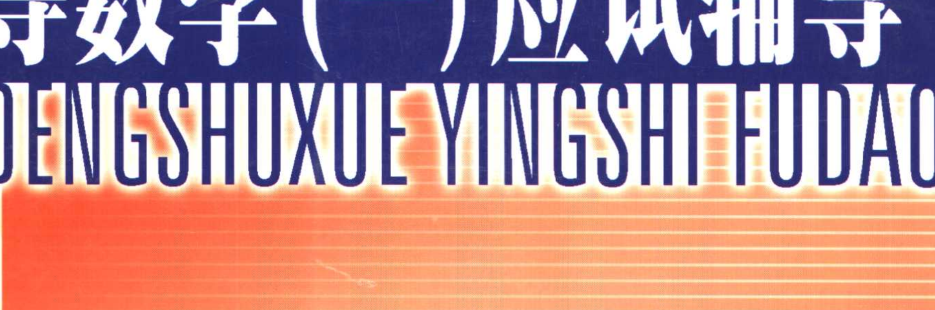
全国高等教育自学考试丛书

高等数学(一)应试辅导

GAODENGSHUXUE YINGSHI FUDAO

GAODENGSHUXUE YINGSHI FUDAO

凌明娟 编著



上海科学技术文献出版社

高等数学(一)应试指导

全国高等教育自学考试丛书

高等数学(一)应试辅导

凌明娟 主编

上海科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)应试指导 / 凌明娟主编. —上海:上海科学技术文献出版社,2001.5

(全国高等教育自学考试丛书)

ISBN 7-5439-1716-5

Ⅰ.高… Ⅱ.凌… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆(CIP)数据核字(2001)第19455号

丛书策划:图书选题工作室
责任编辑:李聚华
封面设计:时　尚
技术编辑:韦　人

全国高等教育自学考试丛书
高等数学(一)应试辅导
凌明娟　主编
上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号　邮政编码200031)
新华书店上海发行所发行
全国新华书店经销
江苏昆山市亭林印刷总厂印刷
开本 787·1092　1/16　印张 18　字数 450 000
2001年5月第1版　2001年5月第1次印刷
印数:1-6 000
ISBN 7-5439-1716-5/G·441
定价:30.00元
科技新书目:568-896

前　言

本书根据“高等数学(一)自学考试大纲”结合编者对自学考试试题的研究、阅卷和辅导的经验，尤其是近年来命题的最新动态，针对自学考试考生的特点编写而成.本书力求紧扣大纲，深入浅出，内容简明，重点突出，解题思路清晰，资料完整.每章配有练习题和历年自学考试试题(选择题自 1992 年至今，其他题型自 1986 年至今)并按章和考核点编辑且附有答案和提示.这些试题展示了统考以来高等数学(一)考试的全貌，又蕴含着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想和具体要求，是广大考生和教师了解、分析自学考试最直接、最宝贵的资料，也是学生自学和社会助学极为有效的教材.

本书按大纲分为八章，每章包括下述四部分：

一、主要内容简述和典型例题；

二、小结；

三、练习题；

四、历年试题.

练习题与历年试题均有答案与提示.最后还附有最新的全国高等教育自学考试高等数学(一)试卷(2000 年上半年、下半年和 2001 年上半年的试卷).

本书由上海财经大学应用数学系凌明娟副教授主编，王雅芬、朱快蕾、张震峰、魏枫、晓薇等老师也参加了部分工作.

限于编者水平，缺点与错误在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2001 年春

注：历年考试中从未考到的内容用 * 号表示.

目　录

第一章　一元函数及其图形

第一部分　主要内容简述与典型例题

一、预备知识

1. 集合的概念和运算

(1) 基本概念

集合　具有某种属性的对象的全体称为集合，可用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示.

元素　构成集合的对象称为元素，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A.

全集　被研究的所有对象构成的集合称为全集，记作 U 或 Ω. 全集是相对的. 一个集合在一定的研究范围内是全集，在另一研究范围内就可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于整数，则整数集 $\mathbf{Z}$ 为全集，如果讨论的问题包括全体实数，则整数集 Z 就不是全集.

(2) 集合的表示法

列举法　将集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序列出，写在花括号{　}内，这种表示集合的方法叫做列举法.

例如　小于 6 的自然数的集合为 $\{1,2,3,4,5\}$；

$\{1,2,3\}$，$\{3,2,1\}$ 都表示由 1，2，3 三个元素组成的同一个集合.

注意　$\{a\}$ 与 a 不同，a 是元素，$\{a\}$ 是只含有一个元素 a 的集合，两者概念不同. a 是集合 $\{a\}$ 的元素，两者的关系是 $a\in\{a\}$.

描述法(亦称为**构造式法**)　把对于集合中元素的共同属性的描述写在花括号内. 如果 x 表示集合 A 中的任意元素，而用 $p(x)$ 来描述 x 的性质，那么集合 A 可以表示为

$$A=\{x\mid p(x)\}\quad 或\quad \{x:p(x)\}$$

这就是集合 A 的构造式.

例如　在平面直角坐标系上，所有与原点距离等于 1 的点的集合可以表示为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\};$$

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集 A 可表示为

$$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$$

图示法　在同一平面内，用一条封闭曲线所围成的图形表示集合. 这种图形叫做韦恩图.

(3) 集合的分类

按集合中包含的元素个数的多少，集合分成有限集、无限集和空集.

有限集　包含有限个元素的集合称为有限集.

无限集　包含无限个元素的集合称为无限集.

空集　不包含任何元素的集合,称为空集用$\varnothing$表示.

注意　$\{0\}\neq\varnothing$,$\{0\}$包含一个元素"0".

(4) 子集、集合的相等

子集　如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

显然(1) $A\subset A$,即集合 A 是其自身的子集;

(2) 空集是任意集合 A 的子集,任意集合是全集的子集. 即

$$\varnothing\subset A,\quad A\subset U;$$

(3) 如果 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

注意　集合与集合之间用表示包含的记号"$\subset$",元素与集合之间用属于的记号"$\in$".

例如　$\mathbf{N}=\{$全体自然数$\}$,　$\mathbf{R}=\{$全体实数$\}$

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{R};\ \frac{3}{2}\in\mathbf{R},\ \text{但}\frac{3}{2}\overline{\in}\mathbf{N};\ \left\{\frac{3}{2}\right\}\subset\mathbf{R}.$$

集合的相等　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

(5) 集合的运算

交集　由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 和集合 B 的交集,记作 $A\cap B$.

即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

显然,$(A\cap B)\subset A$,$(A\cap B)\subset B$;当 $A\subset B$ 时,$A\cap B=A$.

并集　由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的集合叫做集合 A 和集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ \text{或}\ x\in B\}$$

显然,$A\subset(A\cup B)$,$B\subset(A\cup B)$,当 $A\subset B$ 时,$A\cup B=B$.

差集　由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的差集,记作 $A-B$. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A\ \text{但}\ x\overline{\in}B\}$$

补集　若 U 为全集,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的补集,记作 $\overline{A}$. 即 $\overline{A}=\{x\mid x\in U$ 且 $x\overline{\in}A\}$. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$.

集合的运算有如下性质:

交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例如　$A=\{x\mid -3<x<4\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 6\}$则 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<4\}$,

$A\cup B=\{x\mid -3<x\leqslant 6\}$,$A-B=\{x\mid -3<x<0\}$,$\overline{A}=\{x\mid -\infty<x\leqslant -3, 4\leqslant x<+\infty\}$.

又如 A,B 都是$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$的子集,且 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,3,5,9\}$,由于 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$,所以,

$$A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}-\{2,3,5,9\}=\{1,4,6,7,8\}.$$

集合的关系及运算如图 1 - 1 所示：

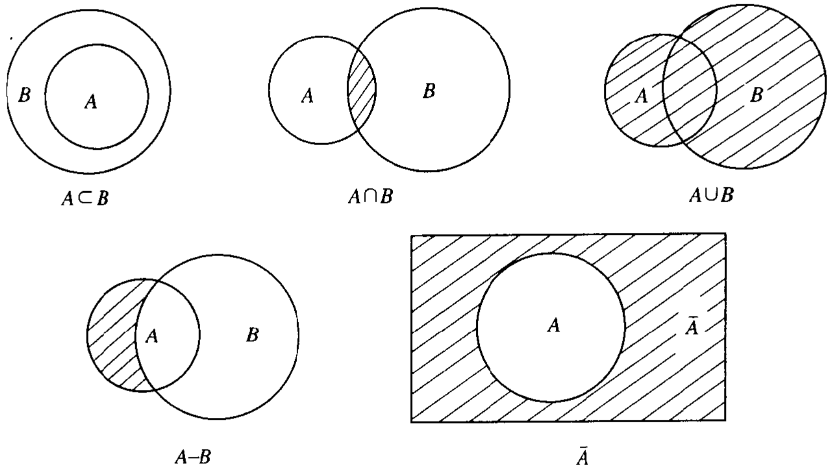


图 1 - 1

2. 实数、区间、邻域和绝对值.

(1) 实数与数轴

数是数学中一个重要的研究对象，在实数范围内数可归类为

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\text{(有限小数和无限循环小数)}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{(无限不循环小数，如 }\sqrt{2}\text{，}\pi\text{，e 等)}\end{cases}
$$

实数轴(图 1 - 2)　是具有方向、原点和单位长度的有向直线. 实数与数轴上的点是一一对应的. 点 a 与数 a 意义相同，无需区别.

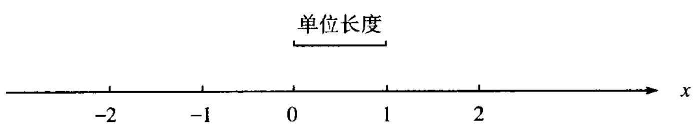


图 1 - 2

(2) 区间

区间　表示介于两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的**端点**.

开区间(a,b)(图 1 - 3)　表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

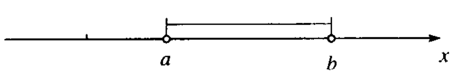


图 1 - 3

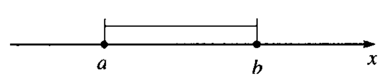


图 1 - 4

闭区间$[a,b]$(图 1-4)　表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开区间$[a,b)$或$(a,b]$(图 1-5,1-6)　表示满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，即 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

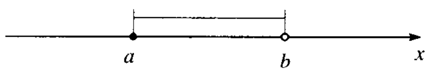


图 1-5

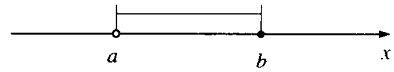


图 1-6

无穷区间

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\}$表示大于 a 的全体实数(图 1-7).

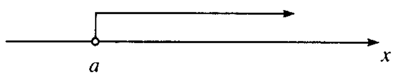


图 1-7

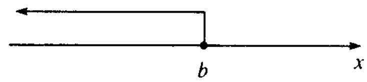


图 1-8

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}=\{x|x\leqslant b\}$表示小于、等于 b 的全体实数(图 1-8).

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示全体实数.

(3) 绝对值

实数 x 的**绝对值**，记作$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

它表示 x 到原点 0 的距离. 绝对值具有以下六条性质：

① $|x|=\sqrt{x^2}$；　② $|x|\geqslant 0$；　③ $|x|=|-x|$；　④ $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

⑤ $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$；

⑥ 如果 $a>0$，则 $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$，即 $\{x||x|<a\}=\{x|-a<x<a\}$；

$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$，即 $\{x||x|\geqslant a\}=\{x|x\geqslant a\}\cup\{x|x\leqslant -a\}$.

例如　用区间表示满足不等式$|x|>|x-3|$的 x 的集合.

则　当 $x\geqslant 3$ 时，$|x|>|x-3|\Leftrightarrow x>x-3$ 恒成立.

当 $0\leqslant x<3$ 时，$|x|>|x-3|\Leftrightarrow x>3-x\Rightarrow x>\frac{3}{2}$，所以$\frac{3}{2}<x<3$.

当 $0<x$ 时，$-x>3-x$，不可能.

所以，满足$|x|>|x-3|$的 $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

(4) 邻域

实数集合$\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$叫做 x_0 的 **δ 邻域**，其中 x_0 叫做邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**. x_0 的 δ 邻域在数轴上常以开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$表示，如图 1-9 所示.

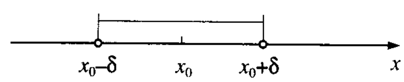


图 1-9

实数集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$叫做 x_0 的**去心邻域**. 它表示区间$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$. 即将 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 点.

例如　$|x-2|<1$，表示以 $x_0=2$ 为中心，1 为半径的邻域，也就是开区间$(1,3)$.

3. 充分条件、必要条件、充要条件与无关条件

若命题 A 成立能推得命题 B 成立，用 $A\Rightarrow B$ 表示，则称 A 是 B 的**充分条件**；B 是 A 的**必要条件**.

若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，即 $A\Leftrightarrow B$，则 A 与 B 互为**充分必要条件**.

若 $A\not\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$，则 A 与 B 互为**无关条件**.

以上四个概念在后面各章的定理、性质中经常用到，必须正确认识.

二、一元函数

1. 映射

定义 若两个集合 X,Y 间的一种对应关系 f 满足下列条件：

(1) 对于集合 X 的每一个元素，都按某种规则与集合 Y 的某个元素对应；

(2) 对于集合 X 的每一个元素，集合 Y 中与它对应的元素只有一个.

则称这样蹬对应关系 f 为集合 X 到集合 Y 的**映射**，记作 $f:X\to Y$.

对应关系 f 将集合 X 中的每一个元素 $x\in X$ 与集合 Y 中的某个(唯一的)元素 $y\in Y$ 对应，习惯上记作 $y=f(x)$. 说明 在映射中，集合 Y 中的任一元素不一定与集合 X 中的某个元素相应；集合 Y 中的一个元素也可以允许是集合 X 中的两个或多个元素的对应元素，见图 1-10.

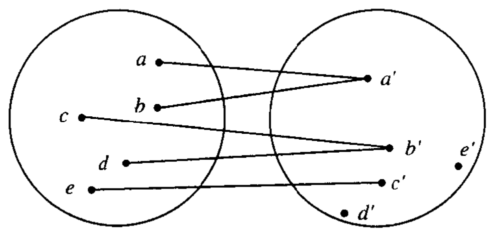


图 1-10

2. 函数的定义

两个变量 x,y，如果变量 x 在某变化范围 D 内任取一个数值时，变量 y 按一定的规律有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的**一元函数**，记作 $y=f(x)$. 变量 x 称为**自变量**，自变量允许取值的范围称为**定义域**，记作 D_f. 变量 y 称为**因变量**，y 的取值范围称为函数的**值域**，记作 Z_f. 即 $Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$. 函数与变量的记号无关，如果定义域相同，则 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=f(t)$ 表示同一函数. 函数实质上是实数集合 D_f 到集合 Z_f 的映射，即 $f:D_f\to Z_f$.

3. 函数定义中的两个要素

(1) 定义域及其求法

① 应用题中函数的定义域由变量的实际意义而定；

② 用解析式表示的函数，其定义域应使该解析式在实数范围内有意义.

例 1 求下列函数的定义域，并用区间表示.

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{\ln(2x-3)}{2x^2-3x-2}$；　　(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{1}{\lg|x-2|}$.

(1) **分析** 要使函数有意义，必须而且只须偶次根式中被开方数 $9-x^2\geqslant 0$，对数函数中真数 $2x-3>0$，分式中分母 $2x^2-3x-2\neq 0$，定义域是各不等式解的交集.

解 $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ 2x-3>0\\ 2x^2-3x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 3\\ x>\dfrac{3}{2}\\ x\neq-\dfrac{1}{2},x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x>\dfrac{3}{2}\\ x\neq-\dfrac{1}{2},x\neq 2\end{cases}$

所以，D_f：$\left(\dfrac{3}{2},2\right)\cup(2,3]$

（2）**分析** 反正弦函数中$\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1$，对数函数真数$|x-2|>0$，分母$\lg|x-2|\neq 0$，即$|x-2|\neq 1$.

解 $\begin{cases}\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1\\ |x-2|>0\\ |x-2|\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-3|\leqslant 2\\ x\neq 2\\ x-2\neq\pm 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 5\\ x\neq 2\\ x\neq 3,x\neq 1\end{cases}$

所以 D_f：$(1,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$.

（2）对应法则

函数 $y=f(x)$中的记号 $f(\quad)$是表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系，在用解析式表示的函数中 $f(\quad)$表示一种“运算框架”.

例如 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，$f(\quad)$表示将括号内的变量除以（变量－1）的运算，即

$f(\quad)=\dfrac{(\quad)}{(\quad)-1}$.

$f(x_0)=\dfrac{x_0}{x_0-1}$称为 $f(x)$在 x_0 点的函数值.

$f(2)=\dfrac{2}{2-1}=1$.

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x\quad（其中 x\neq 0,x\neq 1）$$

$f(\quad)$括号内可以是常量，也可以是变量或函数.

比较两个函数，只有当定义域和对应法则都相同时，才称为相同.

例 2 下列各对函数是否相同，并说明原因.

（1）$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$； （2）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

（3）$f(x)=2\cos^2 x-1$，$g(t)=1-2\sin^2 t$； （4）$f(x)=(\sqrt{x^2})$，$g(x)=x$.

解 （1）不相同，定义域不同，D_f：$(-\infty,+\infty)$，D_g：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）不相同，定义域不同，D_f：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_g$：$(0,+\infty)$.

（3）相同. 定义域相同，对应法则也相同. 函数与自变量的记号无关.

$$2\cos^2(\quad)-1=1-2\sin^2(\quad)=\cos 2(\quad).$$

（4）不相同. 对应法则不同，因为 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0.\end{cases}$

4. 一元函数的表示法

（1）**解析法** 用解析表达式表示的函数就称为函数的解析法，解析法也称为公式法. 如例 2中的函数都是用解析法表示的函数.

（2）**表格法** 将自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，如各种数学用表——平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.

（3）**图示法** 在一元函数中，两个变量之间的对应关系是某个坐标系中的一条曲线.

5. 分段函数

对于定义域内自变量 x 的不同取值范围，函数有不同的解析表达式，这类函数称为**分段函数**(这是解析法表示函数的特例).

例 3 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1,\end{cases}$ 求 D_f, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

解 分段函数的定义域是各定义区间的并集.

$$D_f=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$$

因为 $2\in(1,+\infty)$，所以 $f(2)=2+1=3$；因为$\frac{1}{4}\in[0,1]$所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$.

求分段函数的函数值时分析自变量在哪个小区间，就用哪个对应法则.

例 4 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leqslant 2\\ x^2-4, & 2<|x|\leqslant 4,\end{cases}$ $g(x)=f(x^2)+f(3+x)$.

求 $g(x)$的定义域.

解 $D_f=\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}\cup\{x\,|\,2<|x|\leqslant 4\}=\{x\,|\,|x|\leqslant 4\}=\{x\,|\,-4\leqslant x\leqslant 4\}$.

D_f 表示 $f(\quad)$的自变量的取值范围为$[-4,4]$.

$f(x^2)$自变量是 x^2，所以$-4\leqslant x^2\leqslant 4\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$,

$f(3+x)$自变量是$(3+x)$，所以$-4\leqslant 3+x\leqslant 4\Leftrightarrow -7\leqslant x\leqslant 1$.

$g(x)$的定义域 D_g 是上述两个定义域的交集，所以 $D_g=[-2,2]\cap[-7,1]=[-2,1]$.

说明　比较容易产生的错误是将 $f(x)$的定义域看作 x 的范围：$-4\leqslant x\leqslant 4$，并由此得到 $0\leqslant x^2\leqslant 16$，$-1\leqslant 3+x\leqslant 7$，所以错误地认为 $f(x^2)$的定义域是$[0,16]$，$f(3+x)$的定义域是$[-1,7]$.

6. 函数的几何特性

(1) **单调性**　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，若对区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$是区间 I 内的**单调增(减)函数**. 区间 I 称为函数的**单调增(减)区间**.

(2) **有界性**　若$\exists$ 一个正数 M，$\forall x\in(a,b)$恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内有界. 否则就称为**无界函数**. 在几何上，如果函数的图像介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，则函数有界.("$\forall$"表示"任意给定"，"$\exists$"表示"存在")

例如　$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界.

又由于$(|x|-1)^2\geqslant 0$，$x^2+1\geqslant 2|x|$，$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$也是有界函数.

函数是否有界，不仅与函数有关，而且与自变量取值的区间有关.

例如　$y=\ln(x-1)$在区间$(1,2)$，$(2,+\infty)$内无界，而在区间$(2,3)$内有界.

(3) **奇偶性**　设 $f(x)$在区间 I 有定义，若$\forall x\in I$，恒有$(-x)\in I$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**. **偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点**. 如果 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$在 $x=0$ 点有定义，则 $f(0)=0$.

例 5 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$；　(3) $f(x)=x^2-3x+1$；

(4) $f(x)=-|f_1(x)|$；　(5) $f(x)=xf_1(x^2)$.

解 (1) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(-x)=\lg(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\lg\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2-3\cdot(-x)+1=x^2+3x+1$,

$-f(x)=-x^2+3x-1$,

$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$.

所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(4) 当 $f_1(x)$ 是奇函数或偶函数时,$f(x)$ 是偶函数.

当 $f_1(x)$ 是非奇非偶函数时,$f(x)$ 也是非奇非偶函数.

(5) 因为 $f(-x)=-xf_1[(-x)^2]=-xf_1(x^2)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4) **周期性** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 有定义,若存在正数 T,对一切 $x\in I$ 恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ 是**周期函数**,周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

$y=\tan ax$ 和 $y=\cot ax$ 也是周期函数,周期 $T=\dfrac{\pi}{|a|}$,$y=5\sin(\pi x+2)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

三、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指下列六类函数:

常数函数 $y=c$

幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为任何实数)

指数函数 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$

基本初等函数的定义、性质、图像是求极限、求导(导数、微分)、求积(不定积分和定积分)的基础,必须掌握好. 为了便于学习,我们将基本初等函数的定义、性质、图形和常用的运算法则和公式归纳如下:

(1) 常数函数 $y=c$

x 取任何值,y 始终等于 c. 例如 $y=f(x)=\ln 3$,则

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\ln 3-\ln 3=0.$$

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为任何实数)

定义域随 μ 而异,但不论 μ 为何值,x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,而且图形都经过 $(1,1)$ 点,见图 1-11.

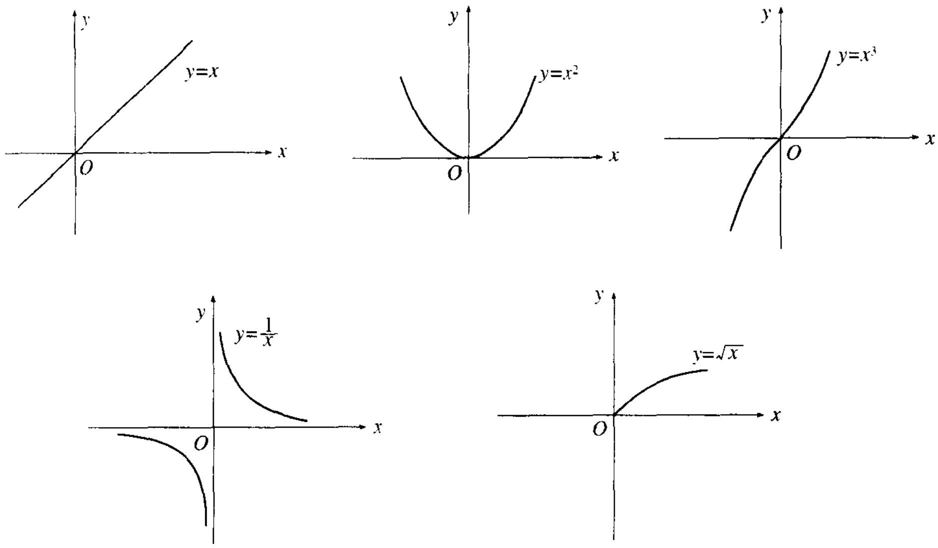


图 1-11

(3) 指数函数 $y=a^x$　($a>0$, $a\neq 1$)

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,图形经过(0,1)点(图 1-12),若 $a>1$,$y=a^x$ 单调增加.$0<a<1$,$y=a^x$ 单调减少.

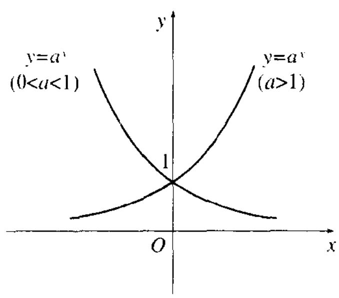


图 1-12

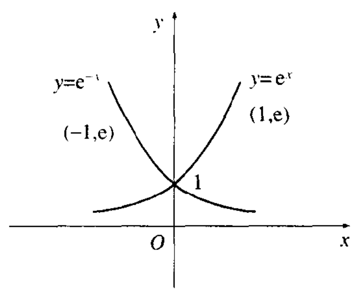


图 1-13

e^x 随 x 增大而急速趋向 $+\infty$,e^{-x}随 x 增大而急速衰减趋向 0(图 1-13).

指数函数的图形有水平渐近线 $y=0$(即 x 轴).

指数函数的运算性质:

① $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; ② $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$; ③ $(a^x)^y=a^{xy}$; ④ $\sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}}$; ⑤ $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$; ⑥ $a^0=1$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$　($a>0,a\neq 1$)

定义域$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,图形经过(1,0),$a>1$ 时函数单调增加,$0<a<1$ 时函数单调减少.对数函数的图形有垂直渐近线 $x=0$ (y 轴)(见图 1-14).

对数函数的运算性质:

① $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$;　② $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$;　③ $\log_a(x^n)=n\log_a x$;

④ $\log_a\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{n}\log_a x$;　⑤ $a^{\log_a x}=x$,$e^{\ln f(x)}=f(x)$;　⑥ $\log_a 1=0$;

⑦ $\log_a a=1$；　　　　⑧ 如果 $b>0, b\neq 1$，则 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$（换底公式）.

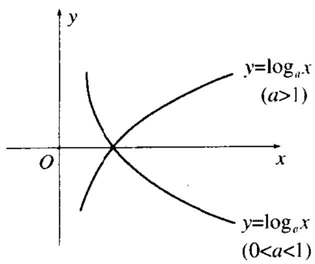


图 1－14

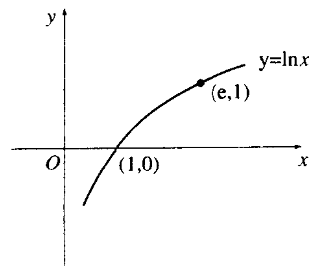


图 1－15

$y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 互为反函数. 以 e＝2.71828…为底的对数称为自然对数(图 1－15)，记作 $\ln x$.

（5）三角函数

① 正弦函数　$y=\sin x$（图 1－16），定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，奇函数，周期为 2π.

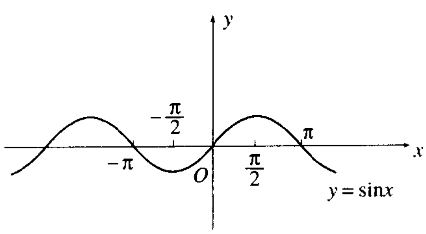


图 1－16

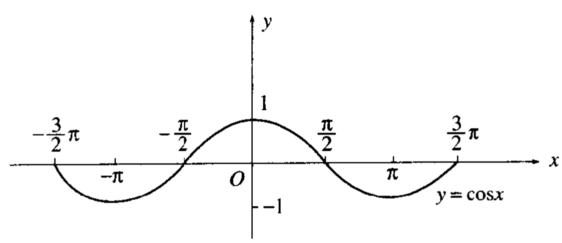


图 1－17

② 余弦函数　$y=\cos x$（图 1－17），定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，偶函数，周期为 2π.

③ 正切函数　$y=\tan x$（图 1－18），定义域 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域$(-\infty,+\infty)$，奇函数，周期为 π.

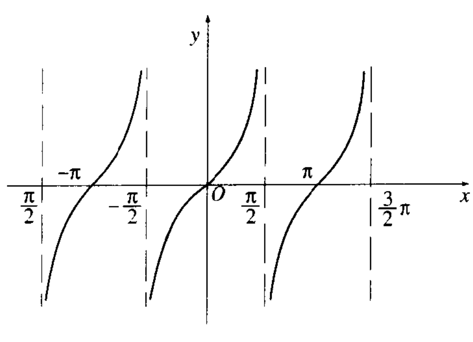


图 1－18

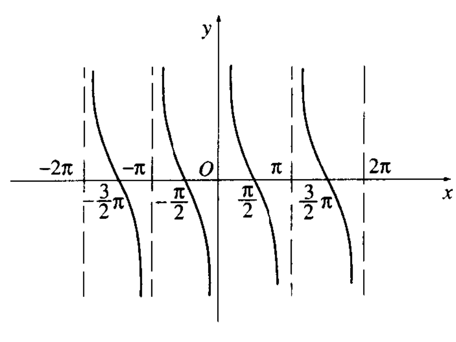


图 1－19

① 余切函数　$y=\cot x$（图 1－19），定义域 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域$(-\infty,+\infty)$，奇函数，周期为 π.