并取得了较好的成绩.

为提高竞赛辅导讲座的质量，我们组织多年从事讲课辅导的教练员，编写了《金牌奥校——数学奥林匹克教程》一书，分一、二、三册，供初中三个年级使用.全书基本上概括了初中数学的重要基础知识，基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳，特别着重对数学思维能力、数学思想方法和解题方法、解题能力的训练.

对书中每个专题，都分四个步骤来展开：一、概述知识要点；二、选择典型题目进行解题思路的分析和揭示解题规律；三、综合练习；四、参考解答.这样可使读者了解竞赛的要求，提高分析问题和解决问题的能力，掌握驾驭知识的主动权，从而为参加竞赛活动打下良好的基础.

参加本书编写工作的有赵一西、陈娴、金宝铮、王永俊、张鸿菊、李松文、郑廉、李冰、郑康、李家智、高雪松等同志.

编　者

目　　录

第一讲　因式分解

一般来说,把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做多项式的因式分解.由于本讲涉及内容较多,为便于阅读和讲解,将该讲内容分为以下四节,即几种常用的因式分解方法;用待定系数法分解因式;用综合除法分解因式;对称式的因式分解.

§1　几种常用的因式分解方法

一、内容提要

1. **提取公因式法**
2. **分组分解法**
3. **应用公式法**.常用的公式有:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \tag{1}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \tag{2}$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \tag{3}$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \tag{4}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2 \tag{5}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{6}$$

公式(5)证明如下:

$$\begin{aligned}&a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\\ =\ &(a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2\end{aligned}$$

$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

$= (a+b+c)^2$

公式(6)证明如下:

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc \\
&= [(a+b)^3+c^3]-(3a^2b+3ab^2+3abc) \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab] \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

在特殊情况下,当 $a+b+c=0$ 时,就有

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

于是,$a^3+b^3+c^3=3abc$ (7)

这就是说,如果三个整式的和为零,那么这三个整式的立方和等于这三个整式乘积的三倍.

4. 十字相乘法

(1)有二次三项式 x^2+px+q,如果常数 q 能分解成两个因数 a、b 的积,并使 $a+b=p$,则有

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

(2)有二次三项式 ax^2+bx+c,如果二次项系数 a 分解成两个因数 a_1 和 a_2,常数项 c 分解成两个因数 b_1 和 b_2,并且使 $a_1b_2+a_2b_1=b$,则有

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2 \\
&= (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)
\end{aligned}$$

(3)二元二次多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 的因式分解.

设 $F=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \\
\text{则 } F &= [(a_1x + b_1y) + c_1][(a_2x + b_2y) + c_2] \\
&= (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) + c_1(a_2x + b_2y) \\
&\qquad + c_2(a_1x + b_1y) + c_1c_2
\end{aligned}
$$

可以看出，a_1, a_2, b_1, b_2，是由 $ax^2 + bxy + cy^2$ 确定的，这样可对 $ax^2 + bxy + cy^2$ 先进行因式分解，再把 f 分解成因数 c_1 和 c_2. 如果

$$c_1(a_2x + b_2y) + c_2(a_1x + b_1y) = dx + ey$$

则 F 就可分解成两个一次因式 $a_1x + b_1y + c_1$ 和 $a_2x + b_2y + c_2$ 之积. 这种分解方法可视为双十字相乘法.

对一个较复杂的多项式进行因式分解时，经常要综合运用以上方法，有时需要拆项和增减项，但在拆项和增减项时，要注意和原来的多项式保持相等.

二、范　例

例 1　把 $a^4 + 3a^3 + 3a^2 + 2a$ 分解因式.

解:

$$
\begin{aligned}
&a^4 + 3a^3 + 3a^2 + 2a \\
&= a(a^3 + 3a^2 + 3a + 2) \\
&= a[(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 1] \\
&= a[(a + 1)^3 + 1^3] \\
&= a[(a + 1) + 1][(a + 1)^2 - (a + 1) + 1] \\
&= a(a + 2)(a^2 + a + 1)
\end{aligned}
$$

例 2　把 $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ 分解因式.

解: 由于 $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$，应用上述公式(7)，则有

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

例 3 把 $6x-6y-9x^2+18xy-9y^2-1$ 分解因式.

解法一: $6x-6y-9x^2+18xy-9y^2-1$

$$=6(x-y)-9(x^2-2xy+y^2)-1$$
$$=6(x-y)-9(x-y)^2-1$$
$$=-[9(x-y)^2-6(x-y)+1]$$
$$=-[3(x-y)-1]^2$$
$$=-(3x-3y-1)^2$$

解法二: 利用公式(5)

$$6x-6y-9x^2+18xy-9y^2-1$$
$$=-(9x^2+9y^2+1-18xy-6x+6y)$$
$$=-[(3x)^2+(-3y)^2+(-1)^2+2(3x)\cdot(-3y)+2(3x)\cdot(-1)+2(-3y)\cdot(-1)]$$
$$=-(3x-3y-1)^2$$

例 4 把 $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ 分解因式.

解法一: $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$

$$=(x^4+2x^2+1)+(2x^3+2x)$$
$$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)$$
$$=(x^2+1)(x^2+1+2x)$$
$$=(x^2+1)(x+1)^2$$

解法二: 把 $2x^2$ 拆成 x^2+x^2,再分组,于是

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$$
$$=(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)$$
$$=x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)$$
$$=(x^2+2x+1)(x^2+1)$$
$$=(x+1)^2(x^2+1)$$

例 5 把 $x^3+6x^2+11x+6$ 分解因式.

解法一：把 $6x^2$ 拆成 $3x^2+3x^2$，于是

$$
\begin{aligned}
&x^3+6x^2+11x+6\\
&=(x^3+3x^2)+(3x^2+11x+6)\\
&=x^2(x+3)+(x+3)(3x+2)\\
&=(x+3)(x^2+3x+2)\\
&=(x+3)(x+2)(x+1)
\end{aligned}
$$

解法二：把 $6x^2$ 拆成 $3x^2+3x^2$，并把 $11x$ 拆成 $9x+2x$，于是

$$
\begin{aligned}
&x^3+6x^2+11x+6\\
&=(x^3+3x^2)+(3x^2+9x)+(2x+6)\\
&=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)\\
&=(x+3)(x^2+3x+2)\\
&=(x+3)(x+2)(x+1)
\end{aligned}
$$

思考：读者是否还可用其它拆项分组解法.

例 6 把 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$ 分解因式

解法一：$\because \quad 2x^2+xy-y^2=(2x-y)(x+y)$

$$
\begin{array}{c}
2x-y \qquad +2\\
\times\\
x+y \qquad -3\\
\hline
-3(2x-y)+2(x+y)=-4x+5y
\end{array}
$$

$\therefore \quad 2x^2+xy-y^2-4x+5y-6=(2x-y+2)(x+y-3)$

解法二：把原多项式按 x 降幂排列进行分解.

$$
\begin{aligned}
&2x^2+xy-y^2-4x+5y-6\\
&=2x^2+(y-4)x-(y^2-5y+6)\\
&=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
2x \qquad -(y-2)\\
\times\\
x \qquad (y-3)\\
\hline
2x(y-3)+x[-(y-2)]=xy-4x=(y-4)x
\end{array}
$$

$\therefore\quad 2x^2+xy-y^2-4x+5y-6=(2x-y+2)(x+y-3)$

例 7 把 $x^4+y^4+(x+y)^4$ 分解因式

解法一： 对 x^4+y^4 配平方，然后进行分组分解.

$$
\begin{aligned}
&x^4+y^4+(x+y)^4\\
=&(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
=&[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]+[(x+y)^4-x^2y^2]\\
=&(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)+\\
&[(x+y)^2+xy][(x+y)^2-xy]\\
=&(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)+\\
&(x^2+3xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\\
=&(x^2+xy+y^2)(2x^2+2xy+2y^2)\\
=&2(x^2+xy+y^2)^2
\end{aligned}
$$

解法二： 先对 x^4+y^4 配方，再对其中 x^2+y^2 配方，然后与 $(x+y)^4$ 结合，运用公式分解.

$$
\begin{aligned}
&x^4+y^4+(x+y)^4\\
=&(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
=&[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
=&(x+y)^4-4xy(x+y)^2+4x^2y^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
=&2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2]\\
=&2[(x+y)^2-xy]^2\\
=&2(x^2+xy+y^2)^2
\end{aligned}
$$

例 8 把 $(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$ 分解因式.

解法一： $(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

$$
\begin{aligned}
=&(a+2b+c)^3-[(a+b)^3+(b+c)^3]\\
=&(a+2b+c)^3-(a+2b+c)[(a+b)^2-\\
&(a+b)(b+c)+(b+c)^2]\\
=&(a+2b+c)[(a+2b+c)^2-(a+b)^2+
\end{aligned}
$$

$(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)[(2a+3b+c)(b+c)+$

$(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)(b+c)(2a+3b+c+a+b-b$

$-c)^2$

$=3(a+2b+c)(b+c)(a+b)$

解法二: 利用公式(7),原式可写成

$$(a+2b+c)^3+[-(a+b)]^3+[-(b+c)]^3$$

由于 $(a+2b+c)+[-(a+b)]+[-(b+c)]=0$

则原式 $=3(a+2b+c)[-(a+b)][-(b+c)]$

$=3(a+2b+c)(a+b)(b+c)$

解法三: 利用"代换"方法分解.

设 $a+b=A$, $b+c=B$, 则 $a+2b+c=A+B$

于是,原式 $=(A+B)^3-A^3-B^3$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3-A^3-B^3$

$=3A^2B+3AB^2$

$=3AB(A+B)$

$=3(a+b)(b+c)(a+2b+c)$

说明:上面三种解法,显然解法二、三较为简便.在因式分解时灵活运用公式,对原式进行"代换"是很重要的.

例 9 化简: $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(\underbrace{111\cdots1}_{3n个}-\underbrace{333\cdots3}_{n个}\underbrace{000\cdots0}_{n个})}$.

解: $\because$ $\frac{1}{3}(\underbrace{111\cdots1}_{3n个}-\underbrace{333\cdots3}_{n个}\underbrace{000\cdots0}_{n个})$

$=\frac{1}{3}(\frac{10^{3n}-1}{9}-3\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}+3\cdot\frac{10^n-1}{9})$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(10^{3n}-3\cdot10^{2n}+3\cdot10^n-1)$

$$=\frac{1}{27}(10^n-1)^3$$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt[3]{\frac{1}{27}(10^n-1)^3}=\frac{1}{3}(10^n-1)$

$$=\underbrace{333\cdots3}_{n个}.$$

例 10 已知三角形的三边 a、b、c 适合等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$,证明这个三角形是等边三角形.

证:已知 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

即 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\because$ $a+b+c\neq0$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

则 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$\therefore$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

又 $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$ 都是非负数,故

$(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$

$\therefore$ $a=b=c$,此三角形为等边三角形.

三、综合练习

分解因式:

1. $x^3+ax^2+bx^2+cx^2+abx+bcx+acx+abc$.
2. $x^4-x^3y+4x^2y^2-3xy^3+3y^4$.
3. $x^4+8x^2(x+1)+16(x+1)^2$.
4. $x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$.
5. $(a^2+ab+b^2)^2+4ab(a+b)^2$.
6. x^3-3x^2+4.

7. $(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2$.

8. $x^4-x^2(a^2+1)+a^2$.

9. $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2$.

10. $x^2+y^2-x^2y^2-4xy-1$.

11. $4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$.

12. $x^2+2xy-8y^2+2zx+14yz-3z^2$.

13. $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

14. $(x+y)^4+(x^2-y^2)^2+(x-y)^4$.

15. 化简：$\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}$.

四、参考答案

1. $(x+a)(x+b)(x+c)$.

2. 把 $4x^2y^2$ 拆成 $x^2y^2+3x^2y^2$，然后利用分组分解. $(x^2-xy+y^2)(x^2+3y^2)$.

3. 变为完全平方公式，得 $(x+2)^4$.

4. 分组分解，$(x-1)^3(x+1)^2(x^2+1)$.

5. 展开、整理，并利用公式(5)，得 $(a^2+b^2+3ab)^2$.

6. $(x+1)(x-2)^2$.

7. 利用十字相乘法，得 $(ax+bx+a-b)(ax-bx-a-b)$.

8. 利用十字相乘法，得

$$\begin{aligned}&x^4-x^2(a^2+1)+a^2\\=&(x^2-1)(x^2-a^2)\\=&(x+1)(x-1)(x+a)(x-a).\end{aligned}$$

9. 原式看作是关于 x 的多项式，则 $-2(y^2+z^2)$ 是 x^2 的系数，$(y^2-z^2)^2$ 是常数项. 于是原式变为：

$$(x^2)^2-2(y^2+z^2)x^2+(y+z)^2(y-z)^2.$$

利用十字相乘法,得$[x^2-(y+z)^2][x^2-(y-z)^2]$,结果为$(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$.

10. 变为$(x-y)^2+2xy-x^2y^2-4xy-1$

$$=(x-y)^2-(xy+1)^2$$
$$=(x-y+xy+1)(x-y-xy-1).$$

11. $(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

12. 由 $x^2+2xy-8y^2=(x-2y)(x+4y)$,然后再利用十字相乘法,得$(x-2y+3z)(x+4y-z)$.

13. 设 $xy=A$, $x+y=B$,则原式变为

$$\begin{aligned}&(A-1)^2+(B-2)(B-2A)\\&=A^2-2A+1+B^2-2B-2AB+4A\\&=A^2+B^2+1^2-2AB+2A-2B\\&=(A-B+1)^2\\&=(xy-x-y+1)^2=(x-1)^2(y-1)^2.\end{aligned}$$

14. 设 $x+y=A$, $x-y=B$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}\quad&=A^4+A^2B^2+B^4\\&=(A^2+B^2)^2-(AB)^2\\&=(A^2+B^2+AB)(A^2+B^2-AB)\\&=[(A+B)^2-AB]\cdot[(A+B)^2-3AB]\\&=(3x^2+y^2)(x^2+3y^2).\end{aligned}$$

15. $$\underbrace{111\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{222\cdots2}_{n\text{个}}=\frac{10^{2n}-1}{9}-\frac{2(10^n-1)}{9}$$

$$=\frac{1}{9}(10^n-1)^2.$$

故　原式 $$=\frac{1}{3}(10^n-1)=\underbrace{333\cdots3}_{n\text{个}}.$$

§2 用待定系数法分解因式

一、内容提要

1. 恒等概念

在对多项式 $2x^2+x-6$ 进行分解因式时，可得，

$$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$$

在这个等式中，如果字母 x 用任意数值代入，等式都成立．我们称这样的等式为恒等式．为了强调恒等，我们有时也将其写成：

$$2x^2+x-6\equiv(x+2)(2x-3)$$

其中"$\equiv$"是恒等符号．

2. 恒等定理

我们知道，若 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$，则 $a_1x^2+a_2x+a_3\equiv b_1x^2+b_2x+b_3$；反过来，若 $a_1x^2+a_2x+a_3\equiv b_1x^2+b_2x+b_3$，则 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$．

这就是说，恒等式的两边对应项的系数一定相等．

这个法则推广到任意多项式，就是**多项式的恒等定理**：

如果两个化简后的多项式对应的同类项系数分别相等，那么这两个多项式恒等；反过来，如果两个化简后的多项式恒等，那么它们对应的同类项的系数分别相等．即，如果

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

那么，有且只有 $a_0=b_0,a_1=b_1,\cdots,a_n=b_n$．

特殊情况，一个多项式恒等于 0，则它的各项系数都为 0．即，如果

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv0$$

那么,有且只有 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$.

3. **待定系数法**

为弄清楚什么是待定系数法,现举例如下:

例如,若 $2x^2+ax-9$ 被 $2x-3$ 除后余 3,求商式和 a 的值.

分析:因为 $2x^2+ax-9$ 是一个二次项系数为 2 的二次式,而 $2x-3$ 是一个一次项系数为 2 的一次式,故商式为一次项系数为 1 的一次式,设它为 $x+b$,则

$$2x^2+ax-9\equiv(2x-3)(x+b)+3 \qquad (*)$$

即 $$2x^2+ax-9\equiv 2x^2+(2b-3)x-3b+3$$

根据恒等定理,可得

$$\begin{cases}2b-3=a\\-3b+3=-9,\end{cases}\quad 求得\ b=4, a=5.$$

从而求得 $a=5$,商式为 $x+4$.

另外,由恒等的意义也可求出 a 和 b.

因为上述有 * 号的式子是恒等式,所以等式中字母用任意数值代入等式都成立.

令 $x=0$,得 $-9=-3b+3$ (1)

令 $x=1$,得 $2+a-9=(-1)(1+b)+3$

即 $a+b=9$ (2)

由(1)、(2)式求得 $b=4, a=5$.

像上面例题,我们在解题时先设出某些尚待确定的系数(即待定系数),然后根据一些条件(恒等意义或恒等定理)来确定这些系数的值,从而解决问题,这样的方法,叫做待定系数法.

待定系数法的特点是:先按题意列出一个含有特定系数的恒等式,然后根据多项式的恒等意义或恒等定理,列出含有待定系数的几个方程,然后解由这些方程组成的方程组,求出待定系数的值,从而使问题得到解决.