杨福清　主编

经济管理数学

JINGJI
GUANLI
SHUXUE

大连理工大学出版社

（辽）新登字 16 号

经 济 管 理 数 学

Jingji Guanli Shuxue

杨福清　主编

大连理工大学出版社出版发行　（邮政编码：116024）

东北财经大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：$10\frac{7}{8}$　字数：233 千字

1991 年 8 月第 1 版　1991 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—2000 册

责任编辑：于明珍　责任校对：田雨

封面设计：葛明

ISBN 7-5611-0504-5/O・78　定价：4.50 元

前　言

本书是为财经院校专修科、函授生编写的经济管理数学教材。它也可作为其他文科院校同类学生学习高等数学的入门书。

全书分三部分。微积分部分（第1～6章）作为基础知识，为读者提供必要的理论基础；线性代数部分（第7～9章）主要介绍行列式、矩阵和线性方程组的基本理论；概率论部分（第10～12章）在讲清基本概念的基础上，讨论了随机变量与概率分布和数学期望。各章都提供了一些具有很强经济背景的实际例子。

本书由杨福清担任主编，他提出全书内容的整体设计并负责组稿。具体分工如下：第1～4章，杨福清；第5～6章，金双华；第7～9章，丁明超；第10～12章，齐治平。邰继福负责全书的主审。

由于水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，希望读者批评和指正。

编者

1990年7月20日

目　　录

第一章　函数

17 世纪法国数学家笛卡尔把变量引入了数学，变量的引入对数学产生了巨大的影响，使数学从研究常数和固定的图形，进而考虑变化的量和图形，随后才产生了微积分学。微积分或数学分析是研究变量以及变量间依赖关系即函数关系的一门学科。在中学，我们已经学过函数概念和一些简单函数，如多项式、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数等初等函数。本章将对函数进行较系统的复习和提高，为学习以后各章内容打下基础。

§1.1　常量与变量

在生产实践或科学实验等过程中，我们可以直接或间接地观察到反映物质运动的各种各样的量，这些量大体可分为两类：一类是它的值在所考虑的问题或过程中是始终保持不变的；另一类是它的值是变动的。我们称前者为常量，后者为变量。例如，在研究某种产品的总成本时，可把总成本分为两部分：一部分是固定成本，它是由折旧费，车间经费及企业管理费等构成，这些费用不随产品的增减而变化，因此它是一个常量；另一部分是变动成本，它是由原材料费用、直接参加生产的工人工资等构成，这些费用是随产品增减而增减的，因此它是一个变量。我们应注意到，一个量是常量还

是变量，往往与所讨论的问题有关．同一个量在某种场合可以认为是常量，而在另一种情况下，也可能是变量。例如，火车行驶时的速度，在启动或刹车阶段是变化的，可以看成是变量；在正常行驶过程中，变化很小，速度相对可以看成不变，因而是常量；而在包括启动、正常行驶和刹车阶段在内的全过程中，火车的速度应该是一个变量。又例如，某种商品价格在某一短期内是常量，在某个较长时期内就是一个变量。

在数学中讨论的量，无论是常量还是变量，都不考虑它们的实际意义，而只注意它们的数值。我们也把常量和变量分别称为常数和变数，一般用字母 a，b，c 等表示常数，用字母 x，y，z，s，t 等表示变数。

§1.2 函数概念

在我们考察的事物或过程中，一般都存在着几个变量，它们之间往往不是孤立的，而是相互联系，相互制约的。因此我们不但要研究事物的每个量的变化，而且更重要的还要研究不同量之间的相互依赖关系。这种依赖关系中一种简单而又非常重要的情况，就是数学中所谓的函数关系。

例 1.1 我们已经知道，圆面积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给定。当半径 r 取定某数值时，圆的面积也就随着有一个确定的数值。

例 1.2 已知某无线电厂每日最大生产能力为生产 1000

台半导体收音机。固定成本为 1000 元,每生产一台半导体收音机,成本增加 6 元,则该无线电厂每天的总成本 c 与总产量 q 有如下的关系:

$$c=6q+1000$$

当 q 在生产能力容许的范围内$[0,1000]$取定某一数值时,总成本也随之有一个确定的数值与之对应。如 $q=100$(台)时,

$$c=6\times100+1000=1600(\text{元})$$

例 1.3 一天中气温 T 是随时间 t 而变化的,某日气温自动记录仪记录这两者间的关系如下图所示。

根据这个图象,可以求出对应于 0~24 小时内每一时刻 t_0 的温度 T_0。

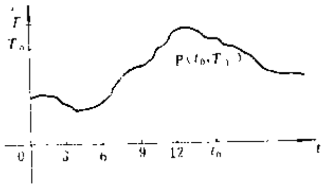

图 1—1

例 1.4 我们常用的四位数学用表,如常用对数表

真 数 x	10	11	12	13	14	15
对 数 y	1.0000	1.0414	1.0792	1.1139	1.1461	1.1761

上表中反映了对数 y 与真数 x 的对应关系。对于每一个

确定的真数 x，就有一个唯一确定的对数 y 与之对应。

上述四个例子表明，在某一特定的过程中，变量之间不仅是互相依赖的，而且存在确定的对应关系。这种对应关系在例 1．1，例 1．2 中由公式表达，例 1．3 由图形表达，例 1．4 由表格表达。它们虽然表达方式不同，但都指明了两变量之间的对应关系。根据这一对应关系，当其中一个变量在其一范围内每取一个数值时，另一个变量也就有确定的值与之对应。我们把这种变量之间确定的对应关系叫做函数关系。

把这种变量之间的对应关系抽象化，就得到下述函数概念。

定义 1．1 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D，如果按照一定规律，对于 x 在 D 中的每一个数值，都有唯一确定的 y 值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

x 称为自变量，y 称为因变量，x 的变化范围 D 叫做函数的定义域，而因变量的变化范围 R 称为函数的值域。

在函数的记号 $y=f(x)$ 中，f 表示因变量对自变量的依存关系，自然也可用别的字母表示，如 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等。有时也用表示因变量的同一个字母 S 表示：$S=S(r)$

在这里我们还要指出，函数定义中自变量与因变量用什么字母表示无关紧要，重要的是它们之间的对应规律和定义域。因此，只要函数的定义域相同，两个变量之间的对应规律相同，不管自变量及因变量采用什么字母表示，我们都认为是相同的函数。如通常熟知的面积公式：$S=\pi r^2$，$S=\pi R^2$ 等都是相同的函数。

我们规定，函数 $y=f(x)$，当 $x=x_0$ 时，因变量对应的值叫

做当 $x=x_0$ 时的函数值，用记号 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，或 $f(x)|_{x=x_0}$ 来表示。

例如，函数 $f(x)=3x^2+2x-1$. 这里的对应规律 f 就是把 x 的值代入表达式 $3(\quad)^2+2(\quad)-1$ 进行运算而得到 y，当 $x=3$ 时

$$f(3)=3\times 3^2+2\times 3-1=32$$

同样的，当 $x=a$，$x=a+1$ 时，对应的函数值分别是：

$$f(a)=3a^2+2a-1$$

$$\begin{aligned} f(a+1) &= 3(a+1)^2+2(a+1)-1 \\ &= 3a^2+8a+4 \end{aligned}$$

由此可见，求 $x=x_0$ 时的函数值，只要把函数关系中的自变量 x 用 x_0 代换就行了。

函数的定义域是指自变量 x 的取值范围。在解决实际问题时，可根据问题的实际意义具体确定。例如，圆的面积 S 作为半径 R 的函数 $S=\pi R^2$，函数的定义域是 $0\leqslant R<+\infty$。这是因为实际问题中，半径不能取负值。在数学中，当函数只由公式给出时，使式子有意义的一切实数值的全体称为函数的自然定义域。因此，在确定函数定义域时，应注意下面几点：

(1) 函数式里如果有分式，则使分母为零的自变量的值必须除掉。

(2) 函数式里如果有偶次根式，则根号里的整个式子必须大于或等于零。

(3) 函数式里如果有对数记号，则要真数大于零。

例 1.5 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域。

解 因为 $x-1=0$ 时，即 $x=1$ 时，使函数无意义，所以函

数的定义域是$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$，这里的$(-\infty,1)$表示小于1的所有实数，也可用不等式表示：$-\infty<x<1$，同样$(1,+\infty)$表示所有大于1的实数，也可表示为$(1<x<+\infty)$。

例 1.6 求函数 $f(x)=\sqrt{3x-2}$的定义域。

解 因为函数 $y=f(x)$含有开平方根式，所以要求

$$3x-2\geqslant 0 \quad 即\ x\geqslant 2/3,$$

所以函数 $f(x)=\sqrt{3x-2}$的定义域是：$[2/3,+\infty)$或 $2/3\leqslant x<+\infty$。

例 1.7 求函数 $f(x)=1/\sqrt{3x+2}$的定义域。

解 因为函数 $f(x)$含有开偶次方根式 $\sqrt{3x+2}$，所以要求 $3x+2\geqslant 0$，又因为这个根式在分母里，所以还要求 $\sqrt{3x+2}\neq 0$。

综合起来就是：$3x+2>0$ 即 $x>-2/3$，所以函数 $f(x)=1/\sqrt{3x+2}$的定义域是$(-2/3,+\infty)$

例 1.8 求函数 $f(x)=\lg(x-1)$的定义域。

解 因为要使函数表达式 $\lg(x-1)$有意义，必须

$$x-1>0 \quad 即\ x>1.$$

所以函数 $f(x)=\lg(x-1)$的定义域是$(1,+\infty)$。

例 1.9 求函数 $y=\sqrt{1+x}+\lg(1-x)+3$ 的定义域。

解 此函数的第一项 $\sqrt{1+x}$的定义域是

$$1+x\geqslant 0 \quad 即\ x\geqslant -1$$

第二项 $\lg(1-x)$的定义域为 $1-x>0$ 即 $x<1$，两者的公共部分为

$$-1\leqslant x<1$$

这就是所求函数的定义域。

§1.3 函数表示法

一般来说，函数有三种表示方法：公式法（如§1.2中例1.1、例1.2）、图示法（§1.2中的例1.3）、列表法（§1.2中的例1.4）

公式法优点是形式简单，便于理论研究，缺点是求函数值比较复杂。

图示法优点是直观，形象的把自变量与因变量的对应关系表示出来。缺点是求自变量与因变量的对应值不够准确。

表格法优点是查自变量与函数对应值方便，但只限于表达自变量取有限多个值的函数。

需要说明的，对于某些实际问题的具体对应关系，有时需用几个式子表示，称这类函数为"分段函数"。例如

$$y=\begin{cases} x+1 & 0<x<+\infty \\ 0 & x=0 \\ x-1 & -\infty<x<0 \end{cases}$$

变量 x 与 y 之间，完全满足函数的定义。这时求函数的定义域，就是把每一段的定义域合起来就是分段函数的定义域，即 $(-\infty,+\infty)$

§1.4 经济中常用的函数

一、总成本函数

总成本由固定成本和变动成本两部分组成。

例 1.10 设某工厂生产某种产品的最大生产能力为 m

件，至少要生产 n 件，固定费用为 C_1 元，每生产 1 件产品，变动费用增加 C_2 元。试求总成本函数。

解 设总产量为 q，则生产 q 件产品的变动成本为 C_2q，所以总成本

$$C=C_1+C_2q \qquad q\in[n,m]$$

二、需求函数

例 1.11 设某种商品，当销售价为 80 元时，每天可卖出 1000 件。如果每件售价降低 4 元，则可多卖出 400 件。试求需求函数(即卖出件数与售价的函数关系)。

解 设卖出件数为 x，单价为 p。按题意可知：卖出件数的增加量与售价的降低量成比例，价格降低 $80-p$(元)，卖出量增加了

$$\frac{80-p}{4}\cdot 400$$

故需求函数为

$$\begin{aligned} x &= 1000+\frac{80-p}{4}\cdot 400 \\ &= 1000+8000-100p \\ &= 9000-100p \end{aligned}$$

从这个关系式可以知道，该种商品价格不能超过 80 元，否则没有销路。

三、收益函数(收入函数)

收益就是销售量与价格的乘积。如果我们用 x 表示销量，p 表示单价，R 表示收益，则有

$$R=px$$

四、利润函数

利润等于收益与成本之差。如果用 L 表示利润，再引用前面讨论的收益函数和成本函数的式子，则有

$$L(x)=R(x)-C(x)=Px-(C_1+C_2x)$$

其中 x 表示销售量，C_1 与 C_2 为常数。

五、平均成本函数

若记产量为 x，总成本为 $C(x)$，则生产 x 件产品的平均成本 $\bar{C}$ 为

$$\overline{C}=\frac{C(x)}{x}$$

六、库存问题

例 1.12 设某工厂生产某种产品以购进某种零件，全年需用量为 a 件。零件入库后均匀的供应车间，即平均库存为入库量的一半。若每次购进的量大，则库存费高。若分多次购进，保管费虽然相应地减少了，但每次购货时的采购费 b 增加了。试求出总保管费(即库存费)和采购费与进货之间的函数关系。

解 设每次购货量为 x 件。因为全年需用 a 件，所以每年采购次数为 a/x(可设为整数)，总采购费为 $b\cdot\frac{a}{x}$，又因平均库存量为 $x/2$，故总保管费为 $c\cdot x/2$(c 为每个零件全年保管费)，于是得总费用 $A(x)$ 为

$$A(x)=a\cdot b/x+c/2\cdot x\quad(1\leqslant x\leqslant a)$$

§1.5 函数的特性

一、函数的奇偶性

定义 1.2 给函数 $y=f(x)$，若对于任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$(即 D 是对称区间)，如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数。显然奇函数的图象对称于原点。

如果对于任意 $x \in D$ 有 $-x \in D$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数。偶函数的图象对称于 y 轴。

例如，$f(x)=x^2$，由于 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数。又例如 $f(x)=x^3$ 由于 $y(-x)=(-x)^3=-x^3=-y(x)$，所以 $y(x)=x^3$ 是奇函数，而函数 $y=x^2+x^3$ 是非奇非偶函数。

二、函数的单调性

定义 1.3 若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a, b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a, b) 内是单调减少的。

例如，函数 $f(x)=x^3$，由于对任意的 x_1, x_2 有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3$$

如果 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$，在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。

又如 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 是严格递减的，而在 $(0, +\infty)$ 是严格增加的，在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $y=x^2$ 不是单调函数。

三、函数的周期性

定义 1.4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期。

例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

四、函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义（(a, b) 可以是 $y=f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如